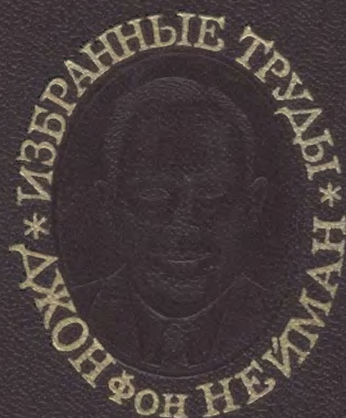
VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM


ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
ДЖОН ФОН НЕЙМАН

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



ДЖОН ФОН НЕЙМАН

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

В ДВУХ ТОМАХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1987

ДЖОН ФОН НЕЙМАН

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

II

Издание подготовил
Я. Г. СИНАЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1987

УДК 517.5+517.9

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ:

А. А. Баев (председатель),
И. Е. Дзялошинский, А. Ю. Ишлинский, С. П. Капица, И. Л. Кнунянц, А. Н. Колмогоров, С. Р. Микулинский, Д. В. Ознобишин (ученый секретарь), *Л. С. Полак, Я. А. Смородинский, А. С. Спирин, И. Т. Фролов* (заместитель председателя), *А. Н. Шамин, А. Л. Яншин*

Ответственный редактор
А. Н. Колмогоров

Переводчики:
П. М. Блехер, Л. А. Бунимович, А. М. Вершик, А. В. Марченко

Нейман Дж. фон. Избранные труды по функциональному анализу.— М. : Наука, 1986. Т. II.

В книгу включен впервые публикуемый на русском языке цикл работ по теории слабозамкнутых алгебр операторов в гильбертовом пространстве (теории факторов). В кратких комментариях обсуждается современное развитие тех направлений в теории факторов, представлений групп и алгебр и др., основы которых были заложены работами Неймана.

Книга рассчитана на математиков и физиков-теоретиков.

Н $\frac{1702050000-183}{042(02)-87}$ 128-86—II

© Издательство «Наука», 1987 г., русский перевод, комментарии


ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ * ДЖОН фон НЕЙМАН *

О КОЛЬЦАХ ОПЕРАТОРОВ*

Совместно с Ф. Дж. Мюрреем

ВВЕДЕНИЕ

1. Проблемы, обсуждаемые ниже, естественным образом возникают при продолжении работы, начатой в статье одного из нас [18, главным образом части I и II]. Их решение представляется весьма существенным для дальнейшего развития некоторых аспектов абстрактной теории операторов в гильбертовом пространстве. Во-первых, к ним приводит формальное исчисление операторных колец. Во-вторых, наши попытки существенно обобщить теорию унитарных представлений групп за ее классические рамки неизменно наталкивались на препятствия в виде нерешенных вопросов, связанных с этими проблемами. В-третьих, различные аспекты квантовомеханического формализма настоятельно требуют прояснения этих вопросов. В-четвертых, результаты, полученные в этих исследованиях, дают подход к изучению классов абстрактных алгебр без конечного базиса, который, по-видимому, принципиально отличается от всех типов, исследованных до сих пор.

Результаты, которые мы приводим, проливают свет на совершенно новую сторону теории операторов; они ведут к новому понятию линейной размерности (которая в некоторых условиях может принимать непрерывное множество значений) и указывают путь к разрешению парадоксов теории неограниченных операторов.

В четырех последующих пунктах введения мы дадим несколько более подробный обзор четырех аспектов наших проблем, перечисленных выше.

2. Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением (т. е. гильбертово пространство или конечномерное евклидово пространство (ср. b) в п. 1. 1)) и кольцо **B** всех ограниченных операторов в нем (см. f) в п. 1. 1). Подмножества **M** множества **B**, для которых из $A, B \in$ **M** следует, что αA, A^*, $A+B$, $AB \in$ **M** (α — любое комплексное число, A^* — оператор, сопряженный к A, ср. обозначения в п. 1.1), и которые замкнуты в подходящей топологии **B**, называются кольцами. (Все эти понятия детально обсуждаются в [18].) Мы будем рассматривать главным образом кольца **M**, которые содержат единичный оператор 1, 1 $\in$ **M**. Если **M**, **N** — заданные кольца, обозначим наименьшее кольцо, содержащее **M**, **N**, через **R**,(**M**, **N**), а наибольшее кольцо, лежащее в **M** и **N**, через **M**·**N** (оно, между прочим, оказывается совпадающим с теоретико-множественным пересечением **M** и **N**).

Обе операции **R** (**M**, **N**) и **M**·**N** удовлетворяют коммутативному и ассоциативному законам, поэтому любая из них аналогична сложению или умножению. Благодаря тождеству **R** (**M**, **M**) = **M**·**M** = **M** аналогия с «булевыми алгебрами» (возникающими в теории множеств или логике) более тесная, чем с обычными алгебрами. Поскольку аналог дистрибутивного закона, который связывает сложение и умножение, в общем случае не имеет места, аналогия не

* Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 116—229.

вполне точна. (В зависимости от того, как бы мы отождествили $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ со сложением и умножением, дистрибутивный закон должен был бы иметь вид $\mathbf{R}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}, \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{N}, \mathbf{P})$ или $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{P}) = \mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N} \cdot \mathbf{P})$. Ни одно из этих равенств несправедливо в общем случае.) Поэтому более или менее безразлично, как мы проведем эти отождествления. Мы предпочитаем поставить $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ в соответствие сложению, а $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ — умножению.

Во введенных обозначениях кольца $\mathbf{M}$ (а также кольца с $\mathbf{1} \in \mathbf{M}$) образуют структуру (см. [1, 9, 12 a]). Мы используем терминологию [9] и поэтому в данном пункте пишем $\mathbf{M} \cup \mathbf{N}$ вместо $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ вместо $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$. Легко проверить, что эти операции удовлетворяют аксиомам структуры I — IV [1, с. 422].

Структура R всех колец с $\mathbf{1} \in \mathbf{M}$ содержит наименьший элемент — множество $(\alpha \mathbf{1})$ всех операторов вида $\alpha \mathbf{1}$, а также наибольший элемент — множество $\mathbf{B}$ всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$. В этом пункте мы будем писать $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ вместо $(\alpha \mathbf{1})$ и $\mathbf{B}$.

Отметим теперь, что R обладает свойством, которое ставит его к булевым алгебрам ближе, чем обычные структуры: в R имеется операция $\mathbf{M}'$, делающая сложение и умножение дуальными в том смысле, что для нее имеют место равенства

$$(\mathbf{M} \cup \mathbf{N})' = \mathbf{M}' \cap \mathbf{N}', \qquad (D_1)$$

$$(\mathbf{M} \cap \mathbf{N})' = \mathbf{M}' \cup \mathbf{N}'. \qquad (D_2)$$

Определим $\mathbf{M}'$ как множество тех A, которые коммутируют со всеми $B \in \mathbf{M}$ (ср. [18, с. 374]); тогда $\mathbf{M}' \in R$ и

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}'' \qquad (D_3)$$

(см. [18, с. 397]). При этом (D_1) очевидно; (D_2) выводится из (D_1) путем замены $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ на $\mathbf{M}'$ и $\mathbf{N}'$ соответственно, применения операции $'$ к обеим частям равенства и использования (D_3).

В аналогии с булевыми алгебрами (или логикой), при которой $\mathbf{M} \cup \mathbf{N}$ отвечает сумме (соответственно «или») и $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ — произведению (соответственно «и»), $\mathbf{M}'$ должно сопоставляться дополнению (соответственно «не»).

Другая структура подобного типа состоит из всех замкнутых линейных многообразий в $\mathfrak{H}$. Обозначим ее через M и введем такие определения: если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — два замкнутых линейных многообразия в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ — наименьшее замкнутое линейное многообразие, содержащее их (ср. d) в п. 1.1, где оно обозначено через $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$); $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ — наибольшее замкнутое линейное многообразие, содержащееся в них (их теоретико-множественное пересечение, $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$); $\mathbf{0}$ — наименьший элемент M: множество (0), состоящее из единственного элемента 0; $\mathbf{1}$ — наибольший элемент M : $\mathfrak{H}$. (Такие обозначения мы используем лишь в этом пункте.) Далее, мы можем определить $\mathfrak{M}'$ как множество всех элементов $\mathfrak{H}$, ортогональных всем элементам из $\mathfrak{M} : \mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ (ср. [16, с. 74]). Опять-таки можно проверить, что M удовлетворяет аксиомам структуры I—IV (см. [1, с. 422]), в то время как дистрибутивный закон (аксиома VI из [1, с. 453]) в общем случае не выполняется. (Аксиома V из [1, с. 445] справедлива, так что M является B-структурой, см. там же; (D_1)—(D_3) тоже выполнены.)

Следуя аналогии с дополнением в булевых алгебрах (и с «не» в логике), мы должны ожидать, что имеют место соотношения

$$\mathbf{M} \cup \mathbf{M}' = 1, \qquad (D_4)$$

$$\mathbf{M} \cap \mathbf{M}' = 0 \qquad (D_5)$$

(в решетке M (D_4) и (D_5) справедливы). На самом деле имеется весьма глубокая связь между M и специальным видом логики: вероятностной логикой в квантовой механике (см. [20, с. 130—134]). Оказывается, однако, что эти равенства, вообще говоря, неверны в R. Например, если $\mathbf{M}$—абелево кольцо [18, с. 374], то $\mathbf{M} \subset \mathbf{M}'$ и потому $\mathbf{M} \cup \mathbf{M}' = \mathbf{M}'$, $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'=\mathbf{M}$. В связи с этим интересно выяснить, для каких конкретно элементов $\mathbf{M}$ из R выполнены (D_4) и (D_5). Поскольку операция $'$ делает (D_4) и (D_5) дуальными (применить $'$ и использовать (D_1)—(D_3)), они эквивалентны. Поэтому достаточно обсудить одно из них. В наших исходных обозначениях они имеют вид

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}') = \mathbf{B}, \qquad (\overline{D}_4)$$

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}' = (\alpha 1). \qquad (\overline{D}_5)$$

Теория этих уравнений будет основной темой статьи (ср. п. 3.1).

3. Пусть $\mathfrak{H}$—n-мерное евклидово пространство $\mathfrak{E}_n$, $n=1, 2, \ldots$ В этом случае легко разобраться в значении ($\overline{D}_5$).

Предположим, что $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}' = (\alpha 1)$. Пусть $\mathbf{M}^U$—множество всех унитарных элементов $\mathbf{M}$, тогда $\mathbf{M}$ порождается $\mathbf{M}^U$ (см. [18, с. 392]). Поэтому $\mathbf{M}'=(\mathbf{M}^U)'$, а поскольку $\mathbf{M}^U$— группа унитарных матриц, то $\mathbf{M}$ состоит из всех линейных комбинаций элементов $\mathbf{M}^U$. Применим теперь к $\mathbf{M}^U$ теорию унитарных представлений групп.

Поскольку $\mathbf{M}^U$ состоит из унитарных матриц, оно вполне приводимо (см. [14, с. 411—412, сноска 1]). Введем в $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_n$ координатную систему, в которой $\mathbf{M}^U$ полностью приведено. Пусть неприводимые части $\mathbf{M}^U$ соответствуют множествам координат с номерами $p_1+ \ldots +p_{s-1}+1, \ldots, p_1+p_2+ \ldots +p_{s-1}+ +p_s$ для $s= 1, \ldots, r$, где $r = 1, 2, \ldots$; $p_1, \ldots, p_r= 1, 2, \ldots$; $p_1+ \ldots +p_r= n$, и обозначим их через $I_1, \ldots, I_r$. Обозначим число частей, эквивалентных I_1, через $q= 1, 2, \ldots$ и упорядочим I_s так, чтобы они заняли места $I_1, \ldots, I_q$. Дальнейшей заменой координат можно даже сделать $I_1, \ldots, I_q$ тождественными. Отметим, что $p_1= \ldots =p_q=p$, так что каждый из элементов $\mathbf{M}^U$ имеет следующий вид: он состоит из r ($\geqslant q$) матриц, следующих одна за другой вдоль главной диагонали, причем первые q из них равны между собой и имеют порядок p. То же самое верно и для их линейных комбинаций — элементов $\mathbf{M}$.

Матрицы, возникающие в первых q диагональных минорах, образуют неприводимую систему, не эквивалентную тем, которые возникают в остальных $r-q$ диагональных минорах. Поэтому можно применить теоремы Бернсайда, Фробениуса и Шура (см. [3; 8; 14, с. 412]). Из них следует, что эти матрицы совершенно произвольны и независимы от остальных $r-q$ матриц. Таким образом, можно взять в качестве первых q матриц единичные матрицы, а остальные $r-q$ матрицы — нулевыми. При этом возникает элемент E_0 из $\mathbf{M}$,

который, очевидно, коммутирует со всеми элементами из $\mathbf{M}$; поэтому $E_0 \in \mathbf{M}\cdot\mathbf{M}'$. Поскольку $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}' = (\alpha 1)$, то $E_0 = \alpha 1$. Это конечно, влечет равенство $\alpha = 1$, а потому E_0 не может содержать $r - q$ нулевых миноров и, значит, $r - q = 0$, $q = r$, $n = p_1 + \ldots + p_q = pq$.

Если мы запишем общий элемент A из $\mathbf{M}$ как матрицу $A = \{a_{\mu,\nu}\}_{\mu,\nu=1,\ldots,n}$, то наши рассмотрения позволяют описать A следующим образом: положим $\mu = p(s-1) + \sigma$, $\nu = p(t-1) + \tau$, где $s, t = 1, \ldots, q$; $\sigma, \tau = 1, \ldots, p$ (напомним, что $n = pq$), тогда

$$a_{\mu,\nu} = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq t, \\ \text{функции лишь } \sigma \text{ и } \tau & \text{при } s = t. \end{cases}$$

Если мы заменим индекс μ $(=1, \ldots, n)$ двумя индексами σ $(=1, \ldots, p)$ и s $(=1, \ldots, q)$, а индекс ν подобным же образом заменим на τ и t, то получим

$$A \approx \{a_{\sigma,s,\tau,t}\}_{\substack{\sigma,\tau=1,\ldots,p,\\ s,t=1,\ldots,q}}$$

где

$$a_{\sigma,s,\tau,t} = \delta_{s,t} b_{\sigma,\tau}; \tag{S}$$

$\delta_{s,t}$ — символ Кронекера—Вейерштрасса; $b_{\sigma,\tau}$ произвольны.

Обратно, множество $\mathbf{M}$, состоящее из всех $\{\delta_{s,t} b_{\sigma,\tau}\}_{\substack{\sigma,\tau=1,\ldots,p,\\ s,t=1,\ldots,q}}$, является кольцом, $\mathbf{M}'$ состоит из всех $\{\delta_{\sigma,\tau} b_{s,t}\}_{\substack{\sigma,\tau=1,\ldots,p,\\ s,t=1,\ldots,q}}$, а $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}'$ — из всех $\{\delta_{s,t}\delta_{\sigma,\tau}\alpha\} = \alpha 1$, поэтому (S) — общее решение $(\overline{D}_5)$ для $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_n$.

Другими словами, общее решение $(\overline{D}_5)$ получается путем замены одного координатного индекса $\mu = 1, \ldots, n$ в $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_n$ двумя независимыми координатными индексами $\sigma = 1, \ldots, p$ и $s = 1, \ldots, q$ $(n = pq)$ и включения в $\mathbf{M}$ всех линейных операторов A, которые действуют только на σ, в то время как $\mathbf{M}'$ состоит из тех операторов, которые действуют только на s.

Такие результаты получаются путем применения классической теории представлений групп Бернсайда—Фробениуса—Шура. Мы видим, что решение $(\overline{D}_5)$ прямо связано с фундаментальными фактами из теории представлений.

Если аналогичная ситуация встретится в гильбертовом пространстве, то мы должны ожидать, что решения $(\overline{D}_5)$ могут быть представлены в таком виде: $\mathfrak{H}$ изоморфно пространству функций $f(x, y)$ от двух независимых переменных x, y (с $\iint |f(x, y)|^2\, dxdy < \infty$) с непрерывными или дискретными множествами значений x и y, причем в последнем случае $\int \ldots dx$ и $\int \ldots dy$ должны быть заменены на суммы [16, с. 69 и 108—111]. Кольцо $\mathbf{M}$ состоит из всех операторов, которые действуют только по x, а $\mathbf{M}'$— из тех, которые действуют только по y (см. п. 3.2, где это обсуждается подробнее). Принципиальное отличие гильбертова пространства от пространств $\mathfrak{E}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, отражается в том факте, что это не так. Мы увидим, что если $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, то $(\overline{D}_5)$ имеет решения, отличные от описанных выше (см., в частности, пункты 8.6 и 13.2). Их свойства, как нам кажется, весьма существенны для общей теории операторов.

Общее значение решений ($\overline{D}_5$) для теории операторов следует также из того факта, что, зная их, можно полностью охарактеризовать и классифицировать все кольца операторов. Это будет обсуждаться в следующей статье второго из авторов.

4. Другую интерпретацию ($\overline{D}_5$) предлагает квантовая механика. Операторы на $\mathfrak{H}$ соответствуют всем наблюдаемым величинам, отвечающим механической системе $\mathfrak{S}$ [6, с. 55—60; 20, с. 167]. Будем рассматривать только ограниченные операторы, которые соответствуют наблюдаемым с ограниченной областью значений. Тогда **B** соответствует множеству только таких наблюдаемых. Если теперь $\mathfrak{S}$ разложена на две части $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$, обозначим множество операторов, соответствующих наблюдаемым, сосредоточенным полностью в $\mathfrak{S}_1$ или в $\mathfrak{S}_2$, через $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ соответственно, тогда:

1) $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$— кольца и **1** (соответствующая «постоянной» наблюдаемой **1**) принадлежит обоим кольцам $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$;

2) если $A \in \mathbf{M}_1$, $B \in \mathbf{M}_2$, то измерения наблюдаемых A и B не влияют одно на другое (ибо соответствуют разным частям $\mathfrak{S}$), поэтому A и B коммутируют (см. [6, с. 11—14 и 76; 20, с. 117—121]). Таким образом, $\mathbf{M}_2 \subset \mathbf{M}_1'$;

3) поскольку $\mathfrak{S}$ является объединением $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$, то $\mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \mathbf{B}$.

Условия 1—3 описывают проблему «факторизации» **B**, которая более подробно обсуждается в п. 3.1; она возвращает нас к прежнему вопросу: поскольку $\mathbf{M}_2 \subset \mathbf{M}_1'$, то $\mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1') \supset \mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \mathbf{B}$, так что $\mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1') = \mathbf{B}$, что в точности совпадает с ($\overline{D}_4$), а это, как мы знаем, эквивалентно ($\overline{D}_5$). Обратно, если **M** удовлетворяет ($\overline{D}_4$), т. е. ($\overline{D}_5$), то $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}'$ удовлетворяют 1—3 (подробнее см. в п. 3.1).

Таким образом, наша задача о решении ($\overline{D}_5$) соответствует квантовомеханической проблеме разбиения системы $\mathfrak{S}$ на две подсистемы $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$; в частности, решения **M** уравнения ($\overline{D}_5$) соответствуют полным кольцам всех наблюдаемых подходящих квантовомеханических систем.

Приведенная интерпретация ($\overline{D}_5$), конечно, наталкивает на предположение, выдвигаемое в конце п. 2.2, о возможности описания $\mathfrak{H}$ как пространства (изоморфного пространству) всех функций от двух переменных $f(x, y)$ ($\int\int |f(x, y)|^2 \, dxdy < \infty$), в котором **M** действует только по x, а $\mathbf{M}'$—по y. При этом $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ окажутся заданными явно: $\mathfrak{S}_1$ описывается координатой x, а $\mathfrak{S}_2$— координатой y.

В связи со сказанным еще более замечателен тот факт, что предположение п. 2.2 не верно; в частности, потому, что некоторые особенности «исключительных» колец **M**, как нам кажется, делают их лучше приспособленными для целей квантовой механики, нежели привычное **B**. Обсудим теперь эти особенности **M**.

5. Полная система решений ($\overline{D}_5$) будет обсуждаться в пунктах 8.3, 8.4. Сейчас же мы хотели бы обратить внимание на следующее обстоятельство: если предположение п. 2.2 выполнено, то **M**, очевидно, изоморфно кольцу всех операторов на x. Отсюда в зависимости от того, принимает ли x конечное или бесконечное множество значений, **M** изоморфно кольцу всех операторов в ко-

нечномерном евклидовом пространстве $\mathfrak{E}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) или гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}'$. В систематизированных обозначениях п. 8.4 эти возможности отмечаются как случаи (I_n), $n = 1, 2, \dots$, и (I_∞) соответственно (В последнем случае x может принимать непрерывное или дискретное множество значений, что, как известно, не влияет на характер гильбертова пространства $\mathfrak{H}'$.) Как мы уже упоминали, эти случаи не исчерпывают всех возможностей для **M**: могут возникнуть дополнительные случаи, обозначаемые (II_1), (II_∞) и (III_∞). (Все они, кроме (III_∞), безусловно, существуют, вопрос о существовании (III_∞) пока не решен; см. п. 13.3.)

Случаи (I_n), $n = 1, 2, \dots$, конечно, наиболее простые, и именно на них выработано наше понимание того, как должны выглядеть операторы. Это верно как для общей теории операторов, так и для квантовой механики. Поэтому особенно важно сравнить остальные случаи (I_∞)—(III_∞) с точки зрения того, какой из них имеет больше общих черт с (I_n), кольцом матриц из n столбцов и n строк, и может рассматриваться как предельный случай (I_n) при $n \to \infty$. Исследования операторов в гильбертовом пространстве всегда велись под влиянием представления, что естественным пределом является кольцо **B** гильбертова пространства, т. е. (I_∞). Мы думаем, однако, что наши результаты указывают на то, что правильнее приписать эту роль (II_1). Для этого имеются две главные причины: существование следа и поведение неограниченных операторов. Главы XV и XVI статьи посвящены выводу этих общих свойств (I_n) и (II_1). Пока что сделаем несколько качественных замечаний по этому поводу

Случаи (I_n) и (II_1) характеризуются тем, что для них существует и единственна функция $T(A)$, определенная на всех эрмитовых операторах $A \in \mathbf{M}$ и принимающая конечные вещественные значения, которая обладает формальными свойствами следа (см. пункты 15.4, 15.5). В случаях (I_n), когда операторы $A \in M$ соответствуют матрицам $\{a_{\mu,\nu}\}_{\mu,\nu=1,\dots,n}$, очевидно, $T(A) = (1/n)\Sigma_1^n a_{\mu,\mu}$ («нормирующий» множитель» $1/n$ необходим, так как мы требуем, чтобы $T(1) = 1$), и хорошо известно, что в случае (I_∞), т. е. для всех ограниченных бесконечных матриц $\{a_{\mu,\nu}\}_{\mu,\nu=1,2,\dots}$ такую функцию определить нельзя. (Выражение, построенное по аналогии с $(1/n)\ \Sigma_1^n a_{\mu,\mu}$, в общем случае не будет сходиться.) Мы доказали, как было упомянуто выше, что единственный новый случай, в котором такая функция существует и единственна,— это (II_1).

Рассматривая возможность непосредственного приложения функции $T(A)$ к квантовой механике (это «априорное» математическое ожидание значения наблюдаемой A, которое корректно нормировано в этом случае, но ненормируемо в (I_∞); см. [20, с. 165, 169]), важно отметить, что ее существование и единственность являются характеристическими свойствами случая (II_1).

Более общий вопрос, который будет рассмотрен вторым автором в следующей статье, возникает теперь из следующих соображений: было бы полезно охарактеризовать те абстрактные алгебры, в которых существует и единственна функция $T(A)$ со свойствами следа (обсуждавшимися выше). (Абстрактность алгебры означает здесь, что ее связь с операторными кольцами не должна постулироваться.) Ответ заключается в том, что все алгебры, удовлетворяющие таким требованиям, должны быть изоморфны какому-либо кольцу операторов **M** в (евклидовом или гильбертовом) пространстве $\mathfrak{H}$, являющемуся реше-

нием уравнения ($\bar{D}_5$) и принадлежащему случаю (I_n), $n = 1, 2, \ldots,$ или (II_1).

Возвращаясь к случаю (II_1), отметим, что аналогия с (I_n) заходит настолько далеко, что верны теоремы типа следующей: любая система линейных уравнений (которую, конечно, можно переписать как одно векторное уравнение $Af = 0$, где $A \in \mathbf{M}$— «матрица коэффициентов», а $f \in \mathfrak{H}$ —вектор переменных) имеет ранг. В случае (I_n)—это число $0, 1, \ldots, n-1, n$, но мы заменяем его на $1/n$-часть: $0, 1/n, \ldots, (n-1)/n, 1$. В случае ($II_1$) — это любое число, не меньшее нуля и не большее единицы. Две сопряженные системы уравнений ($Af = 0$ и $A^*f=0$, см. п. 16.1) имеют одинаковый ранг. (Отметим аналогию с (I_n) и явный контраст с (I_∞!)) Подобным образом может быть определена размерность подпространств $\mathfrak{H}$ (замкнутых линейных подмножеств), которая принимает значения $0, 1/n, \ldots, (n-1)/n, 1$ (в привычной нормировке $0, 1, \ldots, n$) в случае (I_n) и все числа от 0 до 1 в случае (II_1). Для такого понятия размерности можно даже доказать «принцип минимакса» (см. [5, с. 26—29]), который нумерует собственные значения всех эрмитовых операторов (из $\mathbf{M}$) даже в случае непрерывного спектра! Поэтому имеет смысл говорить о «собственном значении № α оператора A (снизу)» для любого $1 \geqslant \alpha \geqslant 0$, даже для иррационального! (см. п. 15.2).

6. Рассмотрим теперь неограниченные операторы. Хотя prima facie $\mathbf{M}$ состоит из ограниченных операторов, существует естественный способ расширить его так, чтобы включить и неограниченные операторы: будем говорить, что произвольный (не обязательно ограниченный) оператор X присоединен к $\mathbf{M}$, если он инвариантен относительно всех унитарных операторов $U' \in \mathbf{M}'$. Обозначим множество всех таких линейных замкнутых операторов X со всюду плотной областью определения, присоединенных к $\mathbf{M}$, через $U(\mathbf{M})$ (см. пункты 4.2 и 16.4; относительно понятий линейности и замкнутости см. [16, с. 70]). Ограниченные элементы $U(\mathbf{M})$ образуют в точности кольцо $\mathbf{M}$.

В то время как в общем случае эрмитовы операторы обладают разложением единицы тогда и только тогда, когда они гипермаксимальны (см. [16, с. 92; 15, теорема 9.3, с. 339]), в случаях (I_n) и (II_1) дело обстоит намного проще: любой эрмитов оператор гипермаксимален и потому обладает (единственным) разложением единицы. (В случае (I_n) это обеспечивается тем тривиальным обстоятельством, что любой линейный оператор ограничен. Но в случае (II_1) неограниченные операторы существуют точно так же, как и в случае (I_∞)!)

Операторы из $U(\mathbf{B})$ ($\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство) с точки зрения алгебры операторов ведут себя весьма патологическим образом: если $A, B \in U(\mathbf{B})$, то $A + B$ и AB в общем случае не существуют и сам механизм замены операторов их расширениями ведет к парадоксальным результатам (см. [17, с. 230—234], где эти условия обсуждаются в деталях). Это относится, конечно, и ко всем $U(\mathbf{M})$, если $\mathbf{M}$ типа (I_∞). В случаях (I_n) и (II_1) это опять не так: алгебра $U(\mathbf{M})$ работает безо всяких затруднений, и если A является расширением B, $A, B \in U(\mathbf{B})$, то $A = B$ (подробнее см. в пунктах 16.3 и 16.4).

7. Детальный обзор содержания этой статьи приведен в оглавлении, следующем ниже. Основные результаты собраны в теоремах I—XV, а наиболее существенные вопросы сформулированы как проблемы. После каждой из них указывается, в какой мере она решена и где следует искать ее решение. Вспомогательные рассуждения, ведущие к теоремам, собраны в леммах.

Обозначения разъясняются в п. 1.1, где также приведены основные ссылки. Они, а также остальные цитирования относятся к библиографии, помещенной в конце статьи.

Различные продолжения исследований, начатых в этой работе, которые мы намерены предпринять в нескольких последующих статьях, отмечены повсюду в тексте (см. также замечания в конце этой статьи).

Здесь мы бы, однако, хотели упомянуть также о том, что методы, весьма похожие на использованные в данной статье, позволяют обсуждать соответствующие проблемы в несепарабельных аналогах гильбертова пространства [11, 13]. Аналогия с канторовой теорией алефов, которую мы подчеркиваем в главах VI и VII, становится тогда еще более явной. Этот вопрос тоже будет рассматриваться в другой раз.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.
1. Цели и происхождение.
2. Кольца операторов. Рассмотренные типы.
3. Конечномерный случай.
4. Связи с квантовой механикой.
5. Свойства некоторых колец в случае (II_1).
6. Неограниченные операторы, получающиеся в случае (II_1).
7. Обзор.

Часть I. Предварительные рассмотрения.
Глава I. Обозначения.
1.1. Обозначения.
Глава II. Прямые произведения.
2.1. Конструкция прямого произведения. Теорема I.
2.2. Ортогональные выражения.
2.3. Эффект на кольцах. Теорема II.
2.4. $n \otimes \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}$ (n раз). Операторные матрицы.
Глава III. Факторизация **B**.
3.1. Факторизации, факторы. Проблема 1.
3.2. Элементарные свойства. Проблема 2.
Глава IV. Вспомогательные теоремы.
4.1. Обсуждение уравнения $\Sigma_1^n A_i A_i' = 0$. Теорема III.
4.2. Понятие $\eta\mathbf{M}$.
4.3. Частично изометрические операторы.
4.4. Каноническое разложение $A = WB$.
Глава V. Прямые факторы. Изоморфизмы колец.
5.1. $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$. Понятие минимальности. Критерий минимальности.
5.2. Изоморфизмы колец.
5.3. Характеризация прямых факторов с помощью существования минимальных элементов. Теоремы IV и V.
5.4. Прямые факторы и прямые разложения.

Часть II. Общая задача.
Глава VI. Относительная размерность.
6.1. Равенство относительных размерностей. Аддитивность. Теорема эквивалентности.
6.2. (Range X) $\approx$ (Range X^*). Теорема сравнения.
6.3. Упорядочение относительных размерностей. Теорема VI.
Глава VII. Конечные и бесконечные множества.
7.1. Деление. Конечность и бесконечность.
7.2. Свойства бесконечности.
7.3. Аддитивность конечности.

Глава VIII. Численная размерность.
8.1. Фундаментальные последовательности.
8.2. $D(\mathfrak{M})$. Единственность $D(\mathfrak{M})$ и $(\mathfrak{N}/\mathfrak{M})_{\mathfrak{S}}$.
8.3. Формулировка основных характеристик $D(\mathfrak{M})$. Полная аддитивность и непрерывность $D(\mathfrak{M})$. Теорема VII.
8.4. Значения $D(\mathfrak{M})$. Случаи (I)—(III). Теорема VIII. Проблемы 3—7.
8.5. Инвариантность относительно изоморфизмов колец. Теорема IX.
8.6. Дискретные случаи.
Часть III. Пары факторов.
Глава IX. Качественное сравнение $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ и $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$.
9.1. Знакоопределенные ряды $\Sigma_{i=0}^{\infty} A_i$. Оператор $B^{1/2}$.
9.2. Приложения к $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}'}$.
9.3. Эквивалентность $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}'} \underset{\prec}{\overset{\succ}{\sim}} \mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}'}$ (... M) и $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}} \underset{\prec}{\overset{\succ}{\sim}} \mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}}$ (... M′) соответственно.
Глава X. Соотношение между $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'})$ и $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}})$.
10.1. Значения $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'})$ и $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}})$.
10.2. Доказательство равенств $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}) = CD_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'})$ и $\Delta_0 = \Delta$ или $\Delta_0' = \Delta'$. Теорема X.
Глава XI. Произведение и разложение факторов.
11.1. Нормальность и разложение. Проблемы 8—9.
11.2. Свойства нормальности. Проблема 10.
11.3. Разложения при помощи $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$.
11.4. Разложение при помощи двух $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M}'\eta\mathbf{M}'$. Определение их классов. Инвариант C.
11.5. Определение результирующего класса для произведения R (M, N) при N из класса (I).
Часть IV. Примеры случая (II).
Глава XII. Построение M и M′.
12.1. $\mathfrak{G}$ и S, пространства $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{H}_S$, $\mathfrak{H}_{S,\mathfrak{G}}$.
12.2. Обсуждение $L = (L_{\varphi(x)})$ и $U = (U_a)$ в $\mathfrak{H}_S$.
12.3. Построение M, M′ в $\mathfrak{H}_{S,\mathfrak{G}}$.
12.4. Вывод ′ (E), т. е. $D_{\mathbf{M}}(E)$ и $D_{\mathbf{M}'}(E)$. Теорема XI.
Глава XIII. Свойства M и M′.
13.1. Определение классов M, M′.
13.2. Примеры случая (II).
13.3. Перечисление существующих случаев. Теорема XII.
13.4. Неспаренные факторы.
Часть V. Конечные случаи.
Глава XIV. Обобщенная аддитивность $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$.
14.1. Аналогия между (I_n) и (II_1).
14.2. Обобщенные формулы аддитивности для $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$.
Глава XV. Относительный след.
15.1. Определение относительного следа.
15.2. Принцип «минимакса». Новое выражение для следа.
15.3. Формальные свойства следа.
15.4. Характеризация следа при помощи внутренних свойств. Теорема XIII. Проблема 11.
15.5. Характеризация конечных случаев при помощи следов. Теорема XIV.
Глава XVI. Неограниченные операторы.
16.1. Число решений уравнений $Xf = 0$ и $X^*f = 0$.
16.2. Существенная плотность. Главные свойства.
16.3. Исчисление неограниченных операторов. Определения.
16.4. Исчисление неограниченных операторов. Результаты. Теорема XV.
Литература.

Часть I
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

Глава I
ОБОЗНАЧЕНИЯ

1.1. В дальнейшем мы будем предполагать, что читатель знаком с унитарно-ортогонально-геометрической интерпретацией элементарных свойств гильбертова пространства, которую можно найти в обзоре [16, с. 63—78] или в [15, гл. 1]. Кроме того, нам придется часто использовать статьи одного из нас, именно: [18, 21, 22], которые содержат видоизменение одной теоремы из [18].

На этом основании некоторые обозначения будут использованы в дальнейшем без разъяснения их значения. Перечислим их:

a) $x \in S$ означает, что x есть элемент множества S; $S \subset T$ или $T \supset S$ означает, что S является подмножеством T (включая случай $S = T$). Множество всех элементов x, обладающих свойством $\varepsilon(x)$, будет обозначаться через $(x;\ \varepsilon(x))$; множество всех $f(x)$ с x, обладающими свойствами $\varepsilon(x)$,— через $(f(x);\ \varepsilon(x))$; теоретико-множественное объединение множеств S, T, ... плюс элементы x_0, y_0, ... — через $(S, T, \ldots, x_0, y_0, \ldots)$; теоретико-множественное произведение (общая часть, пересечение) множеств S, T, ... — через $S \cdot T \cdot \ldots$

Символ η в выражении $x\eta S$, имеющий значение, аналогичное значению $x \in S$, будет определен в п. 4.2 (определение 4.2.1).

b) Полное, сепарабельное линейное пространство, снабженное скалярным произведением, будет обозначаться через $\mathfrak{H}$. (Мы будем использовать индексы, если возникнет более одного пространства.) Другими словами, $\mathfrak{H}$ — пространство, в котором заданы операции (f, g), af, $f + g$, удовлетворяющие условиям A, B, C, E из [16, с. 64—66]. Условие D (оттуда же) мы сознательно опускаем. Таким образом, $\mathfrak{H}$ является или гильбертовым пространством, или конечномерным евклидовым пространством в соответствии с тем, выполнено D или нет. Мы рассматриваем только 1, 2, ...-мерные евклидовы пространства, исключая 0-мерное, когда $\mathfrak{H} = (0)$.

c) Мы обозначаем комплексные или вещественные числа через α, ε, a, x, C, D; целые числа—через i, j, k, m, n, p, q, s, t, u, v и N. Элементы $\mathfrak{H}$ обозначаются буквами f, g, φ, ψ, иногда (в прямых произведениях)— Φ и Ψ.

d) Произвольные подмножества $\mathfrak{H}$ обозначаются через $\mathfrak{S}$; линейные подмножества — через $\mathfrak{A}$; линейные и замкнутые подпространства — через $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$. Поскольку последние также являются пространствами $\mathfrak{H}$, их символы иногда заменяют $\mathfrak{H}$.

Наименьшее линейное и наименьшее замкнутое линейное множества, содержащие некоторые множества или элементы, обозначаются $\{\ldots\}$ и $[\ldots]$ соответственно (в отличие от $(\ldots)$, ср. a)). Множество всех элементов $\mathfrak{N}$, ортогональных к $\mathfrak{M}$, обозначается $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}$.

e) Операторы в $\mathfrak{H}$ обозначаются через A, B, X, Y. Для некоторых специальных видов операторов будут использованы буквы E, F, G и P для проекторов, U, V и W для унитарных и частично изометрических операторов (см. [16, с. 70]).



John von Neumann

f) Кольцо всех ограниченных линейных замкнутых операторов, определенных на всем $\mathfrak{H}$, обозначается через **B**, его подкольца—через **M** и **N** (см. [18, с. 388]).

Произвольные подмножества **B** обозначим через S; наименьшее кольцо, содержащее S,— через **R** $[S]$; кольцо, состоящее из всех A, коммутирующих с X и X^* для любого $X \in S$,— через S'.

g) Как поясняется в [18, с. 377—378], в $\mathfrak{H}$ можно использовать две различные топологии, а в **B** — четыре: «сильная» и «слабая» в $\mathfrak{H}$ и в **B**, «равномерная» в **B** и, наконец, «сильнейшая» топология в **B**. Если нет специальных оговорок, мы всегда подразумеваем «сильную» топологию в $\mathfrak{H}$; в противном случае используемая топология будет уточнена отдельно. Свойства этих топологий несколько необычны и играют заметную роль. Детали приведены в [18, 22] loc. cit.

В IV части будут рассмотрены пространства S и группа $\mathfrak{G}$ всех его взаимно однозначных отображений на себя. Мы будем обозначать элементы $\mathfrak{G}$ через a, b и c; элементы S — через x, y; единицу и элемент, обратный к $a \in \mathfrak{G}$ в S,— через 1 и a^{-1}. Впрочем, эти обозначения будут использованы только в части IV.

Результаты из теории операторов, которые мы будем чаще всего применять (не считая общей теории гильбертовых пространств и спектральной теоремы для гипермаксимальных операторов), встречаются в теоремах 1, 5, 9 из [18], в теоремах 5, 6 из [19] и в теореме 7 из [21].

Глава II

ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

2.1. Одной из операций, позволяющей построить новое пространство $\mathfrak{H}$ из n заданных пространств $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$, является операция прямого произведения. Поскольку это один из основных элементов, появляющихся в ситуациях, которые мы собираемся рассматривать, и так как общее абстрактное рассмотрение (которое годилось бы и для гильбертовых пространств и не использовало специальных координатных систем) в литературе отсутствует, приведем его систематическое изложение.

Определение 2.1.1. *Пусть заданы $n = 1, 2, \ldots$ пространств $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$. Рассмотрим все комплекснозначные функционалы $\Phi(f_1, \ldots, f_n)$, определенные для любой системы $f_i \in \mathfrak{H}_i$, $i = 1, \ldots, n$, и антилинейные по всем f_i:*

(i) $\Phi(\ldots, \alpha f_i, \ldots) = \bar{\alpha}\Phi(\ldots, f_i, \ldots)$;

(ii) $\Phi(\ldots, f_i + g_i, \ldots) = \Phi(\ldots, f_i, \ldots) + \Phi(\ldots, g_i, \ldots)$.

Обозначим их множество через $\prod_{i=1}^{n} \tilde{\otimes} \mathfrak{H}_i$.

Определение 2.1.2. *Если задана система $f_i^0 \in \mathfrak{H}_i$, $i = 1, \ldots, n$, образуем функционал*

$$\Phi(f_1, \ldots, f_n) = \prod_{i=1}^{n} (f_i^0, f_i).$$

Очевидно, $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \tilde{\otimes} \mathfrak{H}_i$. Положим, по определению, $\Phi = \prod_1^n \otimes f_i^0 = f_1^0 \otimes \ldots \otimes f_n^0$.

Определение 2.1.3. *Рассмотрим конечные линейные комбинации вида*

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{p} \prod_{i=1}^{n} \otimes f_{i,\nu}^{0}, \qquad p = 0,\ 1,\ \ldots,\ f_{i,\nu}^{0} \in \mathfrak{H}_i.$$

Множество всех таких комбинаций обозначим через $\prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$ (*ясно, что* $\prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i \subset \prod_{i=1}^{n} \tilde{\otimes} \mathfrak{H}_i$).

Лемма 2.1.1. *Пусть* $\Phi,\ \Psi \in \prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$, *т. е.*

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{L} \prod_{i=1}^{n} \otimes f_{i,\nu}^{0}, \qquad \Psi = \sum_{\mu=1}^{q} \prod_{i=1}^{n} \otimes g_{i,\mu}^{0},$$

определим $(\Phi,\ \Psi)$ *формулой*

$$(\Phi,\ \Psi) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} \prod_{i=1}^{n} (f_{i,\nu}^{0},\ g_{i,\mu}^{0}).$$

Это выражение зависит только от Φ *и* Ψ, *но не от конкретного использованного разложения.*

Доказательство. Благодаря линейности достаточно рассмотреть случай, когда $\Phi = 0$ или $\Psi = 0$, а в силу симметрии относительно Φ и Ψ мы вправе положить $\Psi = 0$. Мы покажем, что каждое слагаемое суммы $\sum_{\nu=1}^{r}$ в $(\Phi,\ \Psi)$ исчезает. В самом деле,

$$\sum_{\mu=1}^{q} \prod_{i=1}^{n} (f_{i,\nu}^{0},\ g_{i\mu}^{0}) = \Psi(f_{1,1}^{0},\ \ldots,\ f_{i,n}^{0}) = 0.$$

Лемма 2.1.2. *Если* $\Phi \in \prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$ *и* $\Phi \neq 0$, *то* $(\Phi,\ \Phi) > 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала произвольное $\Phi \in \prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$. Тогда

$$(\Phi,\ \Phi) = \sum_{\mu,\nu=1}^{L} \prod_{i=1}^{n} (f_{i,\mu}^{0},\ f_{i,\nu}^{0}).$$

Для любых комплексных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p$

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{p} (f_{i,\mu}^{0},\ f_{i,\nu}^{0})\, x_\mu \bar{x}_\nu = \left(\sum_{1}^{p} x_\mu f_{i,\mu}^{0},\ \sum_{\nu=1}^{p} x_\nu f_{i,\nu}^{0} \right) = \left\| \sum_{\mu=1}^{p} x_\mu f_{i,\mu}^{0} \right\|^2 \geqslant 0,$$

т. е. каждая матрица $((f_{i,\mu}^{0},\ f_{i,\nu}^{0}))_{\mu,\nu=1,\ldots,p}$ (p-мерная!) неотрицательно-определенная. Поэтому она является суммой (не более чем p) неотрицательно-определенных матриц ранга 1, имеющих вид $((\alpha_\mu^i \bar{\alpha}_\nu^i))_{\mu,\nu=1,\ldots,p}$. Таким образом, $(\Phi,\ \Phi)$ является суммой членов

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{L} \prod_{i=1}^{n} \alpha_\mu^i \bar{\alpha}_\nu^i = \sum_{\mu,\nu=1}^{L} \prod_{i=1}^{n} \alpha_\mu^i \overline{\prod_{i=1}^{n} \alpha_\nu^i} = \sum_{\mu=1}^{L} \prod_{i=1}^{n} \alpha_\mu^i \overline{\sum_{\nu=1}^{L} \prod_{i=1}^{n} \alpha_\nu^i} =$$

$$= \left| \sum_{\mu=1} \prod_{i=1}^{n} \alpha_\mu^i \right|^2 \geqslant 0.$$

Итак, мы получили, что $(\Phi,\ \Phi) \geqslant 0$. Отсюда доказывается неравенство Шварца

$$|(\Phi,\ \Psi)| \leqslant \sqrt{(\Phi,\ \Phi)(\Psi,\ \Psi)}$$

буквально так же, как в [16, с. 64]. Поэтому из $(\Phi, \Phi) = 0$ следует, что $(\Phi, \Psi) = 0$ для любого $\Psi \in \prod'^{n}_{i=1} \otimes \mathfrak{H}_i$. Положим $\Psi = \prod^{n}_{i=1} \otimes f_i$, тогда

$$\Phi(f_1, \ldots, f_n) = \left(\Phi, \prod^{n}_{i=1} \otimes f_i\right) = 0,$$

так что $\Phi = 0$. Таким образом, из $\Phi \neq 0$ следует неравенство $(\Phi, \Phi) > 0$.

Лемма 2.1.3. *С данным выше определением* (Φ, Ψ), $\prod'^{n}_{i=1} \otimes \mathfrak{H}_i$ *становится линейным пространством со скалярным произведением, т. е. удовлетворяет условиям* А, В *в* [16, с. 64].

Благодаря этому его можно метризовать, если положить расстояние $(\Phi, \Psi) = \|\Phi - \Psi\|$, *где* $\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)}$.

Доказательство. Это следует немедленно из лемм 2.1.1 и 2.1.2, если вспомнить [16, с. 64—65].

Лемма 2.1.4. *Имеет место равенство* $\left\|\prod^{n}_{i=1} \otimes f_i\right\| = \prod^{n}_{i=1} \|f_i\|$, *и для любого* $\Phi \in \prod'^{n}_{i=1} \otimes \mathfrak{H}_i$

$$\Phi(f_1, \ldots, f_n) = \left(\Phi, \prod^{n}_{i=1} \otimes f_i\right),$$

$$|\Phi(f_1, \ldots, f_n)| \leqslant \|\Phi\| \cdot \prod^{n}_{i=1} \|f_i\|.$$

Доказательство. Первое равенство следует непосредственно из определения $\|\cdot\|$ в $\prod'^{n}_{i=1} \otimes \mathfrak{H}_i$, второе очевидно, а третье выводится с помощью неравенства Шварца:

$$|\Phi(f_1, \ldots, f_n)| = \left|\left(\Phi, \prod^{n}_{i=1} \otimes f_i\right)\right| \leqslant \|\Phi\| \cdot \left\|\prod^{n}_{i=1} \otimes f_i\right\| = \|\Phi\| \cdot \prod^{n}_{i=1} \|f_i\|.$$

Определение 2.1.4 *Рассмотрим функционалы* $\Phi \in \prod^{n}_{i=1} \tilde{\otimes} \mathfrak{H}_i$, *для которых существует такая последовательность* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \in \prod'^{n}_{i=1} \otimes \mathfrak{H}_i$, *что*

(i) $\lim_{r\to\infty} \Phi_r(f_1, \ldots, f_n) = \Phi(f_1, \ldots, f_n)$ *для всех* $f_i \in \mathfrak{H}_i$,

(ii) $\lim_{r,s\to\infty} \|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$.

Мы будем кратко это записывать так: $\Phi \sim (\Phi_1, \Phi_2, \ldots)$. *Множество всех таких функционалов мы обозначим через* $\prod^{n}_{i=1} \otimes \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{H}_n$ и *будем называть прямым произведением* $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$.

Лемма 2.1.5. *Каждая последовательность* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ *из* $\prod'^{n}_{i=1} \otimes \mathfrak{H}_i$, *удовлетворяющая* (ii) *из определения* 2.1.4, *соответствует в точности одному* $\Phi \in \prod^{n}_{i=1} \otimes \mathfrak{H}_i$ *в смысле условий* (i) и (ii) *того же определения.*

Если $\Phi \sim (\Phi_1, \Phi_2, \ldots)$, *то все другие последовательности с* $\Phi \sim (\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$ *характеризуются тем, что* $\lim_{r\to\infty} \|\Phi_r - \Psi_r\| = 0$.

Доказательство. Согласно лемме 2.1.4

$$|\Phi_r(f_1, \ldots, f_n) - \Phi_s(f_1, \ldots, f_n)| \leqslant \|\Phi_r - \Phi_s\| \cdot \prod^{n}_{i=1} \|f_i\|.$$

Поэтому $\lim_{r,s\to\infty}|\Phi_r(f_1, \ldots, f_n) - \Phi_s(f_1, \ldots, f_n)| = 0$, т. е. существует $\lim_{r\to\infty}\Phi_r(f_1, \ldots, f_n)$. Обозначим его через $\Phi(f_1, \ldots, f_n)$. Ясно, что $\Phi \in \tilde{\prod}_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$. Поэтому выполняются (i) и (ii), откуда $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$, $\Phi \sim (\Phi_1, \Phi_2, \ldots)$. Согласно (i) Φ единственно.

Что касается второго утверждения, то благодаря линейности мы вправе считать, что $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = 0$. Если $\lim_{r\to\infty}\|\Psi_r\| = 0$, то, как и ранее, мы найдем, что $0 = \lim_{r\to\infty}\Psi_r(f_1, \ldots, f_n)$. Кроме того, $\|\Psi_r - \Psi_s\| \leqslant \|\Psi_r\| + \|\Psi_s\|$ и поэтому $\lim_{r,s\to\infty}\|\Psi_r - \Psi_s\| = 0$. Отсюда $0 \sim (\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$.

Обратно, предположим, что $0 \sim (\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$. Если в то же время равенство $\lim_{r\to\infty}\|\Psi_r\| = 0$ не выполнено, то $\|\Psi_r\| \geqslant a > 0$ для некоторого фиксированного $a > 0$ и бесконечного числа значений r. Переходя к подходящей подпоследовательности, можно считать, что это верно и для всех r. Теперь $\lim_{r\to\infty}\Psi_r(f_1, \ldots, f_n) = 0$ влечет за собой $\lim_{r\to\infty}(\Psi_r, \Psi^0) = 0$ для любого фиксированного $\Psi^0 \in \prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$. Положим $\Psi^0 = \Psi_{r_0}$, где r_0 настолько велико, что из $r, s \geqslant r_0$ следует, что $\|\Psi_r - \Psi_s\| \leqslant a/2$. Тогда для $r \geqslant r_0$ имеем

$$|(\Psi_r, \Psi_{r_0})| \geqslant |(\Psi_{r_0}, \Psi_{r_0})| - |(\Psi_{r_0} - \Psi_r, \Psi_{r_0})| \geqslant \|\Psi_{r_0}\|^2 - \|\Psi_{r_0} - \Psi_r\| \cdot \|\Psi_{r_0}\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\Psi_{r_0}\|^2 - (a/2)\|\Psi_{r_0}\| = (\|\Psi_{r_0}\| - a/2)\cdot\|\Psi_{r_0}\| \geqslant (a - a/2)\,a = a^2/2,$$

что противоречит равенству $\lim_{r\to\infty}(\Psi_r, \Psi_{r_0}) = 0$.

Лемма 2.1.6. *Если* $\Phi, \Psi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$, *т. е.* $\Phi \sim (\Phi_1, \Phi_2, \ldots)$, $\Psi \sim (\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$, $\Psi_r, \Phi_r \in \prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$, *то существует предел* $\lim_{r\to\infty}(\Phi_r, \Psi_r)$. *Обозначим его через* (Φ, Ψ). *Эта величина зависит только от* Φ *и* Ψ, *а не от выбора конкретного представления. Для* $\Phi, \Psi \in \prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$ *это согласуется с предыдущим определением.*

Доказательство. С помощью неравенства Шварца из $\lim_{r,s\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$, $\lim_{r,s\to\infty}\|\Psi_r - \Psi_s\| = 0$ следует, что $\lim_{r,s\to\infty}|(\Phi_r, \Psi_r) - (\Phi_s, \Psi_s)| = 0$, значит, существует $\lim_{r\to\infty}(\Phi_r, \Psi_r)$. Далее, если $\Phi \sim (\Phi_1', \Phi_2', \ldots)$, $\Psi \sim (\Psi_1', \Psi_2', \ldots)$, то согласно лемме 2.1.5 $\lim_{r\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_r'\| = 0$, $\lim_{r\to\infty}\|\Psi_r - \Psi_r'\| = 0$, откуда

$$\lim_{r\to\infty}(\Phi_r, \Psi_r) = \lim_{r\to\infty}(\Phi_r', \Psi_r').$$

Если $\Phi, \Psi \in \prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$, то $\Phi \sim (\Phi, \Phi, \ldots)$, $\Psi \sim (\Psi, \Psi, \ldots)$, что доказывает согласованность нового определения (Φ, Ψ) со старым.

Лемма 2.1.7. *Если* $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$, *то* $(\Phi, \Phi) > 0$ *для* $\Phi \neq 0$.

Доказательство. Неравенство $(\Phi, \Phi) \geqslant 0$ следует по непрерывности из результатов леммы 2.1.2. Если $(\Phi, \Phi) = 0$, то для $\Phi \sim (\Phi_1, \Phi_2, \ldots)$, $\Phi_r \in \prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$, $\lim_{r\to\infty}(\Phi_r, \Phi_r) = 0$, $\lim_{r\to\infty}\|\Phi_r\| = 0$, и потому согласно лемме 2.1.5 $\Phi = 0$. Поэтому из $\Phi \neq 0$ следует, что $(\Phi, \Phi) > 0$.

Лемма 2.1.8. *С произведением* (Φ, Ψ), *определенным выше,* $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ *образует линейное пространство со скалярным произведением, т. е. удовлетво-*

ряет условиям A, B в [16, с. 64]. *Поэтому его можно метризовать, полагая расстояние* $(\Phi, \Psi) = \|\Phi - \Psi\|$, *где* $\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)}$.

Доказательство. Это следует из лемм 2.1.6 и 2.1.7, если вспомнить [16, с. 64—65].

Лемма 2.1.9. $\prod_{i=1}^{n}\otimes f_i$ *является непрерывной функцией всех* $f_i \in \mathfrak{H}_i$ (*здесь подразумевается метрическая, т. е. сильная, топология во всех пространствах*).

Доказательство. Положим $a = \max_{i=1,\ldots,n}\|f_i^0\|$ и предположим, что все $\|f_i - f_i^0\| \leqslant \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\left\|\prod_{i=1}^{n}\otimes f_i - \prod_{i=1}^{n}\otimes f_i^0\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j}\otimes f_i \otimes \prod_{i=j+1}^{n}\otimes f_i^0 - \prod_{i=1}^{j-1}\otimes f_i \otimes\right.\right.$$
$$\left.\left.\otimes \prod_{i=j}^{n}\otimes f_i^0\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}\otimes f_i \otimes (f_j - f_j^0) \otimes \prod_{i=j+1}^{n}\otimes f_i^0\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left\|\prod_{i=1}^{j-1}\otimes f_i \otimes (f_j - f_j^0) \otimes \prod_{i=j+1}^{n}\otimes f_i^0\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}\|f_i\|\cdot\|f_j - f_j^0\| \times$$
$$\times \prod_{i=j+1}^{n}\|f_i^0\| \leqslant \sum_{j=1}^{n}(a+\varepsilon)^{j-1}\varepsilon a^{n-j} = (a+\varepsilon)^n - a^n.$$

Лемма 2.1.10. *Лемма* 2.1.4 *справедлива и для* $\Phi \in \prod_{i=1}^{n}\otimes \mathfrak{H}_i$.

Доказательство следует из непрерывности.

Лемма 2.1.11. *Если* $\Phi \in \prod_{i=1}^{n}\otimes \mathfrak{H}_i$, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \in \prod_{i=1}^{n'}\otimes \mathfrak{H}_i$, *то* $\Phi \sim (\Phi_1, \Phi_2, \ldots)$ *эквивалентно равенству* $\lim_{r\to\infty}\|\Phi - \Phi_r\| = 0$.

Доказательство. Если $\lim_{r\to\infty}\|\Phi - \Phi_r\| = 0$, то лемма 2.1.10 дает (i), а $\|\Phi_r - \Phi_s\| \leqslant \|\Phi - \Phi_r\| + \|\Phi - \Phi_s\|$ дает (ii) из определения 2.1.4. Поэтому $\Phi \sim (\Phi_1, \Phi_2, \ldots)$. Обратно, если $\Phi \sim (\Phi_1, \Phi_2, \ldots)$, то, по определению, $\|\Phi - \Phi_s\| = \lim_{r\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_s\|$. Поэтому $\lim_{r,s\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$ влечет за собой $\lim_{s\to\infty}\|\Phi - \Phi_s\| = 0$.

Лемма 2.1.12. *Оба пространства* $\prod_{i=1}^{n'}\otimes \mathfrak{H}_i$ *и* $\prod_{i=1}^{n}\otimes \mathfrak{H}_i$ *сепарабельны, т. е. удовлетворяют условию* D *из* [16, с. 65].

Доказательство. Согласно лемме 2.1.11 $\prod_{i=1}^{n'}\otimes \mathfrak{H}_i$ плотно в $\prod_{i=1}^{n'}\otimes \mathfrak{H}_i$, поэтому достаточно доказать сепарабельность $\prod_{i=1}^{n'}\otimes \mathfrak{H}_i$. С учетом определения 2.1.3 нам достаточно проверить сепарабельность множества всех $\prod_{i=1}^{n}\otimes f_i$, $f_i \in \mathfrak{H}_i$, а это следует из сепарабельности всех пространств $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$ и леммы 2.1.9.

Лемма 2.1.13. $\prod_{i=1}^{n}\otimes \mathfrak{H}_i$ — *топологически полное пространство, т. е. удовлетворяет условию* E *из* [16, с. 65].

Доказательство. Предположим, что $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \in \prod_{i=1}^{n}\otimes\mathfrak{H}_i$, $\lim_{r,s\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$. Для каждого Φ_r выберем $\Phi_r^0 \in \prod_{i=1}^{n'}\otimes \mathfrak{H}_i$ с $\|\Phi_r - \Phi_r^0\| < 1/r$, так что $\lim_{r\to\infty}\|\Phi_r - \Phi_r^0\| = 0$. Тогда $\lim_{r,s\to\infty}\|\Phi_r^0 - \Phi_s^0\| = 0$ и для $\Phi \sim (\Phi_1^0, \Phi_2^0, \ldots)$, $\lim_{r\to\infty}\|\Phi - \Phi_r^0\| = 0$ (согласно лемме 2.1.11), поэтому и $\lim_{r\to\infty}\|\Phi - \Phi_r\| = 0$.

Результаты обсуждения можно подытожить следующим образом:

Теорема 1. *Прямое произведение пространств* $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$ — $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ — *есть топологическое пополнение множества* $\prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$ *всех конечных линейных комбинаций выражений* $\prod_{i=1}^{n} \otimes f_i$, $f_i \in \mathfrak{H}_i$. *Оно является множеством линейных функционалов* $\Phi = \Phi(f_1, \ldots, f_n)$ *в смысле определения* 2.1.1, *а потому* $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i \subset \prod_{i=1}^{n} \tilde{\otimes} \mathfrak{H}_i$; *кроме того, это пространство удовлетворяет условиям* A, B, C, E *из* [16, с. 64—65] (*ср. наш п.* 1.1, a)). *Дальнейшие важные его свойства приводятся в леммах* 2.1.1, 2.1.4, 2.1.9—2.1.11.

Если $n = 1$, то $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ совпадает с $\mathfrak{H}_1$ не только по обозначению, но и на самом деле.

В этом случае мы можем писать f_1^0, или даже f^0 вместо $\prod_{i=1}^{n} \otimes f_i^0$. Линейные комбинации векторов f^0 являются векторами f^0, поэтому $\prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$ совпадает с $\mathfrak{H}_1$ и уже $\prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$ полно, и $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ не содержит новых элементов. Отметим, что при указанном соответствии функционалов Φ от одной переменной векторам $f^0 \in \mathfrak{H}$ функция $\Phi(f)$ обращается просто в (f^0, f). Хорошо известная теорема М. Фреше и Ф. Риса утверждает, что в данном случае $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ характеризуется свойством $\| \Phi(f) \| \leqslant C \| f \|$ с подходящей константой C (см., например, [16, с. 94]).

Последнее обстоятельство примечательно, потому что для $n > 1$ условие

$$|\Phi(f_1, \ldots, f_n)| \leqslant C \prod_{i=1}^{n} \| f_i \|$$

необходимо (см. лемму 2.1.10), но, как мы покажем позже в лемме 2.2.2, недостаточно для того, чтобы $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$.

2.2. Представляет интерес обсудить связь между $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ и множеством полных нормированных ортогональных систем в каждом $\mathfrak{H}_i$.

Лемма 2.2.1. *Пусть в каждом* $\mathfrak{H}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *задана полная нормированная ортогональная система векторов* $\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \ldots$ *Тогда множество* $\prod_{i=1}^{n} \otimes \varphi_{i,t_i}$, $t_1, t_2, \ldots, t_n = 1, 2, \ldots$, *является полной нормированной ортогональной системой в* $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$.

Доказательство. По определению,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \otimes \varphi_{i,t_i}, \prod_{i=1}^{n} \otimes \varphi_{i,u_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} (\varphi_{i,t_i}, \varphi_{i,u_i}) = \prod_{i=1}^{n} \delta_{t_i,u_i},$$

что доказывает нормированность и ортогональность системы. Линейные комбинации φ_{i,t_i} плотны в $\mathfrak{H}_i$, поэтому комбинации $\prod_{i=1}^{n} \otimes \varphi_{i,t_i}$ плотны в $\prod_{i=1}^{n'} \otimes \mathfrak{H}_i$ (по лемме 2.1.9), а значит, и в $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$. Это доказывает полноту системы.

Лемма 2.2.2. *Для того чтобы функционал от* n *переменных* $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \tilde{\otimes} \mathfrak{H}_i$ (*см определение* 2.1.1) *принадлежал* $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$, *необходимо, чтобы при*

подходящей константе C выполнялось неравенство

$$|\Phi(f_1, \dots, f_n)| \leqslant C \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|.$$

В этом случае Φ полностью определяется набором числовых значений $\Phi(\varphi_{1,t_1}, \dots, \varphi_{n,t_n}) = a_{t_1,\dots,t_n}$ для всех $t_1, \dots, t_n = 1, 2, \dots$ Элементы $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ характеризуются конечностью $\sum_{t_1,\dots,t_n=1}^{\infty} |a_{t_1,\dots,t_n}|^2$. В этих пределах $a_{t_1,\dots,t_n}$ можно выбрать произвольным образом, причем найдется $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ с заданными $a_{t_1,\dots,t_n}$.

Доказательство. Необходимость первого условия следует из леммы 2.1.10. Благодаря линейности оно влечет за собой непрерывность $\Phi(f_1, \dots, f_n)$ по $f_1, \dots, f_n$. Поэтому значения $\Phi(\varphi_{1,t_1}, \dots, \varphi_{n,t_n})$ определяют $\Phi(f_1, \dots, f_n)$, если каждое f_i является пределом линейных комбинаций $\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \dots$, но это всегда так.

Согласно лемме 2.1.10 $\left(\Phi, \prod_{i=1}^{n} \otimes \varphi_{i,t_i}\right) = \Phi(\varphi_{1,t_1}, \dots, \varphi_{n,t_n}) = a_{t_1,\dots,t_n}$, поэтому по лемме 2.2.1 и [16, с. 66] сумма $\sum_{t_1,\dots,t_n=1}^{\infty} |a_{t_1,\dots,t_n}|^2$ должна быть конечной. Обратно, если задана система $a_{t_1,\dots,t_n}$ с конечной суммой $\sum_{t_1,\dots,t_n=1}^{\infty} |a_{t_1,\dots,t_n}|^2$, то существует $\Phi = \sum_{t_1,\dots,t_n=1}^{\infty} a_{t_1,\dots,t_n} \prod_{i=1}^{n} \otimes \varphi_{i,t_i}$ и по лемме 2.2.1 и [16, с. 67] $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$; на том же основании имеем

$$\Phi(\varphi_{1,t_1}, \dots, \varphi_{n,t_n}) = \left(\Phi, \prod_{i=1}^{n} \otimes \varphi_{i,t_i}\right) = a_{t_1,\dots,t_n}.$$

Теперь мы видим, что в случае $n = 2$ априорное условие на Φ

$$|\Phi(f_1, f_2)| \leqslant C \|f_1\| \|f_2\|$$

означает, что матрица $(a_{t_1,t_2})_{t_1,t_2=1,2,\dots}$, соответствующая Φ, ограничена в смысле гильбертовой теории, в то время как $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ означает конечность

$$\sum_{t_1,t_2=1}^{\infty} |a_{t_1,t_2}|^2,$$

т. е принадлежность нашей матрицы классу матриц Шмидта. Поэтому, хотя предварительное условие и является характеристическим для $n = 1$, для $n = 2$ это уже не так. Если $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а I — сопряжение (переход к комплексному сопряжению; см. [15, с. 357]) в $\mathfrak{H}$, то $\Phi(f_1, f_2) = (If_1, f_2)$ является контрпримером: для $\varphi_{1,t} = \varphi_{2,t}$ мы получаем $a_{t_1,t_2} = \delta_{t_1,t_2}$.

Лемма 2.2.3. *Если в обозначениях леммы 2.2.2 $\Phi, \Psi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ соответствуют $a_{t_1,\dots,t_n}$ и $b_{t_1,\dots,t_n}$,* то

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{t_1,\dots,t_n=1}^{\infty} a_{t_1,\dots,t_n} \cdot \overline{b_{t_1,\dots,t_n}},$$

причем ряд абсолютно сходится.

Доказательство. Это получается с помощью последней формулы из доказательства леммы 2.2.2, леммы 2.2.1 и [16, с. 66].

Леммы 2.2.2 и 2.2.3 показывают, что размерность $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ является произведением размерностей всех $\mathfrak{H}_i$, т. е. 0, если хоть одна из них равна 0; ∞, если ни одна из них не равна 0, но хоть одна равна ∞; конечное произведение, если все они конечны. Отныне и далее мы будем предполагать, что все $\mathfrak{H}_i$ имеют размерность, отличную от 0, т. е. $\mathfrak{H}_i \neq (0)$.

2.3. Определим теперь некоторые операторы в $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$. Мы будем обозначать через $\mathbf{B}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, кольцо всех ограниченных, линейных замкнутых операторов, определенных всюду в $\mathfrak{H}_i$, а через $\mathbf{B}\otimes$ такое же кольцо в $\prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ (ср. [18, с. 370]).

Лемма 2.3.1. *Если заданы* $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ *и оператор* $A_i \in \mathbf{B}_i$, *то существует единственный* $\Phi^* \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$, *для которого*

$$\Phi^* (f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_n) = \Phi (f_1, \ldots, A_i^* f_i, \ldots f_n)$$

(A_i^* — *оператор, сопряженный к* A_i). *Если* $\| A_i f_i \| \leqslant D \| f_i \|$ *для всех* $f_i \in \mathfrak{H}_i$, *то* $\| \Phi^* \| \leqslant D \| \Phi \|$.

Доказательство. Мы можем считать, что $i = n$. Существование Φ^* и его принадлежность к $\prod_{i=1}^{n} \tilde{\otimes} \mathfrak{H}_i$ очевидны.

Существует такое число C, что $|\Phi (f_1, \ldots, f_n)|^2 \leqslant C^2 \prod_{i=1}^{n} \| f_i \|^2$, поэтому для любых данных $f_1, \ldots, f_{n-1}$ существует $f^0 = f^0 (f_1, \ldots, f_{n-1}) \in \mathfrak{H}_n$ с $\Phi (f_1, \ldots, f_n) = (f^0, f_n)$ и $\| f^0 \| \leqslant C \prod_{i=1}^{n-1} \| f_i \|$ (см [16, с. 94]). Теперь

$$\Phi^* (f_1, \ldots, f_n) = \Phi (f_1, \ldots, A_n^* f_n) = (f^0, A_n^* f_n) = (A_n f^0, f_n).$$

Далее, поскольку A_n ограничен, существует D, для которого $\| A_n f \| \leqslant D \| f \|$. Поэтому мы имеем

$$| \Phi^* (f_1, \ldots, f_n) | = | (A_n f^0, f_n) | \leqslant \| A_n f^0 \| \cdot \| f_n \| \leqslant D \| f^0 \| \cdot \| f_n \| \leqslant CD \prod_{i=1}^{n} \| f_i \|,$$

$$\sum_{t_1, \ldots, t_n = 1}^{\infty} | \Phi^* (\varphi_{1,t_1}, \ldots, \varphi_{n,t_n}) |^2 = \sum_{t_1, \ldots, t_n = 1}^{\infty} | (A_n f^0 (\varphi_{1,t_1}, \ldots, \varphi_{n-1,t_{n-1}}), \varphi_{n,t_n}) |^2 =$$

$$= \sum_{t_1, \ldots, t_{n-1} = 1}^{\infty} \| A_n f^0 (\varphi_{1,t_1}, \ldots, \varphi_{n-1,t_{n-1}}) \|^2 \leqslant D^2 \sum_{t_1, \ldots, t_{n-1} = 1}^{\infty} \| f^0 (\varphi_{1,t_1}, \ldots, \varphi_{n-1,t_{n-1}}) \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant D^2 \sum_{t_1, \ldots, t_n = 1}^{\infty} | (f^0 (\varphi_{1,t_1}, \ldots, \varphi_{n-1,t_{n-1}}), \varphi_{n,t_n}) |^2 =$$

$$= D^2 \sum_{t_1, \ldots, t_n = 1}^{\infty} | \Phi (\varphi_{1,t_1}, \ldots, \varphi_{n,t_n}) |^2.$$

Поэтому из $\Phi \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$ следует, что $\Phi^* \in \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i$, по лемме 2.2.2 и по лемме 2.2.3 $\| \Phi^* \| \leqslant D \| \Phi \|$.

Лемма 2.3.2. *Если определить оператор* $A_i^{(i)}$ *равенством* $A_i^{(i)} \Phi = \Phi^*$ *на основании леммы* 2.3.1, *то* $A_i^{(i)} \in \mathbf{B} \otimes$.

Доказательство. Согласно лемме 2.3.1 $A_i^{(i)}$ всюду определен и линеен, и если мы выберем D є $\| A_i f \| \leqslant D \| f \|$, то по той же лемме $\| A_i^{(i)} \Phi \| \leqslant \leqslant D \| \Phi \|$. Поэтому $A_i^{(i)}$ограничен, а значит, и замкнут.

Лемма 2.3.3. $A_i^{(i)} \prod_{j=1}^n \otimes f_j = \prod_{j=1}^{i-1} \otimes f_j \otimes A_i^{(i)} f_i \otimes \prod_{j=i+1}^n \otimes f_j$.

Доказательство следует немедленно из определения.

Лемма 2.3.4. *Соответствие $A_i \sim A_i^{(i)}$ является (взаимно однозначным) изоморфизмом относительно операций αA_i, A_i^*, $A_i + B_i$ и $A_i B_i$.*

Доказательство. Это очевидно для αA_i и $A_i + B_i$. Для A_i^* и $A_i B_i$ доказательство получается путем применения этих операторов к $\prod_{j=1}^n \otimes f_j$, поскольку пределы линейных комбинаций векторов $\prod_{j=1}^n \otimes f_j$ дают все $\prod_{i=1}^n \otimes \mathfrak{H}_i$. Из $A_i = B_i$ следует, что $A_i^{(i)} = B_i^{(i)}$; в противоположной импликации можно убедиться, снова рассматривая $\prod_{j=1}^n \otimes f_j$.

Определение 2.3.1. *Обозначим через $\mathbf{B}_i^{(i)}$ множество всех $A_i^{(i)}$, получающихся, когда A_i пробегает все $\mathbf{B}_i$.*

Лемма 2.3.5. $\mathbf{B}_i^{(i)} = (\mathbf{B}_j^{(j)}, j \neq i)'$, *т. е.* $\mathbf{B}_i^{(i)}$ *является множеством всех операторов из* $\mathbf{B} \otimes$, *коммутирующих со всеми элементами из всех* $\mathbf{B}_j^{(j)}$ *с* $j \neq i$.

Доказательство. Ясно, что для $j \neq i$ $A_i^{(i)} A_j^{(j)} \Phi = A_j^{(j)} A_i^{(i)} \Phi$, если $\Phi = \prod_{k=1}^n \otimes f_k$. Значит, это верно и для всех $\Phi \in \prod_{k=1}^n \otimes \mathfrak{H}_k$ и $A_j^{(j)}$ коммутирует с $A_i^{(i)}$. Другими словами, $\mathbf{B}_i^{(i)} \subset (\mathbf{B}_j^{(j)}, j \neq i)'$.

Предположим теперь, что $A^0 \in (\mathbf{B}_j^{(j)}, j \neq i)'$. Тогда A^0 коммутирует с любым $A_j^{(j)}$, $j \neq i$.

Введем снова полные ортонормированные системы $\varphi_{j,1}, \varphi_{j,2}, \ldots$ в $\mathfrak{H}_j$, $j = 1, \ldots \ldots, n$. Проекция $P_{[\varphi_{j,t}]}$ (см. [16, с. 74]) принадлежит к $\mathbf{B}_j$ и преобразует $\varphi_{j,n}$ в $\delta_{n,t} \varphi_{j,t}$. Тогда $P_{[\varphi_{j,t}]}^{(j)} \in \mathbf{B}_j^{(j)}$ переводит $\prod_{k=1}^n \otimes \varphi_{k,t_k}$ в $\delta_{t_j,t} \prod_{k=1}^n \otimes \varphi_{k,t_k}$ и это будет снова ортонормированной системой; т. е. $P_{[\varphi_{j,t}]}^{(j)}$ является проектором на $\left[\prod_{k=1}^n \otimes \varphi_{k,t_k};\ t_j = t \right]$ (наименьшее замкнутое линейное множество, содержащее все $\prod_{k=1}^n \otimes \varphi_{k,t_k}$ с $t_j = t$). Далее, A^0 коммутирует с $P_{[\varphi_{j,t}]}^{(j)}$. Поэтому равенство $P_{[\varphi_{j,t}]}^{(j)} \Phi = \Phi$ влечет за собой $P_{[\varphi_{j,t}]}^{(j)} A^0 \Phi = A^0 \Phi$. Это происходит в случае, когда $\Phi = \prod_{k=1}^{i-1} \otimes \varphi_{k,t_k} \otimes f_i \otimes \prod_{k=i+1}^n \otimes \varphi_{k,t_k}$ с $t_j = t$. Значит, разложение $A^0 \Phi$ в ряд по $\prod_{k=1}^n \otimes \varphi_{k,u_k}$ с $u_1, \ldots, u_n = 1, 2, \ldots$ содержит только те члены, у которых $u_j = t_j$. Поскольку это справедливо для любого $j \neq i$, мы имеем

$$A^0 \Phi = \prod_{k=1}^{i-1} \otimes \varphi_{k,t_k} \otimes f_i^* \otimes \prod_{k=i+1}^n \otimes \varphi_{k,t_k}.$$

Таким образом, f_i^* однозначно определяется заданием f_i и t_k с $k \neq i$. Рассмотрение оператора $P_{[\varphi_{j,t} + \varphi_{j,s}]}^{(j)}$ с $j \neq i$, $t \neq s$ показывает, однако, что $t_j = t$ и

$t_j = s$ дают одно и то же. Значит, значение t_j не играет роли. Поэтому $f_i^* = A_i f_i$ для некоторого определенного оператора A_i в $\mathfrak{H}_i$. Ясно, что A_i линеен и определен всюду в $\mathfrak{H}_i$; $\|A^0\Phi\| \leqslant D\|\Phi\|$ влечет за собой $\|A_i f_i\| \leqslant D\|f_i\|$, так что A_i ограничен, а потому и замкнут. Следовательно, $A_i \in \mathbf{B}_i$.

Определение A_i дает: $A^0\Phi = A_i^{(i)}\Phi$ для всех $\Phi = \prod_{i=1}^{n} \otimes \varphi_{i,t_i}$, а потому и для всех Φ вообще. Таким образом, мы получаем $A^0 = A_i^{(i)} \in \mathbf{B}_i^{(i)}$.

Это доказывает, что $\mathbf{B}_i^{(i)} \supset (\mathbf{B}_j^{(j)},\ j \neq i)'$, завершая доказательство равенства $\mathbf{B}_i^{(i)} = (\mathbf{B}_j^{(j)},\ j \neq i)'$.

Лемма 2.3.6. *$\mathbf{B}_i^{(i)}$ — кольцо, содержащее единичный оператор* $\mathbf{1}$.

Доказательство. Это следует из [18, с. 397], ибо $\mathbf{B}_i^{(i)}$ имеет вид S' (лемма 2.3.5).

Лемма 2.3.7. *Пусть S_i — подмножество $\mathbf{B}_i$, а $S_i^{(i)}$ — множество всех $A_i^{(i)}$ для $A_i \in S_i$. Тогда S_i является кольцом, если и только если $S_i^{(i)}$ — кольцо.*

Доказательство. Определим кольцо его характеристиками, установленными в [22, § 3]. Единственные понятия, возникающие там,— это операции αA, A^*, $A + B$, AB и сильнейшая топология, определенная в [22, § 2]. Но все они инвариантны относительно перехода $A_i \sim A_i^{(i)}$: алгебраические операции согласно лемме 2.3.4, а сильнейшая топология согласно [22, § 4]. Кроме того, замыкания в $\mathbf{B}_i^{(i)}$ и в $\mathbf{B}\otimes$ совпадают, ибо по лемме 2.3.6 $\mathbf{B}_i^{(i)}$ — кольцо, значит, оно слабо замкнуто в $\mathbf{B}\otimes$ и a fortiori замкнуто в смысле сильнейшей топологии. Это и завершает доказательство.

Лемма 2.3.8. $\mathbf{R}(\mathbf{B}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{B}_n^{(n)}) = \mathbf{B}\otimes$.

Доказательство. Мы могли бы доказать это с помощью прямой конструкции, но следующее непрямое доказательство короче. Такие же рассмотрения, какие мы проделали при доказательстве леммы 2.3.5 (но теперь без выделенного i), показывают, что

$$(\mathbf{B}_j^{(j)},\ j = 1, \ldots, n)' = (\alpha \mathbf{1}).$$

Поэтому $\mathbf{R}(\mathbf{B}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{B}_n^{(n)})' = (\mathbf{B}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{B}_n^{(n)})' = (\alpha\mathbf{1})$ и, согласно [18, с. 397], $\mathbf{R}(\mathbf{B}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{B}_n^{(n)}) = (\alpha\mathbf{1})' = \mathbf{B}\otimes$.

Мы часто будем использовать цитированную выше теорему 8 из [18, с. 397]: именно, если $\mathbf{M}$ — кольцо, содержащее $\mathbf{1}$, то $\mathbf{M} = \mathbf{M}''$. Поэтому в дальнейшем не будем делать специальных ссылок на нее.

Результаты проведенных рассмотрений могут быть подытожены следующим образом:

Теорема II. *Множества $\mathbf{B}_i^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, из определения* 2.3.1 *являются кольцами, содержащими единицу; $\mathbf{B}_i^{(i)}$ изоморфно $\mathbf{B}_i$. Любые два $\mathbf{B}_i^{(i)}$ коммутируют и $\mathbf{R}(\mathbf{B}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{B}_n^{(n)}) = \mathbf{B}\otimes$.*

Дальнейшие важные свойства приведены в леммах 2.3.5 и 2.3.7.

2.4. Асимметричный аспект случая $n = 2$ играет в дальнейшем важную роль. Образуем $\prod_{i=1}^{2} \otimes \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ и введем (конечную или бесконечную) полную ортонормированную систему в $\mathfrak{H}_1$: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Введем теперь

Определение 2.4.1. *Для* $\Phi \in \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ *образуем* $f^0(\varphi_t) \in \mathfrak{H}_2$, $t = 1, 2, \ldots$ (*см. доказательство леммы* 2.3.1). *Обозначим их через* $f^{(t)}$, $t = 1, 2, \ldots$, *соответственно и будем писать*

$$\Phi \sim \langle f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots \rangle = \langle f^{(t)} \rangle_{t=1,2,\ldots}.$$

Лемма 2.4.1. *Векторы* $f^{(t)}$, $t = 1, 2, \ldots$, *определяют* $\Phi \sim \langle f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots \rangle$ *однозначно. Если размерность* $\mathfrak{H}_1$ *конечна, то* $f^{(t)}$ *можно задать произвольно; если она бесконечна, то единственным ограничением является конечность суммы* $\sum_{t=1}^{\infty} \| f^{(t)} \|^2$.

Если $\Phi \sim \langle f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots \rangle$, $\Psi \sim \langle g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots \rangle$, *то* $(\Phi, \Psi) = \Sigma_t (f^{(t)}, g^{(t)})$. *Ряд, если он вообще не конечен, абсолютно сходится.*

Доказательство. Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots$ — полная ортонормированная система в $\mathfrak{H}_2$; образуем, как в лемме 2.2.2, $\Phi(\varphi_{t_1}, \psi_{t_2}) = (f^{(t_1)}, \psi_{t_2}) = a_{t_1,t_2}$ (Φ однозначно определяется числами a_{t_1,t_2}, а значит, и векторами $f^{(t_1)}$). Для заданных a_{t_1,t_2} Φ существует, если сумма $\sum_{t_1,t_2} |a_{t_1,t_2}|^2 < \infty$; но если a_{t_1,t_2} определены с помощью $f^{(t_1)}: a_{t_1,t_2} = (f^{(t_1)}, \psi_{t_2})$, то $\sum_{t_2} |a_{t_1,t_2}|^2 = \| f^{(t_1)} \|^2$, и мы получаем условие $\sum_{t_1} \|f^{(t_1)}\|^2 < \infty$.

Если размерность $\mathfrak{H}_1$ конечна, то и число номеров t_1 конечно и условие тривиализуется. Если же она бесконечна, мы получаем условие $\sum_{t=1}^{\infty} \| f^{(t_1)} \|^2 < \infty$. Наконец, лемма 2.2.3 дает

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{t_1,t_2} (f^{(t_1)}, \psi_{t_2}) (g^{(t_1)}, \psi_{t_2}) = \sum_{t_1} (f^{(t_1)}, g^{(t_1)})$$

с абсолютно сходящимися суммами.

Операторы в $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ могут быть представлены в простой нормальной форме, в которой участвуют лишь операторы из $\mathfrak{H}_2$:

Определение 2.4.2. *Для оператора* A^0 *из* $\mathbf{B}\otimes$ (*в* $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$) *образуем* $A^0 \langle 0, \ldots, f^{(t)}, 0, \ldots \rangle = \langle f_1^*, f_2^*, \ldots \rangle$ ($f^{(t)}$ *стоит на* t-*м месте*). *Каждый вектор* f_s^* *определяет оператор* $A_{t,s}$ *по правилу* $f_s^* = A_{t,s} f^{(t)}$. *Мы будем писать*

$$A^0 \sim \langle A_{t,s} \rangle_{t,s=1,2,\ldots}.$$

Лемма 2.4.2. *Все* $A_{t,s}$ *принадлежат* $\mathbf{B}_2$ (*для* $\mathfrak{H}_2$), *они однозначно определяют* A^0. *Если размерность* $\mathfrak{H}_1$ *конечна, то* $A_{t,s}$ *можно задавать произвольным образом; это уже не так, если она бесконечна.*

Доказательство. Очевидно, $A_{t,s}$ всюду определены и линейны; A^0 ограничен, поэтому существует такое C, что $\|A^0\Phi\| \leqslant C \|\Phi\|$. Тогда

$$\| A_{t,s} f \|^2 \leqslant \sum_{s'} \|A_{t,s'} f \|^2 = \| A^0 \langle 0, \ldots, 0, f, 0, \ldots \rangle \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant C^2 \| \langle 0, \ldots, 0, f, 0, \ldots \rangle \|^2 = C^2 \| f \|^2; \ \| A_{t,s} f \| \leqslant C \| f \|.$$

Поэтому $A_{t,s}$ также ограничен и замкнут. Из определения 2.4.2 ясно, что $A_{t,s}$

определяют A^0 однозначно на всех $\Phi = \langle 0, ..., 0, f, 0, ...\rangle$, а значит, и на всех Φ.

Если размерность $\mathfrak{H}_1$ конечна, скажем p, то формула в определении 2.4.2, очевидно, определяет оператор A^0, который всюду определен и линеен. Каждый $A_{t,s}$ ограничен, допустим $\| A_{t,s}f \| \leqslant C_{t,s} \| f \|$, значит,

$$A^0 \langle f_1, \dots, f_p \rangle = \langle \sum_{t=1}^{p} A_{t,1}f_t, \dots, \sum_{t=1}^{t} A_{t,p}f_t \rangle;$$

$$\| A^0\Phi \|^2 = \| A^0 \langle f_1, \dots, f_p\rangle \|^2 = \sum_{s=1}^{p} \Big\| \sum_{t=1}^{p} A_{t,s}f_t \Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{p} \cdot p \sum_{t=1}^{t} \| A_{t,s}f_t \|^2 \leqslant \sum_{s=1}^{p} \cdot p \sum_{t=1}^{p} C_{t,s}^2 \| f_t \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \sum_{t=1}^{p} \| f_t \|^2 = C^2 \| \Phi \|^2,$$

где $C^2 = p \max_{t=1,\dots,p} \sum_{s=1}^{p} C_{t,s}^2$ и $\| A^0\Phi \| \leqslant C \| \Phi \|$. Таким образом, A^0 также ограничен и замкнут.

Несложно было бы сформулировать ограничения, возникающие в случае, когда размерность $\mathfrak{H}_1$ бесконечна, но они имеют весьма неявный вид. В самом деле, даже если $\mathfrak{H}_2$ одномерно, они выражают тот факт, что числовая матрица $\langle a_{t,s}\rangle_{t,s=1,2,..}$ ограничена в смысле гильбертовой теории.

Правила вычислений для построенного представления $\langle A_{t,s}\rangle_{t,s=1,2..}$ очень похожи на правила обычной матричной алгебры

Лемма 2.4.3. *Если* $A^0, B^0, C^0 \in \mathbf{B} \otimes$ *и* $A^0 \sim \langle A_{t,s}\rangle_{t,s=1,2,\dots}$, $B^0 \sim \langle B_{t,s}\rangle_{t,s=1,2,\dots}$, $C^0 \sim \langle C_{t,s}\rangle_{t,s=1,2,\dots}$, *то имеют место следующие правила вычислений*:

(i) *если* $C^0 = \alpha A^0$, *то* $C_{t,s} = \alpha A_{t,s}$;

(ii) *если* $C^0 = (A^0)^*$, *то* $C_{t,s} = A_{s,t}^*$;

(iii) *если* $C^0 = A^0 + B^0$, *то* $C_{t,s} = A_{t,s} + B_{t,s}$;

(iv) *если* $C^0 = A^0B^0$, *то* $C_{t,s} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,s}B_{t,n}$. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}$ *сходится в смысле сильной топологии в* $\mathbf{B}_2$ *независимо от порядка, в котором пробегаются* $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Утверждения (i) и (iii) очевидны. Обозначая $\langle 0, \dots, 0, f, 0, \dots\rangle$ (f стоит на t-м месте) через $f^{(t)}$, мы видим, что $(A^0f^{(t)}, g^{(s)}) = (A_{t,s}f, g)$. Поэтому в случае (ii) имеем, с одной стороны, $(C^0f^{(t)}, g^{(s)}) = (C_{t,s}f, g)$, а с другой — $(C^0f^{(t)}, g^{(s)}) = \overline{(A^0g^{(s)}, f^{(t)})} = \overline{(A_{s,t}g, f)} = (A_{s,t}^*f, g)$, что доказывает равенство $C_{t,s} = A_{s,t}^*$.

Рассмотрим, наконец, утверждение (iv). Мы имеем $C^0f^{(t)} = \langle C_{t,s}f\rangle_{s=1,2,\dots}$. С другой стороны, $C^0f^{(t)} = A^0B^0f^{(t)} = A^0 \langle B_{t,n}f^{(t)}\rangle_{n=1,2..} = A^0 \sum_{n=1}^{\infty} (B_{t,n}f)^{(n)}$, где $\sum_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится вне зависимости от порядка, в котором пробегаются $n = 1, 2, \dots$ Поэтому мы имеем (учитывая, что A^0 непрерывен)

$$C^0f^{(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} A^0 (B_{t,n}f)^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A_{n,s}B_{t,n}f\rangle_{s=1,2,\dots} = \langle \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,s}B_{t,n}f\rangle_{s=1,2,\dots}$$

с того же рода сходимостью. Это доказывает, что $C_{t,s} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,s}B_{t,n}$. Исследуем теперь соответствие $A_i \sim A_i^{(i)}$.

Лемма 2.4.4. *Если* $A \in \mathbf{B}_2$, *то* $A^{(2)} \in \mathbf{B} \otimes$ *соответствует* $\langle \delta_{t,s}A\rangle_{t,s=1,2,\dots}$

Доказательство. Очевидно, $\varphi_t \otimes f \sim \langle 0, \dots, 0, f, 0, \dots \rangle$ (f на t-м месте). Поэтому по лемме 2.3.3 $A^{(2)}\langle 0, \dots, 0, f, 0, \dots \rangle = \langle 0, \dots, 0, Af, 0, \dots \rangle$. Таким образом, $A^{(2)}_{t,s} = 0$ при $t \neq s$ и $A^{(2)}_{t,s} = A$ при $t = s$, иными словами, $A_{t,s} = \delta_{t,s}A$.

Лемма 2.4.5. *Если S — множество $\subset \mathbf{B}_2$, то множество $S^{(2)}$ всех $A^{(2)}$ с $A \in S$ состоит из всех $A^0 \sim \langle \delta_{t,s}A \rangle_{t,s=1,2,\dots}$, $A \in S$ (каждый A порождает A^0!); множество $S^{(2)\prime}$ состоит из всех $A^0 \sim \langle A_{t,s} \rangle_{t,s=1,2,\dots}$, $A_{t,s} \in S'$.*

Доказательство. Первое утверждение следует немедленно из леммы 2.4.4, что касается второго, то заметим, что

$$\langle \delta_{t,s}A \rangle \langle A_{t,s} \rangle = \langle AA_{t,s} \rangle, \qquad \langle A_{t,s} \rangle \langle \delta_{t,s}A \rangle = \langle A_{t,s}A \rangle,$$

поэтому $\langle A_{t,s} \rangle$ коммутирует с $A^{(2)} \sim \langle \delta_{t,s}A \rangle$ тогда и только тогда, когда все $A_{t,s}$ коммутируют с A. Более того, $A^{(2)*} = A^{*(2)}$ (по лемме 2.3.4 $\langle (\delta_{s,t}A)^* \rangle = \langle \delta_{t,s}A^* \rangle$). В совокупности эти факты устанавливают эквивалентность $\langle A_{t,s} \rangle \in S^{(2)\prime}$ и $A_{t,s} \in S'$ для всех s, t.

Лемма 2.4.6. *$\mathbf{B}_2^{(2)}$ является множеством всех $A^0 \sim \langle \delta_{t,s}A \rangle_{t,s=1,2,\dots}$, $A \in \mathbf{B}_2$ (каждый $A \in \mathbf{B}_2$ порождает A^0!); $\mathbf{B}_1^{(1)}$ — множество всех $A^0 \sim \langle \alpha_{t,s} \cdot \mathbf{1} \rangle_{t,s=1,2,\dots}$.*

Доказательство следует из леммы 2.4.5, если положить $S = \mathbf{B}_2$ и принять во внимание, что $\mathbf{B}_2^{(2)\prime} = \mathbf{B}_1^{(1)}$ (по лемме 2.3.5).

Во всех приложениях, где будут использованы результаты этого пункта, главным объектом всегда будет $\mathfrak{H}_2$, в то время как $\mathfrak{H}_1$ будет существенно лишь в том смысле, что его размерность может быть явно указана. Если размерность $\mathfrak{H}_1$ равна $N = 1, 2, \dots, \infty$ и если мы пишем $\mathfrak{H}$ вместо $\mathfrak{H}_2$, то для краткости вместо $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ мы будем использовать обозначение $N \otimes \mathfrak{H}$.

Глава III

ФАКТОРИЗАЦИЯ B

3.1. Теперь мы введем два понятия, которые играют центральную роль во всех наших рассуждениях (особенно второе понятие). Рассмотрим пространство $\mathfrak{H}$ и кольцо $\mathbf{B}$ линейных, замкнутых и ограниченных операторов, определенных всюду в $\mathfrak{H}$.

Определение 3.1.1. *Система из n $(= 1, 2, \dots)$ подколец $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n \neq (0)$ кольца $\mathbf{B}$ называется факторизацией, если:*

(i) $\mathbf{M}_i \subset \mathbf{M}_j'$, *т. е. любой элемент $\mathbf{M}_i$ коммутирует с любым элементом из $\mathbf{M}_j$ при $i \neq j$;*

(ii) $\mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n) = \mathbf{B}$.

Определение 3.1.2. *Подкольцо $\mathbf{M}$ кольца $\mathbf{B}$ называется фактором, если $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' = (\alpha \cdot \mathbf{1})$, т. е. центр $\mathbf{M}$ (множество всех тех элементов из $\mathbf{M}$, которые коммутируют с каждым элементом из $\mathbf{M}$) содержит лишь операторы, кратные единичному.*

Связь между этими двумя понятиями дается следующими леммами.

Лемма 3.1.1. *Если $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ — факторизация, то каждое кольцо $\mathbf{M}_i$ является фактором.*

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_i \subset \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbf{M}_j'\right) \cdot \mathbf{M}_i = \prod_{j=1}^{n} \mathbf{M}_j = $$
$$= (\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n)' = (\mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n))' = \mathbf{B}' = (\alpha \cdot \mathbf{1}).$$

Согласно [18, с. 393], $\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_i$ содержит проектор E_0, поэтому $E_0 = \alpha \cdot \mathbf{1}$, т. е. $E_0 = 0$ или $E_0 = \mathbf{1}$. Из $E_0 = 0$ следует, что $\mathbf{M}_i = (0)$ (см. там же: если $A \in \mathbf{M}_i$, то $AE_0 = A$), значит, $E_0 = \mathbf{1}$. Таким образом, $\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_i' = (\alpha \cdot \mathbf{1})$.

Лемма 3.1.2. *$\mathbf{M}$ является фактором, если и только если $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ образуют факторизацию.*

Доказательство. Если $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ — факторизация, то по лемме 3.1.1 $\mathbf{M}$ — фактор. Обратно, если $\mathbf{M}$ — фактор, то $\mathbf{1} \in \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}'$, так что $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' \neq (0)$; далее, $\mathbf{1} \in \mathbf{M} \subset \mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}')$, значит, $\mathbf{M} = \mathbf{M}''$ и $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}') = (\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}'))''$. Теперь $(\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}'))' = (\mathbf{M}, \mathbf{M}')' = \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}'' = \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M} = (\alpha \cdot \mathbf{1})$, т. е. $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}') = (\alpha \cdot \mathbf{1})' = \mathbf{B}$. Наконец, $\mathbf{M}$ коммутирует с $\mathbf{M}'$. Таким образом, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ — факторизация.

Эти леммы доказывают, что если $\mathbf{M}$ — фактор, то $\mathbf{M}'$ — тоже фактор. Если $\mathbf{M}_1$ — фактор, то это — кольцо и $\mathbf{1} \in \mathbf{M}_1$; поэтому $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1''$, так что $\mathbf{M}_1' = \mathbf{M}_2$ влечет за собой $\mathbf{M}_2' = \mathbf{M}_1$. Таким образом, мы можем ввести

Определение 3.1.3. *Если $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ — факторизация, то $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ называются парными факторами в случае, когда $\mathbf{M}_1' = \mathbf{M}_2$ или (что эквивалентно) $\mathbf{M}_2' = \mathbf{M}_1$. Немедленно возникает следующий вопрос.*

Проблема 1. *Каждая ли факторизация $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ состоит из парных факторов?*

Мы увидим, что ответ положителен в некотором специальном случае (см. лемму 3.2.4), но в общем случае отрицателен (см. п. 13.4). Эта проблема представляет некоторый интерес и в случае $n > 2$, ибо если $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ — факторизация, то $\mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_k)$, $\mathbf{R}(\mathbf{M}_{k+1}, \dots, \mathbf{M}_n)$ — тоже факторизация при $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

3.2. Приведем один простой пример факторизации: если $\mathfrak{H} = \prod_{i=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_n$, то $\mathbf{B}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{B}_n^{(n)}$ согласно теореме II образуют факторизацию. Поэтому каждое $\mathbf{B}_i^{(i)}$ является фактором. Это подсказывает следующие определения.

Определение 3.2.1. *Факторизация $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ называется прямой факторизацией, если $\mathfrak{H}$ изоморфно прямому произведению $\mathfrak{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_n$ так, что $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ становятся $\mathbf{B}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{B}_n^{(n)}$ соответственно.*

Определение 3.2.2. *Фактор $\mathbf{M}$ является прямым фактором, если $\mathfrak{H}$ изоморфно прямому произведению $\mathfrak{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_n$ так, что $\mathbf{M}$ превращается в $\mathbf{B}_i^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$.*

Следующие замечания достаточно просты.

Лемма 3.2.1. *В определении 3.2.2 можно ограничиться случаем, когда $n = 2$, $i = 1$ (или в равной мере $i = 2$).*

Доказательство. Леммы 2.2.2 и 2.2.3 показывают, что $\prod_{j=1}^{n} \otimes \mathfrak{H}_j$ изоморфно $\mathfrak{H}_i \otimes \left(\prod_{j=1 (j\neq i)}^{n} \otimes \mathfrak{H}_j\right)$ и $\left(\prod_{j=1 (j\neq i)}^{n} \otimes \mathfrak{H}_j\right) \otimes \mathfrak{H}_i$.

Лемма 3.2.2. *Если* $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$ — *прямая факторизация, то каждый* $\mathbf{M}_i$ — *прямой фактор.*

Доказательство очевидно.

Лемма 3.2.3. $\mathbf{M}$ *является прямым фактором тогда и только тогда, когда* $\mathbf{M}, \mathbf{M}'$ — *прямая факторизация.*

Доказательство. Если $\mathbf{M}, \mathbf{M}'$ — прямая факторизация, то $\mathbf{M}$ по лемме 3.2.2 является прямым фактором. Обратно, если $\mathbf{M}$ — прямой фактор, то благодаря лемме 3.2.1 мы можем считать, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, $\mathbf{M} = \mathbf{B}_1^{(1)}$. Тогда по лемме 2.3.5 $\mathbf{M}' = \mathbf{B}_2^{(2)} = \mathbf{B}_1^{(1)'}$, что и доказывает утверждение.

Леммы 3.2.2 и 3.2.3 являются точными аналогами лемм 3.1.1 и 3.1.2. Теперь мы можем решить проблему 1 для прямых факторов.

Лемма 3.2.4. *Если* $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ — *факторизация и* $\mathbf{M}_1$ *или* $\mathbf{M}_2$ *является прямым фактором, то оба фактора прямые, они являются парными и* $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ — *прямая факторизация.*

Доказательство. Благодаря симметрии мы можем предположить, что прямым фактором является $\mathbf{M}_1$, а потому $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, $\mathbf{M}_1 = \mathbf{B}_1^{(1)}$. Теперь $\mathbf{M}_2 \subset \subset \mathbf{M}_1' = \mathbf{B}_1^{(1)'} = \mathbf{B}_2^{(2)}$. Кроме того, $\mathbf{M}_2' \cdot \mathbf{B}_2^{(2)} = \mathbf{M}_2' \cdot \mathbf{M}_1' = (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)' = (\mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2))' = = (\mathbf{B}\otimes)' = (\alpha \cdot \mathbf{1})$.

Рассмотрим теперь отображение $A_2^{(2)} \leftrightarrow A_2$, действующее из $\mathbf{B}_2^{(2)}$ на $\mathbf{B}_2$ (действующее в $\mathfrak{H}_2$). Оно переводит кольцо $\mathbf{M}_2 \subset \mathbf{B}_2^{(2)}$ в кольцо $\mathbf{N} \subset \mathbf{B}_2$ по лемме 2.3.4 и кольцо $\mathbf{M}_2' \cdot \mathbf{B}_2^{(2)}$ в кольцо $\mathbf{N}'$ по лемме 2.3.7. Таким образом, $\mathbf{N}' = (\alpha \cdot \mathbf{1})$, а значит, $\mathbf{N} = (\alpha \cdot \mathbf{1})' = \mathbf{B}_2$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{B}_2^{(2)}$. Поэтому $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1'$, $\mathbf{M}_1 = \mathbf{B}_1^{(1)}$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{B}_2^{(2)}$, что и доказывает утверждение.

Мы имеем теперь общую картину формальных свойств факторизаций и факторов: общих, прямых и парных. Еще один вопрос, представляющий интерес в этой связи, будет разобран в лемме 5.4.1.

Решающей проблемой теперь является

Проблема 2. *Любая ли факторизация является прямой? Любой ли фактор прямой?*

Мы увидим в пунктах 8.4 и 13.1, что ответ на второй, а значит, (по лемме 3.2.2) и на оба вопроса отрицателен. Поэтому нам придется исследовать и охарактеризовать непрямые факторы.

Глава IV

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

4.1. Следующая теорема имеет некоторый самостоятельный интерес. Поэтому мы докажем ее в общей форме, хотя в большинстве случаев нам понадобится лишь весьма специальное ее следствие.

Теорема III. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *фактор и пусть даны операторы* $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n \in \mathbf{M}$, $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n \in \mathbf{M}'$. *Тогда равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \bar{A}_i = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует такая матрица $(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, *что*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_j = A_i.$$

Доказательство. Условие, очевидно, достаточно. Когда оно выполнено, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}A_iA_j'$ равна нулю, если сначала суммировать по i, и $\sum_{i=1}^{n} A_iA_i'$, если сначала суммировать по j. Для доказательства его необходимости предположим, что $\sum_{i=1}^{n} A_iA_i' = 0$.

Образуем пространство $n \otimes \mathfrak{H}$ всех систем $\langle f_1, \dots f_n\rangle$ из $\mathfrak{H}$ с внутренним произведением

$$(\langle f_1, \dots, f_n\rangle, \langle g_1, \dots, g_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} (f_i, g_i)$$

(см. п. 2.4). Пусть $\overline{\mathfrak{M}}$ будет множеством всех таких $\langle f_1, \dots, f_n\rangle$, для которых $\sum_{i=1}^{n} A_iXf_i = 0$ с любыми $X \in \mathbf{M}$. Очевидно, $\overline{\mathfrak{M}}$ замкнуто и линейно. Пусть $\bar{E}$— проекция на $\overline{\mathfrak{M}}$. Тогда $\bar{E}$ можно записать в виде операторной матрицы $\langle E_{r,s}\rangle_{r,s=1,\dots,n}$.

Предположим теперь, что $\langle f_1, \dots, f_n\rangle \in \overline{\mathfrak{M}}$. Если $X_0 \in \mathbf{M}$, то для любого $X \in \mathbf{M}$ $\sum_{i=1}^{n} A_iXX_0f_i = 0$, поэтому $\langle X_0f_1, \dots, X_0f_n\rangle \in \overline{\mathfrak{M}}$. Если $X_0' \in \mathbf{M}'$, то для любого $X \in \mathbf{M}$ $\sum_{i=1}^{n} A_iXX_0'f_i = X_0'\sum_1^n A_iXf_i = 0$, т. е. $\langle X_0'f_1, \dots, X_0f_n\rangle \in \overline{\mathfrak{M}}$. Таким образом, из $\Phi \in \overline{\mathfrak{M}}$ и $X_0 \in \mathbf{M}$ или $\mathbf{M}'$ следует, что $X_0^{(2)}\Phi \in \overline{\mathfrak{M}}$ для $X_0^{(2)} = \langle \delta_{r,s}X_0\rangle_{r,s=1,\dots,n}$. Поскольку любое $\bar{E}\Phi \in \overline{\mathfrak{M}}$, имеем $X_0^{(2)}\bar{E}\Phi \in \overline{\mathfrak{M}}$, $\bar{E}X_0^{(2)}\bar{E}\Phi = X_0^{(2)}\bar{E}\Phi$, т. е. $\bar{E}X_0^{(2)}\bar{E} = X_0^{(2)}\bar{E}$. Заменяя X_0 на X_0^* и тем самым $X_0^{(2)}$ на $X_2^{*(2)} = X_2^{(2)*}$ и применяя $*$, получаем $\bar{E}X_0^{(2)}\bar{E} = \bar{E}X_0^{(2)}$. Поэтому $X_0^{(2)}\bar{E} = \bar{E}X_0^{(2)}$, или, другими словами, $X_0E_{r,s} = E_{r,s}X_0$. Таким образом, $E_{r,s}$ коммутирует с любым $X_0 \in \mathbf{M}$ или $\mathbf{M}'$, $E_{r,s} \in \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}'' = \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M} = (\alpha \cdot \mathbf{1})$, откуда $E_{r,s} = a_{r,s} \cdot \mathbf{1}$.

Рассмотрим $\langle A_1'f, \dots, A_n'f\rangle$ для произвольного $f \in \mathfrak{H}$. Если $X \in \mathbf{M}$, то $\sum_{i=1}^{n} A_i \times XA_i'f = \sum_{i=1}^{n} A_iA_i'Xf = 0$. Отсюда $\langle A_1'f, \dots, A_n'f\rangle \in \overline{\mathfrak{M}}$, $\bar{E}\langle A_1'f, \dots, A_n'f\rangle = \langle A_1'f, \dots, A_n'f\rangle$, т. е. $A_i'f = \sum_{j=1}^{n} E_{i,j}A_j'f = \sum_1^n a_{i,j}A_j'f$, $A_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_j'$.

Рассмотрим далее $\langle A_1^*f, \dots, A_n^*f\rangle$ для произвольного $f \in \mathfrak{H}$. Выберем затем $\langle f_1, \dots, f_n\rangle \in \overline{\mathfrak{M}}$. Тогда

$$(\langle A_1^*f, \dots, A_n^*f\rangle, \langle f_1, \dots, f_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} (A_i^*f, f_i) = \sum_{i=1}^{n} (f, A_if_i) =$$

$$= \left(f, \sum_{i=1}^{n} A_if_i\right) = 0.$$

Таким образом, $\langle A_1^*f, \dots, A_n^*f\rangle$ ортогонально $\overline{\mathfrak{M}}$, а потому

$$\bar{E}\langle A_1^*f, \dots, A_n^*f\rangle = 0.$$

Это означает, что $0=\sum_{j=1}^{n}E_{i,j}A_j^*f=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}A_j^*f$, $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}A_j^*=0$. Применение * дает $\sum_1^n\bar{a}_{i,j}A_j=0$. $\bar{E}$ эрмитов, что, очевидно, влечет $E_{r,s}^*=E_{s,r}$, $\bar{a}_{r,s}=a_{s,r}$. Поэтому последнее превращается в $\sum_{j=1}^{n}a_{j,i}A_j=0$.

Доказательство окончено.

Следствие. *Для $A\in\mathbf{M}$, $A'\in\mathbf{M}'$ имеем $AA'=0$ тогда и только тогда, когда $A=0$ или $A'=0$.*

Доказательство. Положим $n=1$, $a_{1,1}=\alpha$: $AA'=0$ означает, что $\alpha A=0$, $(1-\alpha)A'=0$; для $\alpha=0$, $\alpha=1$ и $\alpha\neq 0$, 1 отсюда следует, что $A'=0$ или $A=0$ или оба они равны нулю соответственно.

4.2. Введем следующие определения.

Определение 4.2.1. *Пусть $\mathbf{M}$ — кольцо, содержащее 1. Подмножество $\mathfrak{S}$ из $\mathfrak{H}$ или произвольный оператор Z в $\mathfrak{H}$ (не обязательно $\in\mathbf{B}$!) называется присоединенным к кольцу $\mathbf{M}$, символически $\mathfrak{S}\eta\mathbf{M}$* и *соответственно $Z\eta\mathbf{M}$ (мы используем символ η для того, чтобы отличить это отношение от отношения включения $\in$), если они инвариантны относительно любого унитарного $U\in\mathbf{M}'$, т. е. $U\mathfrak{S}=\mathfrak{S}$ и $UZU^{-1}=Z$ соответственно для всех $U\in\mathbf{M}'$.*

Легко установить связь между η и $\in$.

Лемма 4.2.1. *Если $\mathfrak{M}$ — линейное замкнутое множество, то $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ эквивалентно $P_{\mathfrak{M}}\in\mathbf{M}$ (см. [16, с. 74]). Если $Z\in\mathbf{B}$, то $Z\eta\mathbf{M}$ эквивалентно $Z\in\mathbf{M}$.*

Доказательство. $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ означает $UP_{\mathfrak{M}}U^{-1}=P_{U\mathfrak{M}}=P_{\mathfrak{M}}$, $UP_{\mathfrak{M}}=P_{\mathfrak{M}}U$, если U унитарен и $\in\mathbf{M}'$, поэтому $P_{\mathfrak{M}}\eta\mathbf{M}$. Таким образом, достаточно доказать второе утверждение.

Если $Z\in\mathbf{B}$, то $Z\eta\mathbf{M}$ означает $UZ=ZU$ для всех унитарных $U\in\mathbf{M}'$, т. е. для $U\in\mathbf{M}'^U$ (см. [18, с. 392]). Иначе говоря, $Z\in(\mathbf{M}'^U)'=(\mathbf{R}(\mathbf{M}'^U))'=\mathbf{M}''=\mathbf{M}$.

Лемма 4.2.2. *Условия определения 4.2.1 могут быть заменены на $U\mathfrak{S}\subset\mathfrak{S}$ и $UZ\subset ZU$. Последнее означает, что Z коммутирует с U в смысле* [18, с. 404].

Доказательство. Заменяя U на U^{-1} (который тоже унитарен и $\in\mathbf{M}'$, $U^{-1}=U^*$) и домножая слева соответственно с обеих сторон на U, получаем $\mathfrak{S}\subset U\mathfrak{S}$ и $ZU\subset UZ$. Поэтому $U\mathfrak{S}=\mathfrak{S}$ и $UZU^{-1}=Z$, т. е. $UZ=ZU$.

4.3 Теперь мы введем класс операторов, являющийся обобщением класса унитарных операторов.

Определение 4.3.1. *Оператор $U\in\mathbf{B}$ называется частично изометрическим, если он изометрично отображает линейное замкнутое подмножество $\mathfrak{E}$ на другое линейное замкнутое подмножество $\mathfrak{F}$,* а *$\mathfrak{H}-\mathfrak{E}$ отображает в 0. Иначе говоря, $f\in\mathfrak{E}$ влечет за собой $Uf\in\mathfrak{F}$ и $\|Uf\|=\|f\|$, образ U совпадает с $\mathfrak{F}$, $f\in\mathfrak{H}-\mathfrak{E}$ влечет за собой $Uf=0$. $\mathfrak{E}$* и *$\mathfrak{F}$ называются начальным и соответственно конечным множествами U.*

Унитарный оператор U, очевидно, является частично изометрическим с $\mathfrak{H}$ в качестве начального и конечного множества.

Лемма 4.3.1. *$P_{\mathfrak{E}}=U^*U$, $P_{\mathfrak{F}}=UU^*$, U^* — тоже частично изометрический оператор, у которого начальное и конечное множества поменялись мес-*

тами: $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}$; *как отображение* $\mathfrak{F}$ *в* $\mathfrak{E}$, U^* *является обратным к отображению* U *из* $\mathfrak{E}$ *на* $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Если $f, g \in \mathfrak{E}$, то подстановка $h = (f \pm g)/2$, $(f \pm ig)/2$ в $\|Uh\|^2 = \|h\|^2$ дает $(Uf, Ug) = (f, g)$, т. е. $(Uf, Ug) = (P_\mathfrak{E} f, P_\mathfrak{E} g)$ (см. [16, с. 71]). Если f или $g \in \mathfrak{H} - \mathfrak{E}$, последнее равенство остается в силе, ибо обе его части исчезают. Благодаря линейности оно справедливо и для всех f, g. Мы можем его переписать в виде $(U^*Uf, g) = (P_\mathfrak{E} f, g)$. Поэтому $U^*U = P_\mathfrak{E}$. Если бы характер U^* был уже установлен, то подстановка U^* дала бы $UU^* = P_\mathfrak{F}$. Поэтому нам достаточно обсудить лишь вид U^*.

Для $f \in \mathfrak{E}$ $U^*Uf = P_\mathfrak{E} f = f$, так что U^* отображает f в $\mathfrak{E}$ обратно по отношению к U. Поэтому это отображение изометрично на $\mathfrak{F}$. Предположим теперь, что $f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{F}$. Тогда $(f, Ug) = 0$, как только $Ug \in \mathfrak{F}$, но это происходит и для $g \in \mathfrak{E}$, и для $g \in \mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ (тогда $Ug = 0$), а значит, и для всех g. Таким образом, $(U^*f, g) = (f, Ug) = 0$, $U^*f = 0$. Этим завершается доказательство того, что U^* — частично изометрический оператор с начальным и конечным множествами $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{E}$ соответственно, являющийся там обратным к U.

Лемма 4.3.2. *Каждое из следующих четырех условий является характеристическим для частично изометрических операторов*: $UU^*U = U$, $U^*UU^* = U^*$, U^*U *является проектором*, UU^* *является проектором*.

Доказательство. Благодаря симметрии между U и U^* достаточно рассмотреть лишь первое и третье условия. Если $UU^*U = U$, то $U^*UU^*U = U^*U$, $(U^*U)^2 = U^*U$, т. е. U^*U — проектор; поэтому нам достаточно проверить, что первое условие необходимо, а третье — достаточно.

Если U частично изометричен, то всегда $Uf \in \mathfrak{F}$, так что $P_\mathfrak{F} Uf = Uf$, $P_\mathfrak{F} U = U$, но $UU^* = P_\mathfrak{F}$, значит, $UU^*U = U$.

Если U^*U — проектор, положим $U^*U = P_\mathfrak{E}$. При этом для $f \in \mathfrak{E}$ $\|Uf\|^2 = (U^*Uf, f) = (P_\mathfrak{E} f, f) = \|f\|^2$, т. е. U изометричен в $\mathfrak{E}$. Образ $\mathfrak{F}$ пространства $\mathfrak{E}$ поэтому изоморфен $\mathfrak{E}$ и тоже является замкнутым линейным множеством (т. е. линейным и топологически полным пространством). Для $f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ $\|Uf\|^2 = (U^*Uf, f) = (P_\mathfrak{E} f, f) = 0$. Таким образом, U частично изометричен.

Лемма 4.3.3. *Пусть* U_1, U_2, ...— (*конечная или бесконечная*) *последовательность частично изометрических операторов с соответствующими начальными* $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, ... *и конечными* $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ... *пространствами. Пусть, далее,* $\mathfrak{E}_i$ *взаимно ортогональны и* $\mathfrak{F}_i$ *взаимно ортогональны. Тогда сумма* $\sum_i U_i$ *сильно сходится* (*если, вообще, содержит бесконечно много слагаемых*), *является частично изометрическим оператором и ее начальным и конечным множествами являются* $[\mathfrak{E}_i,\ i = 1, 2, \ldots]$ *и* $[\mathfrak{F}_i,\ i = 1, 2, \ldots]$ *соответственно.*

Доказательство. Сильная сходимость $\sum_i U_i$ означает то же самое, что сильная сходимость любой суммы $\sum_i U_i f$. Так как $U_i f \in \mathfrak{F}_i$, слагаемые взаимно ортогональны, поэтому указанная сходимость эквивалентна конечности $\sum_i \|U_i f\|^2$ (см. [16, с. 67]). Далее, $\sum_i \|U_i f\|^2 = \sum_i (U_i^* U_i f, f) = \sum_i (P_{\mathfrak{E}_i} f, f) =$

$= (P_{[\mathfrak{E}_i, i=1,2,\ldots]}f, f)$ и потому конечна. Заменяя U_i на U_i^*, мы видим, что $\sum_i U_i^*$ тоже сильно сходится.

Тогда $\left(\sum_i U_i^*\right)' \sum_i U_i\right) = \sum_i U_i^* \sum_i U_i = \sum_{i\,j} U_i^* U_j$. Если $i \neq j$, то $U_j f \in \mathfrak{F}_j \subset \mathfrak{H} - \mathfrak{F}_i$, $U_i^* U_j f = 0$, $U_i^* U_j = 0$. Таким образом наша сумма равняется $\sum_i U_i^* U_i = \sum_i P_{\mathfrak{E}_i} = P_{[\mathfrak{E}_i, i=1,2,\ldots]}$. Поэтому $\sum_i U_i$ согласно лемме 4. 3. 2 является частично изометрическим оператором и его начальное множество по лемме 4. 3.1 суть $[\mathfrak{E}_i, i = 1, 2, \ldots]$. Заменяя U_i на U_i^*, мы видим, что конечным множеством является $[\mathfrak{F}_i, i = 1, 2, \ldots]$.

4.4. Во всех наших дальнейших рассуждениях важную роль играет одна конструкция, описанная в [21, с. 307, теорема 7]. Эта теорема приложима ко всем линейным замкнутым операторам A со всюду плотной областью определения и приводит к некоторым операторам, из которых мы будем рассматривать два B и W. Оператор B самосопряжен и знакоопределен, W, очевидно, частично изометричен; его начальным и конечным множествами являются

$$[\mathrm{Range}\, B] = \mathfrak{H} - (f; Bf = 0) = \mathfrak{H} - (f, Af = 0) = [\mathrm{Range}\, A^*]$$

и

$$\mathfrak{H} - (f, A^*f = 0) = [\mathrm{Range}\, A]$$

соответственно. Имеем

$$A = WB, \qquad A^* = BW^*, \qquad B^2 = A^*A$$

(см. там же).

Введем такое

Определение 4.4.1. *Если A линеен, замкнут и имеет всюду плотную область определения, то описанные выше B и W образуют его каноническое разложение.*

Нас интересует связь между кольцами и каноническим разложением.

Лемма 4.4.1. *Если $\mathbf{M}$ — кольцо, содержащее $\mathbf{1}$, $A \eta \mathbf{M}$ и W, B — каноническое разложение A, то $W \in \mathbf{M}$, $B \eta \mathbf{M}$.*

Доказательство. Операторы W и B однозначно определяются следующими своими свойствами: B самосопряжен и знакоопределен; $B^2 = A^*A$; $A = WB$; из $Bf = 0$ следует, что $Wf = 0$. В самом деле, первые два свойства определяют B (см. [21, с. 303]), а два последних определяют W на образе B и на $(f, Bf = 0)$, а значит, и на

$$[[\mathrm{Range}\, B], (f, Bf = 0)] = [\mathfrak{H} - (f, Af = 0), (f, Af = 0)] = \mathfrak{H},$$

т. е. они полностью определяют W.

Теперь если U унитарен и W, B — каноническое разложение A, то UWU^{-1}, UBU^{-1} — каноническое разложение UAU^{-1}. Поэтому $UAU^{-1} = A$ влечет за собой $UWU^{-1} = W$, $UBU^{-1} = B$. Если $A \eta \mathbf{M}$, то пусть U пробегает $\mathbf{M}'$, это дает $W, B \eta \mathbf{M}$. Так как $W \in \mathbf{B}$, мы имеем даже $W \in \mathbf{M}$.

Глава V

ПРЯМЫЕ ФАКТОРЫ. ИЗОМОРФИЗМЫ КОЛЕЦ

5.1. Введем

Определение 5.1.1. *Если* $\mathbf{M}$ — *кольцо, содержащее* 1, *обозначим* $[Af, A\in\mathbf{M}']$ *через* $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$, *а* $P_{\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}}$ — *через* $E_f^{\mathbf{M}'}$.

Лемма 5.1.1. $f\in\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\eta\mathbf{M}$; *для любых* $f\in\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *имеем* $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\subset\mathfrak{M}$.

Доказательство. Подстановка $A=1$ дает $f\in\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$. Если $U\in\mathbf{M}'$, то $U(Af, A\in\mathbf{M}')=(UAf, A\in\mathbf{M}')\subset(Bf, B\in\mathbf{M}')$, т. е. $U\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\subset\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$. Поэтому $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\eta\mathbf{M}$ (по лемме 4.2.2). Обратно, предположим, что $f\in\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, и рассмотрим те A, для которых Af и $A^*f\in\mathfrak{M}$ для всех $f\in\mathfrak{M}$. Ясно, что они образуют кольцо (используется сильная топология, см., например, [22, § 3]), содержащее все унитарные $U\in\mathbf{M}'$, т. е. все $\mathbf{M}'^{U}$. Поэтому оно содержит все $\mathbf{R}(\mathbf{M}'^{U})=\mathbf{M}'$ (см. [18, с. 392]), откуда

$$(Af, A\in\mathbf{M}')\subset\mathfrak{M},\qquad [Af, A\in\mathbf{M}']\subset\mathfrak{M},\quad \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\subset\mathfrak{M}.$$

Определение 5.1.2. $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *минимально* (*относительно* $\mathbf{M}$), *если* $\mathfrak{M}\neq(0)$ *и* $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ *влечет за собой* $\mathfrak{N}=(0)$ *или* $\mathfrak{M}$. *Заменяя* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *на* $E=P_{\mathfrak{M}}$ *и* $F=P_{\mathfrak{N}}$, *мы можем сказать* (*см. лемму* 4.2.1 *и* [16, с. 76]), *что проектор* $E\in\mathbf{M}$ *минимален* (*относительно* $\mathbf{M}$), *если* $E\neq 0$, *и для любого проектора* $F\in\mathbf{M}$ *неравенство* $F\leqslant E$ *влечет за собой* $F=0$ *или* $F=E$.

Лемма 5.1.2. $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *минимально тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}\neq(0)$ *и для любого* $f\in\mathfrak{M}$, $f\neq 0$ $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}=\mathfrak{M}$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ минимально. Тогда $\mathfrak{M}\neq(0)$. Если $f\in\mathfrak{M}$, $f\neq 0$, то $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\eta\mathbf{M}$, поскольку $f\in\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\neq(0)$, а так как $f\in\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\subset\mathfrak{M}$. Значит, по условию $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}=\mathfrak{M}$.

Обратно, предположим, что наше условие выполнено. Если $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, то или $\mathfrak{N}=(0)$, или существует $f\in\mathfrak{N}$, $f\neq 0$. Тогда $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\subset\mathfrak{N}$, но так как $f\in\mathfrak{M}$, $f\neq 0$, то $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}=\mathfrak{M}$, поскольку $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$.

Лемма 5.1.3. *Если* $\mathbf{M}$—*фактор, то* $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ *минимально тогда и только тогда, когда* $f\neq 0$ *и* $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}=(\alpha f)$.

Доказательство. Пусть сначала $f\neq 0$ и $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}=(\alpha f)$. Предположим, что $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ не минимально. Поскольку $f\neq 0$, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\neq(0)$, должно существовать $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$ с $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$, $\mathfrak{N}\neq(0)$, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$. Положим $\mathfrak{P}=\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}-\mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}$ ортогональны, оба $\subset\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ и оба $\neq(0)$.

Поэтому для $F=P_{\mathfrak{N}}$, $G=P_{\mathfrak{P}}$ имеем $F, G\in\mathbf{M}$, $FG=0$, $F, G\neq 0$. Поскольку $E_f^{\mathbf{M}}=P_{\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}}\in\mathbf{M}'$, а также не равно нулю, следствие теоремы III дает нам $P_{\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}}=F\cdot P_{\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}}\neq 0$, $P_{\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}}=GP_{\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}}\neq 0$. Таким образом, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}\cdot\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ оба $\neq(0)$. Но они $\subset\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}=(\alpha f)$ и, значит, оба совпадают с (αf). Поэтому $f\in\mathfrak{N}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ и $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ и a fortiori $f\in\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}$. Так как $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}$ ортогональны, отсюда следует равенство $f=0$, что противоречит предположениям.

Обратно, предположим, что $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ минимально. Так как $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} \neq (0)$, мы во всяком случае имеем $f \neq 0$.

Положим $E = P_{\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}}$, $E' = P_{\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}}$. Так как $E \in \mathbf{M}$, $E' \in \mathbf{M}'$, то E и E' коммутируют, поэтому E-образ $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ совпадает с $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$. Отсюда (напомним, что $Ef = f$!). $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} \cdot \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}} = [EAf, A \in \mathbf{M}] = [EAEf, A \in \mathbf{M}] = [Bf, B \in \overline{\mathbf{M}}]$, где $\overline{\mathbf{M}}$ — множество всех $B \in \mathbf{M}$ с $EB = BE = B$. Очевидно, $\overline{\mathbf{M}}$ — кольцо, так что $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{R}(\overline{\mathbf{M}}^P)$ (см. [18, с. 392]). Далее, $F' \in \overline{\mathbf{M}}^P$ означает, что F' — проектор и $\in \overline{\mathbf{M}}$, так что $EF' = F'E = F'$, $F' \in \mathbf{M}$. Значит, $F' \in \mathbf{M}$, $F' \leqslant E$, а так как E минимален, то $F' = 0$ или E. Отсюда $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{R}(0, E) = (\alpha E)$. Поэтому $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}} = [Bf, B \in (\alpha E)] = [\alpha Ef] = [\alpha f] = (\alpha f)$.

Лемма. 5.1.4. *Если $\mathbf{M}$ — фактор, то $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ минимально (относительно $\mathbf{M}$) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ минимально (относительно $\mathbf{M}'$).*

Доказательство. Критерий леммы 5.1.3, очевидно, симметричен относительно $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$, ибо $\mathbf{M} = \mathbf{M}''$.

Определение 5.1.3. *Вектор $f \neq 0$ является минимальным (относительно $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$), если его $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ или, что эквивалентно, его $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ минимально.*

Лемма 5.1.5. *Если $\mathbf{M}$ — фактор и f минимален, то любой $g \neq 0$, $g \in \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ или $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ минимален.*

Доказательство. По условию $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ минимально, а так как $g \neq 0$, $g \in \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ с помощью леммы 5.1.2 влечет равенство $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} = \mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}'}$, то g также минимален. Из соображений симметрии то же самое верно и для $g \neq 0$, $g \in \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$.

5.2. Существуют несколько видов изоморфизмов колец. Они определяются следующим образом.

Определение 5.2.1 *Пусть $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$ и $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}$ — два пространства, $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{II}}$ — их операторные кольца, $\mathbf{M}_{\mathrm{I}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{M}_{\mathrm{II}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{II}}$ — кольца в $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ и соответственно в $\mathbf{B}_{\mathrm{II}}$, содержащие* 1. *Если V — произвольное множество операций и свойств, определенных в $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{II}}$, то $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{M}_{\mathrm{II}}$ называются V-изоморфными как кольца, если существует взаимно однозначное отображение $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}$ на $\mathbf{M}_{\mathrm{II}}$, оставляющее инвариантными операции и свойства из V.*

Если $V = (\alpha A, A^*, A + B, AB$, сильное замыкание), мы говорим о полном изоморфизме, если $V = (\alpha A, A^*, A + B, AB)$ — об алгебраическом изоморфизме.

Ясно, что любой изоморфизм пространств $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}$ порождает полные изоморфизмы (в частности, изоморфизм между $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{B}_{\mathrm{II}}$). Но по-настоящему интересные случаи — это такие изоморфизмы между $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{M}_{\mathrm{II}}$, которые не порождаются пространственными изоморфизмами.

Поскольку наши методы инвариантны по отношению к пространствам $\mathfrak{H}$, все понятия, которые мы уже рассмотрели, инвариантны относительно пространственных изоморфизмов Но с изоморфизмами колец дело обстоит иначе. Например, операция $\mathbf{M}'$ не инвариантна даже относительно полных изоморфизмов колец. (Пусть $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$ и $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}$ — два конечномерных евклидовых пространства разных размерностей. Положим $\mathbf{M}_{\mathrm{I}} = \mathbf{M}_{\mathrm{II}} = (\alpha \cdot \mathbf{1})$, тогда $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}' = \mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{M}_{\mathrm{II}}' = \mathbf{B}_{\mathrm{II}}$, так что $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{M}_{\mathrm{II}}$ полностью изоморфны как кольца, в то время как $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}'$ и

$\mathbf{M}'_{II}$ — нет). Поэтому важно показать, что некоторые фундаментальные понятия инвариантны относительно определенных видов изоморфизмов колец.

Лемма 5.2.1. *Любой* (A^*, AB)*-изоморфизм колец оставляет инвариантными такие понятия: быть равным* 0, *быть равным* **1**, *быть проектором, быть частично изометрическим; коммутировать для двух операторов;* $F \leqslant E$ *для двух проекций* E, F; *быть минимальным для проектора.*

Доказательство. Равенство $A = 0$ означает $AX = A$ для всех $X \in \mathbf{M}_I$; $A = \mathbf{1}$ означает $AX = X$ для всех $X \in \mathbf{M}_I$; A — проектор, если $A^* = A$ и $AA = A$; A — частично изометрический оператор, если $AA^*A = A$; коммутативность означает $AB = BA$; $F \leqslant E$ означает $EF = F$; минимальность может быть описана как комбинация предыдущих утверждений.

Лемма 5.2.2. *Любой* (αA, A^*, AB)*-изоморфизм колец оставляет инвариантным понятие фактора (относящегося к кольцам* $\mathbf{M}_I$, $\mathbf{M}_{II}$).

Доказательство. Так как рассматриваемые кольца $\mathbf{M}$ содержат $\mathbf{1}$, то из того, что кольцо $\mathbf{M}$ является фактором, следует $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}' = (\alpha\cdot\mathbf{1})$, т. е. если $A \in \mathbf{M}$ — такой элемент, что для любого $B \in \mathbf{M}$ $AB = BA$, то $A = \alpha\cdot\mathbf{1}$. Первая половина инвариантна относительно (A^*, AB)-изоморфизмов колец, равно как и $\mathbf{1}$ (см. лемму 5.2.1), в то время как равенство $A = \alpha\cdot\mathbf{1}$ инвариантно относительно (αA)-изоморфизмов колец.

5.3. Мы можем теперь привести простой критерий для прямых факторов.

Лемма 5.3.1. *Для фактора* $\mathbf{M}$ *следующие три условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{M}$ *содержит минимальный проектор* E (*относительно* $\mathbf{M}$);

(ii) $\mathbf{M}'$ *содержит минимальный проектор* E' (*относительно* $\mathbf{M}'$);

(iii) *существует минимальный вектор* $f \in \mathfrak{H}$ (*относительно* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$).

Доказательство. Условие (iii) влечет за собой (i), (i) влечет за собой (iii) по лемме 5.1.2. Аналогичным образом эквивалентны (ii) и (iii).

Лемма 5.3.2. *Условия леммы* 5.3.1 *выполнены для любого прямого фактора* $\mathbf{M}$.

Доказательство. Если $\mathbf{M}$ — прямой фактор в кольце $\mathbf{B}$ пространства $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}$ изоморфно $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, так что $\mathbf{M}$ превращается в $\mathbf{B}_1^{(1)}$. Кольцо $\mathbf{B}_1^{(1)}$ алгебраически (и даже полностью) изоморфно кольцу $\mathbf{B}_1$ пространства $\mathfrak{H}_1$ по лемме 2.3.4 (соответственно [22, § 4]), а условия леммы 5.3.1 в форме (i) согласно лемме 5.2.1 инвариантны относительно алгебраических изоморфизмов колец. Поэтому достаточно рассмотреть $\mathbf{B}_1$ в $\mathfrak{H}_1$. Если теперь φ — любой элемент из $\mathfrak{H}_1$, отличный от 0, то $P_{[\varphi]} \in \mathbf{B}_1$ и, очевидно, минимален.

Перейдем к обсуждению достаточности этих условий.

Лемма 5.3.3. *Если фактор* $\mathbf{M}$ *удовлетворяет условиям леммы* 5.3.1, *то любое* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M} \neq (0)$ *содержит минимальный вектор* f с $\|f\| = 1$.

Доказательство. Пусть f^0 — минимальный вектор и, конечно, $f^0 \neq 0$. Поэтому $E^{\mathbf{M}}_{f^0} \neq 0$, кроме того, $E^{\mathbf{M}}_{f^0} \in \mathbf{M}'$. Далее, $P_{\mathfrak{M}} \neq 0$, $P_{\mathfrak{M}} \in \mathbf{M}$, поэтому согласно следствию теоремы III

$$P_{\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f^0}\cdot\mathfrak{M}} = P_{\mathfrak{M}}\cdot E^{\mathbf{M}}_{f^0} \neq 0, \quad \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f^0}\cdot\mathfrak{M} \neq (0).$$

Таким образом, найдется $f \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f^0}\cdot\mathfrak{M}$ с $f \neq 0$; домножая его на $1/\|f\|$, получаем $\|f\| = 1$. Поскольку $f \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f^0}$, $f \neq 0$, вектор f минимален по лемме 5.1.5, кроме того, $f \in \mathfrak{M}$.

Лемма 5.3.4. *Если фактор* **M** *удовлетворяет условиям леммы* 5.3.1, *то существует такая ортонормированная система* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, *что*:

(i) *каждый* φ_n *минимален*;

(ii) $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_1}, \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_2}, \ldots$ *взаимно ортогональны*;

(iii) $[\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_1}, \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_2}, \ldots] = \mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть Ω — первое несчетное ординальное число Кантора. Определим для всех $\alpha < \Omega$ векторы φ_α следующим образом: если $\alpha < \Omega$ и все φ_β, $\beta < \alpha$, уже определены, образуем $\mathfrak{H} - [\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_\beta}, \beta < \alpha]$. Поскольку это пространство, очевидно, $\eta \mathbf{M}$, оно будет содержать минимальный вектор f с $\|f\| = 1$, если только оно $\neq (0)$. Положим тогда φ_α равным одному из таких f; в противном случае φ_α (и все φ_γ с $\gamma \geqslant \alpha$) не определен.

Пусть первое α, для которого φ_α не определен, равно $\bar\alpha \leqslant \Omega$. Если $\bar\alpha < \Omega$, мы должны иметь $\mathfrak{H} - [\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_\beta}, \beta < \bar\alpha] = 0$, $[\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_\beta}, \beta < \bar\alpha] = \mathfrak{H}$. Рассмотрим теперь все φ_α, $\alpha < \bar\alpha$. Всегда $\|\varphi_\alpha\| = 1$. Взяв $\alpha, \beta < \bar\alpha$, предположим, что $\alpha > \beta$. Тогда $A', B' \in \mathbf{M}'$ влечет за собой $A'^*B' \in \mathbf{M}'$, $A'^*B'\varphi_\beta \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_\beta}$ ортогонально φ_α, поэтому $B'\varphi_\beta$ ортогонально $A'\varphi_\alpha$, так как $(A'^*B'\varphi_\beta, \varphi_\alpha) = (B'\varphi_\beta, A'\varphi_\alpha)$. Таким образом, $(A'\varphi_\alpha, A' \in \mathbf{M}')$ ортогонально к $(B'\varphi_\beta, B' \in \mathbf{M}')$, а $[A'\varphi_\alpha, A' \in \mathbf{M}']$ — к $[B'\varphi_\beta, B' \in \mathbf{M}']$, значит, $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_\alpha}$ — к $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_\beta}$. Это соотношение симметрично относительно α и β, а потому выполняется и при $\alpha < \beta$, т. е. всегда, когда $\alpha \neq \beta$.

Таким образом, φ_α, φ_β ортогональны при $\alpha \neq \beta$, т. е. φ_α, $\alpha < \bar\alpha$, образуют ортогональное нормированное множество. Поэтому оно должно быть конечно или счетно (см. [16, с. 66]), что исключает $\bar\alpha = \Omega$. Значит, $\bar\alpha < \Omega$ и $[\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_\alpha}, \alpha < \bar\alpha] = \mathfrak{H}$.

Если $\bar\alpha$ конечно, $\mathfrak{H} \neq (0)$ исключает случай $\bar\alpha = 1$, поэтому $\bar\alpha = n + 1$, $n = 1, 2, \ldots$, и α пробегает $1, \ldots, n$. Если $\bar\alpha$ бесконечно, то $\alpha < \bar\alpha$ имеет тот же алеф, что и $\alpha < \omega$, и поэтому может быть (переиндексацией φ_α) заменено на ω, поэтому мы можем считать, что α пробегает ряд $1, 2, \ldots$

Это завершает доказательство.

Лемма 5.3.5. *Если фактор* **M** *удовлетворяет условиям леммы* 5.3.1, *то существует такое полное ортонормированное семейство* $f_{m,n}$, $m = 1, 2, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$ (*оба индекса* m *и* n *могут пробегать конечное или бесконечное множество значений*), *что*:

i) *каждый вектор* $f_{m,n}$ *минимален*;

ii) $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{f_{m,n}} = [f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]$, $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f_{m,n}} = [f_{1,n}, f_{2,n}, \ldots]$.

Доказательство. Если мы заменим **M** на **M'**, условие i) леммы 5.3.1 перейдет в ii), поэтому **M'** тоже удовлетворяет ему. Прилагая лемму 5.3.4 к **M** и **M'**, мы получим, таким образом, две ортонормированные системы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots$ Так как $E^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} \in \mathbf{M}$ и $\neq 0$, $E^{\mathbf{M}}_{\psi_n} \in \mathbf{M}'$ и $\neq 0$, согласно следствию из теоремы III имеем

$$P_{\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} \cdot \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\psi_n}} = E^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} E^{\mathbf{M}}_{\psi_n} \neq 0, \quad \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} \cdot \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\psi_n} \neq (0).$$

Выберем теперь $f_{m,n} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} \cdot \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\psi_n}$, отличный от 0; домножение его на $1/\|f_{m,n}\|$ даст нам $\|f_{m,n}\| = 1$.

Если $m \neq p$, то $f_{m,n} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m}$, $f_{p,q} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_p}$, если $n \neq q$, то $f_{m,n} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\psi_n}$, $f_{p,q} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\psi_q}$ и в любом из этих случаев $(f_{m,n}, f_{p,q}) = 0$. Поэтому $f_{m,n}$ образуют ортонормированную систему.

Далее, $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m}$ минимально, $f_{m,n}$ принадлежит ему и не равен нулю, поэтому согласно лемме 5.1.5 $f_{m,n}$ тоже минимален и $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} = \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{f_{m,n}}$. Аналогичным образом $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\psi_n} = \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f_{m,n}}$. Так как $f_{m,n}$ минимален, лемма 5.1.3 дает $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{f_{m,n}} \cdot \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f_{m,n}} = (\alpha f_{m,n})$, т. е.

$$\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} \cdot \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\psi_n} = (\alpha f_{m,n}).$$

Отсюда

$$\sum_{m,n} P_{[f_{m,n}]} = \sum_{m,n} E^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} E^{\mathbf{M}}_{\psi_n} = \sum_m E^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} \cdot \sum_n E^{\mathbf{M}}_{\psi_n} = 1 \cdot 1 = 1,$$

значит, ортонормированная система $f_{m,n}$ полна.

Итак $f_{m,n} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{f_{m,n}} = \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m}$ и при $p \neq m$ $f_{p,n} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_p}$ ортогонально $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m}$. Это доказывает, что $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_m} = [f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]$. Аналогично $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\psi_n} = [f_{1,n}, f_{2,n}, \ldots]$.

Таким образом, обе части нашей леммы доказаны.

Лемма 5.3.6. *Если фактор* $\mathbf{M}$ *удовлетворяет условиям леммы* 5.3.1, *то мы можем выбрать векторы* $f_{m,n}$ *из леммы* 5.3.5 *так, чтобы выполнялось следующее условие*:

Существует единственный частично изометрический оператор $U \in \mathbf{M}$ *с начальным и конечным множествами* $[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]$ *и* $[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]$ *соответственно, для которого* $Uf_{m,n} = f_{p,n}$, $Uf_{r,n} = 0$ *при* $r \neq m$. *Обозначим его через* $U_{m,p}$.

Если оператор $A \in \mathbf{M}$ *удовлетворяет равенствам* $P_{[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]} A = AP_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]} = A$, *то* $A = \alpha U_{m,p}$.

Доказательство. Пусть сначала $A \in M$, $P_{[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]} A = AP_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]} = A$ и то же самое верно для B. Тогда применение * дает

$$P_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]} B^* = B^* P_{[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]} = B^*,$$

$$P_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]} B^* A = B^* A P_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]} = B^* A$$

Далее, $B^* A \in \mathbf{M}$ и $P_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]} = E^{\mathbf{M}}_{f_{m,n}}$ минимален относительно $\mathbf{M}$, поэтому рассуждения, приведенные в конце доказательства леммы 5.1.3, дают $B^* A = \beta P_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]}$. Пусть сначала $A = B$, тогда $B^* B = \beta_1 P_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]}$. Поскольку левая сторона эрмитова и неотрицательно определена, $\beta_1 \geqslant 0$ Если $B \neq 0$, то и $\beta_1 \neq 0$, и мы имеем

$$((\beta_1)^{-1/2} B^*)((\beta_1)^{-1/2} B) = P_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]}.$$

Таким образом, $(\beta_1)^{-1/2} B$ — частично изометрический оператор с начальным множеством $[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]$ (см. леммы 4.3.1 и 4.3.2). Заменяя B на B^*, мы переставляем m и p, так что $(\beta_2)^{-1/2} B^*$ тоже частично изометричен с начальным множеством $[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]$, а $(\beta_2)^{-1/2} B$ — с конечным множеством $[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]$. Поскольку оба оператора $(\beta_1)^{-1/2} B$ и $(\beta_2)^{-1/2} B$ частично изометричны, мы имеем $|(\beta_1)^{-1/2}| = |(\beta_2)^{-1/2}|$, т. е. $\beta_1 = \beta_2$. Итак, $(\beta_1)^{-1/2} B$ имеет начальное $[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]$ и конечное $[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]$ множества.

Вернемся теперь к паре A, B. Если $B \neq 0$, то мы имеем

$$A = P_{[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]} A = (1/\beta_1) BB^* A = (\beta/\beta_1) BP_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]} = (\beta/\beta_1) B.$$

Отсюда видно, что или $B = 0$, или $A = \alpha B$.

Рассмотрим теперь $f_{m,n}$ и $f_{p,n}$. Поскольку $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f_{m,n}} = [f_{1,n}, f_{2,n}, \ldots]$, мы имеем $f_{p,n} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f_{m,n}}$. Поэтому существует $A \in \mathbf{M}$ с $\| f_{p,n} - Af_{m,n} \| < 1$. A fortiori

$$\| P_{[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]} f_{p,n} - P_{[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]} Af_{m,n} \| < 1$$

или, учитывая, что

$$P_{[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]} f_{p,n} = f_{p,n}, \quad P_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]} f_{m,n} = f_{m,n},$$

получаем $\| f_{p,n} - A_0 f_{m,n} \| < 1$, где $A_0 = P_{[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]} AP_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]}$. Из того, что мы доказали выше, следует, что $A_0 = 0$ или $A_0 = \beta_0 U$, где $\beta_0 \neq 0$, а U — частично изометрический оператор с начальным $[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]$ и конечным $[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]$ множествами. Теперь из $\| f_{p,n} \| = 1$ следует, что $A_0 f_{m,n} \neq 0$, так что имеет место последняя альтернатива.

Так как $A_0 \in \mathbf{M}$, $A_0 f_{m,n} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f_{m,n}} = \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f_{p,n}}$, а поскольку $A_0 = P_{[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]} A_0$, то $A_0 f_{m,n} \in [f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots] = \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f_{p,n}}$. Таким образом,

$$A_0 f_{m,n} \in \mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{f_{p,n}} \cdot \mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{f_{p,n}} = (\alpha f_{p,n}), \qquad A_0 f_{m,n} = \alpha_0 f_{p,n}, \quad Uf_{m,n} = (\alpha_0/\beta_0) f_{p,n}.$$

Так как $\| f_{m,n} \| = \| f_{p,n} \| = 1$ и $f_{m,n}$ является начальным множеством U, мы имеем $|\alpha_0/\beta_0| = 1$. Замена U на $(\alpha_0/\beta_0) U$, не меняя прочих свойств U, дает $Uf_{m,n} = f_{p,n}$. Отсюда мы имеем

$$P_{[f_{p,1}, f_{p,} \ldots]} U = UP_{[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]} = U, \qquad Uf_{m,n} = f_{p,n}.$$

Поскольку U зависит от m, n и p, напишем $U = U^{(n)}_{m,p}$. Первое уравнение определяет его с точностью до постоянного сомножителя, второе уравнение делает этот сомножитель равным 1. Сравнивая $U^{(n)}_{m,p}$ с $U^{(q)}_{m,p}$, мы видим, что первое уравнение снова заставляет их совпадать с точностью до постоянного сомножителя.

$$U^{(n)}_{m,p} = \theta^{(n,q)}_{m,p} U^{(q)}_{m,p},$$

и $\theta^{(n,q)}_{m,p}$, очевидно, имеет абсолютную величину, равную 1. С другой стороны, свойство единственности дает $U^{(n)}_{m,p} \cdot U^{(n)}_{p,q} = U^{(n)}_{m,q}$.

Заменим каждый вектор $f_{p,q}$ с $p \neq 1$ на $\theta^{(1,q)}_{1,p} f_{p,q}$. Это делает каждое $\theta^{(1,q)}_{1,p} = 1$. Далее, очевидно, $\theta^{(1,n)}_{1,p} \theta^{(n,q)}_{1,p} = \theta^{(1,q)}_{1,p}$, поэтому $\theta^{(n,q)}_{1,p} = 1$. Более того, легко видеть, что $\theta^{(n,p)}_{1,m} \theta^{(n,q)}_{m,p} = \theta^{(n,q)}_{1,p}$ и поэтому $\theta^{(n,q)}_{m,p} = 1$ Таким образом, $U^{(n)}_{m,p}$ не зависит от n, $U^{(n)}_{m,p} = U_{m,p}$

Оператор $U_{m,p}$ частично изометричен, его начальным и конечным множествами являются $[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]$ и $[f_{p,1}, f_{p,2}, \ldots]$ соответственно, и $U_{m,p} f_{m,n} = f_{p,n}$. Если $r \neq m$, то $f_{r,n}$ ортогонален $[f_{m,1}, f_{m,2}, \ldots]$, поэтому $U_{m,p} f_{r,n} = 0$. Оператор $U_{m,p}$ однозначно определяется этими свойствами, потому что уже были определены $U^{(n)}_{m,p}$.

Таким образом, мы доказали первое утверждение нашей леммы. Второе получается из нашего результата относительно A, B в начале этого доказательства после замены A, B на A, $U_{m,p}$.

Лемма 5.3.7. *Если фактор* $\mathbf{M}$ *удовлетворяет условиям леммы* 5.3.1, *то для* $U_{m,p}$ *из леммы* 5.3.6 *мы имеем* $\mathbf{M} = \mathbf{R}(U_{m,p}, m, p = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Так как все $U_{m,p}\in\mathbf{M}$, имеем $\mathbf{R}(U_{m,p},\ m,\ p=1,\ 2,\ \ldots)\subset\mathbf{M}$. Предположим теперь обратное, что $A\in\mathbf{M}$. Положим $A_{m,p}=P_{[f_{p,1},f_{p,2},\ldots]}AP_{[f_{m,1},f_{m,2},\ldots]}$ Тогда $A_{m,p}\in\mathbf{M}$, $P_{[f_{p,1},f_{p,2},\ldots]}A_{m,p}=A_{m,p}P_{[f_{m,1},f_{m,2},\ldots]}=A_{m,p}$, так что по лемме 5.3.6 $A_{m,p}=\alpha_{m,p}U_{m,p}$. Таким образом, $A_{m,p}\in\mathbf{R}[U_{m',p'},\ m',\ p'=1,\ 2,\ \ldots]$. Но

$$\sum_{m,p}A_{m,p}=\sum_{m,p}P_{[f_{p,1},f_{p,2},\ldots]}AP_{[f_{m,1},f_{m,2},\ldots]}=$$
$$=\left(\sum_p P_{[f_{p,1},f_{p,2},\ldots]}\right)A\left(\sum_m P_{[f_{m,1},f_{m,2},\ldots]}\right)=1\cdot A\cdot 1=A.$$

Эти суммы сходятся сильно, если они бесконечны (см. [16, с. 77—78]), так что $A\in\mathbf{R}(U_{m',p'},\ m',\ p'=1,\ 2,\ \ldots)$. Последнее равенство верно для любого $A\in\mathbf{M}$, поэтому

$$\mathbf{M}\subset\mathbf{R}(U_{m,p},\ m,\ p=1,\ 2,\ \ldots).$$

Итак, мы доказали, что $\mathbf{M}=\mathbf{R}(U_{m,p},\ m,\ p=1,\ 2,\ \ldots)$.

Лемма 5.3.8. *Если фактор* $\mathbf{M}$ *удовлетворяет условиям леммы* 5.3.1, *то он является прямым фактором.*

Доказательство. Рассмотрим $f_{m,n}$ и $U_{m,p}$ из леммы 5.3.7, где m и p пробегают одно и то же конечное или бесконечное множество, а n — другое, также конечное или бесконечное. Возьмем два пространства $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ с размерностями, равными числу элементов в множествах всех m и всех n соответственно; и пусть φ_m^0, $m=1,\ 2,\ \ldots$, и ψ_n^0, $n=1,\ 2,\ \ldots$, будут полными ортонормированными системами в $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно. Тогда $\varphi_m^0\otimes\psi_n^0$, $m=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n=1,\ 2,\ \ldots$, — такая же система в $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$. Если $\varphi_m^0\otimes\psi_n^0$ мы поставим в соответствие $f_{m,n}$, то получим изоморфизм $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}$.

Определим в $\mathfrak{H}_1$ оператор $V_{m,p}$ из формул

$$V_{m,p}\varphi_m^0=\varphi_p^0,\quad V_{m,p}\varphi_r^0=0\qquad\text{если } r\neq m.$$

Тогда (см лемму 2.3.3)

$$V_{m,p}^{(1)}\varphi_m^0\otimes\psi_r^0=\varphi_p^0\otimes\psi_r^0,$$
$$V_{m,p}^{(1)}\varphi_r^0\otimes\psi_r^0=0\qquad\text{при } r\neq m.$$

Поэтому указанный выше изоморфизм пространств $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}$ преобразует $V_{m,p}^{(1)}$ в $U_{m,p}$, а следовательно, и $\mathbf{R}(V_{m,p}^{(1)},\ m,\ p=1,\ 2,\ \ldots)$ в $\mathbf{R}(U_{m,p},\ m,\ p=1,\ 2,\ \ldots)=\mathbf{M}$.

Рассмотрим теперь любой $A_1\in\mathbf{B}_1$. Тогда

$$P_{[\varphi_p^0]}A_1P_{[\varphi_m^0]}=(A_1\varphi_m^0,\ \varphi_p^0)V_{m,p}=\alpha_{m,p}V_{m,p}.$$

Поэтому $P_{[\varphi_p^0]}A_1P_{[\varphi_m^0]}\in\mathbf{R}(V_{m',p'},\ m',\ p'=1,\ 2,\ \ldots)$. Но

$$\sum_{m,p}P_{[\varphi_p^0]}A_1P_{[\varphi_m^0]}=\left(\sum_p P_{[\varphi_p^0]}\right)A_1\left(\sum_m P_{[\varphi_m^0]}\right)=1\cdot A_1\cdot 1=A_1$$

(если суммы бесконечны, они сильно сходятся), таким образом,

$$A_1\in\mathbf{R}(V_{m,p},\ m,\ p=1,\ 2,\ \ldots).$$

Итак, $\mathbf{R}(V_{m,p},\ m,\ p=1,\ 2,\ \ldots)=\mathbf{B}_1$. Теперь леммы 2.3.6 и 2.3.7 дают нам $\mathbf{R}(V_{m,p}^{(1)},\ m,\ p=1,\ 2,\ \ldots)=\mathbf{B}_1^{(1)}$. Таким образом, наш изоморфизм переводит $\mathbf{B}_1^{(1)}$ в $\mathbf{M}$, доказывая, что $\mathbf{M}$ — прямой фактор.

Результаты лемм 5.3.1, 5.3.2 и 5.3.8 вместе составляют теорему IV.

Теорема IV. *Фактор* $\mathbf{M}$ *является прямым, если и только если он удовлетворяет (эквивалентным) условиям леммы* 5.3.1.

Условие (i) леммы 5.3.1 дает вместе с леммами 5.2.1 и 5.2.2 теорему V.

Теорема V. *Каждый алгебраический изоморфизм колец оставляет инвариантными понятия фактора и прямого фактора (прилагаемые к кольцам* $\mathbf{M}_{\mathrm{I}}$ *и* $\mathbf{M}_{\mathrm{II}}$ *как таковым).*

5.4. Теорема V дает возможность доказать следующую лемму, которую естественно отнести к п. 3.2.

Лемма 5.4.1. *Если* $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ — *факторизация и по крайней мере* $n-1$ *из ее факторов* $\mathbf{M}_i$ *прямые, то и вся факторизация прямая.*

Доказательство. Для $n=1$, $\mathbf{R}(\mathbf{M}_1)=\mathbf{B}$ означает $\mathbf{M}_1=\mathbf{B}$, поэтому $\mathbf{M}_1$ — прямой фактор; положим $\mathfrak{H}_1$ одномерным пространством, $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}$, тогда результаты п. 2.4 показывают, что $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}$, $\mathbf{B}_2^{(2)}=\mathbf{B}_2=\mathbf{B}=\mathbf{M}_1$. Таким образом со случаем $n=1$ вопрос ясен и нам остается доказать лемму для $n=2, 3, \ldots$, если она уже установлена для $n-1$.

Существует i, для которого все $\mathbf{M}_j$ с $j\neq i$ являются прямыми факторами. Поскольку перестановки всех $\mathbf{M}_j$ не играют роли, мы можем считать, что это $i\neq 1$, т. е. $\mathbf{M}_1$ — прямой фактор.

Тогда $\mathfrak{H}$ изоморфно $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$, так что $\mathbf{M}_1$ переводится в $\mathbf{B}_1^{(1)}$. Пусть $\mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ переходят при этом в $\mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{N}_n$. Если $j\neq 1$, то $\mathbf{M}_j\subset\mathbf{M}_1'$, так что $\mathbf{N}_j\subset(\mathbf{B}_1^{(1)})'=\mathbf{B}_2^{(2)}$. Соответствие $A^{(2)}\rightarrow A$ отображает поэтому $\mathbf{N}_j$ на кольца $\mathbf{N}_j^0\subset\mathbf{B}_2$ (см. лемму 2.3.7). Все $\mathbf{N}_j$ алгебраически (даже полностью) изоморфны как кольца соответствующим $\mathbf{N}_j^0$ (см. лемму 2.4.4, соответственно [22, § 4]). Далее, все $\mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ являются факторами, причем хотя бы $n-2$ из них прямые, значит, то же самое верно и для $\mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{N}_n$ и по теореме V для $\mathbf{N}_2^0, \ldots, \mathbf{N}_n^0$.

Поскольку $\mathbf{N}_j$ и $\mathbf{N}_k$ коммутируют, $\mathbf{N}_2^0, \ldots, \mathbf{N}_n^0$ тоже коммутируют, так как согласно лемме 2.3.7 $\mathbf{R}(\mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{N}_n)=\mathbf{B}_2^{(2)}$ и $\mathbf{R}(\mathbf{N}_2^0, \ldots, \mathbf{N}_n^0)=\mathbf{B}_2$. Таким образом, $\mathbf{N}_2^0, \ldots, \mathbf{N}_n^0$ — факторизация в $\mathbf{B}_2$ пространства $\mathfrak{H}_2$.

Для $n-1$ применение нашей леммы дает: $\mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{N}_n$ — прямая факторизация в $\mathbf{B}_2$ пространства $\mathfrak{H}_2$. Поэтому $\mathfrak{H}_2$ изоморфно $\mathfrak{H}_2^*\otimes\ldots\otimes\mathfrak{H}_n^*$, а $\mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{N}_n$ превращаются в $\mathbf{B}_2^{*(2)}, \ldots, \mathbf{B}_n^{*(n)}$ соответственно.

Теперь очевидно, что $\mathfrak{H}$ изоморфно $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2^*\otimes\ldots\otimes\mathfrak{H}_n^*$, причем $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ переходят в $\mathbf{B}_1^{(1)}, \mathbf{B}_2^{*(2)}, \ldots, \mathbf{B}_n^{*(n)}$ соответственно (последние $n-1$ из них должны рассматриваться теперь в произведении $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2^*\otimes\ldots\otimes\mathfrak{H}_n^*$!). Поэтому $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$ является прямой факторизацией.

Отметим, что теперь лемма 3.2.2 гласит, что все $\mathbf{M}_i$ — прямые факторы. Заметим далее, что наша лемма не стала бы очевидной, даже если было известно, что все n факторов $\mathbf{M}_i$ прямые. Число $n-1$ не может быть заменено в нашей лемме на $n-2$: в таком случае для любого фактора $\mathbf{M}$ факторизация $\mathbf{M}, \mathbf{M}'$ ($n=2$) была бы прямой, так что и фактор $\mathbf{M}$ был бы прямым; значит, по нашей лемме любая факторизация была бы прямой. При этом ответ на обе части проблемы 2 в конце п. 3.2 был бы положительным, что на самом деле неверно (см. там и пункты 8.4 и 13.2).

Часть II
ОБЩАЯ ЗАДАЧА

Глава VI
ОТНОСИТЕЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

6.1. В дальнейшем **M** всегда будет обозначать фактор в кольце **B** пространства $\mathfrak{H}$. При этом **M**′ — тоже фактор.

Определение 6.1.1. *Мы будем писать* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ (... **M**) *и для* $E = P_{\mathfrak{M}}$, $F = P_{\mathfrak{N}}$, $E \sim F$ (... **M**), *если существует частично изометрический оператор* $U \in$ **M**, *начальное и конечное множества которого суть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *соответственно. (Если это не приводит к недоразумениям, мы будем опускать* (... **M**).) *В этом случае мы говорим, что* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *имеют одинаковую относительную размерность (относительно* **M**).

При обсуждении понятия $\sim$ мы всегда можем выбирать, говорить ли нам о замкнутых линейных множествах $\mathfrak{M}$ или об отвечающих им проекторах $E = P_{\mathfrak{M}}$. Будем по большей части пользоваться первым вариантом определения, памятуя, однако, об эквивалентности обоих вариантов.

Лемма 6.1.1. *Из* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ *следует, что* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \eta$ **M**. *Если* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P} \eta$ **M**, *то мы имеем*:

$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$;

$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ *влечет за собой* $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$;

$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$ *влечет за собой* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$.

Доказательство. Если U — частично изометрический оператор из определения 6.1.1, то $P_{\mathfrak{M}} = U^*U \in$ **M**, $P_{\mathfrak{N}} = UU^* \in$ **M**, так что $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \eta$ **M**.

Соотношение $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$ получается, если положить $U = P_{\mathfrak{M}}$; $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ дает $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$ после замены U на U^*; $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ с U и $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$ с V дают $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$ с $V \cdot U$.

Таким образом, $\sim$ естественно применимо к замкнутым линейным множествам $\mathfrak{M} \eta$ **M** и обладает свойствами эквивалентности. Мы можем сказать, что два линейных замкнутых множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, инвариантных относительно всех унитарных элементов из **M**′, имеют одинаковую размерность в обычном смысле слова, если существует изометрическое отображение U из $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$, являющееся частично изометрическим оператором U с начальным $\mathfrak{M}$ и конечным $\mathfrak{N}$ множествами. Относительные же их размерности совпадают, только если и само отображение U может быть выбрано так, чтобы быть инвариантным относительно действия всех унитарных операторов из **M**′ (см. определение 4.2.1 и лемму 4.2.1).

Теперь докажем две леммы, первая из которых описывает свойства аддитивности нашего $\sim$, в то время как вторая является аналогом «теоремы об эквивалентности» Кантора — Бернштейна из общей теории множеств. (Фактически это специальный случай обобщения Куратовского — Тарского этой теоремы.)

Лемма 6.1.2. *Пусть* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ *и* $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots$ — *две (конечные или бесконечные) последовательности одинаковой длины; пусть, далее,* $\mathfrak{M}_i$ *взаимно ортогональны и* $\mathfrak{N}_i$ *взаимно ортогональны. Если для всех* i $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{N}_i$, *то* $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots] \sim [\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots]$.

Доказательство. Пусть $U_i \in \mathbf{M}$ — частично изометрическое отображение $\mathfrak{M}_i$ на $\mathfrak{N}_i$. Тогда $U = \Sigma_i U_i$ по лемме 4.3.3 дает желаемое отображение $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]$ на $[\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots]$.

Лемма 6.1.3. *Если* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, *то* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.

Доказательство. Из наших соотношений следует, что $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{N}, \mathfrak{N}' \eta \mathbf{M}$. Пусть теперь U — частично изометрическое отображение $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{M}'$; оно отображает $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ на какое-то $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$. Тогда рассмотрение $UP_{\mathfrak{N}'}$ доказывает, что $\mathfrak{N}' \sim \mathfrak{M}''$ и, следовательно, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}''$.

Пусть $V \in \mathbf{M}$ — частично изометрическое отображение $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}''$. Образуем для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ образы V^n пространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ и назовем их $\mathfrak{M}^{(2n)}$ и $\mathfrak{M}^{(2n+1)}$ соответственно ($\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$ совпадают соответственно с $\mathfrak{M}^{(0)}, \mathfrak{M}^{(1)}$ и $\mathfrak{M}^{(2)}$). Мы имеем $\mathfrak{M}^{(0)} \supset \mathfrak{M}^{(1)} \supset \mathfrak{M}^{(2)}$, поэтому (применив V^n!) $\mathfrak{M}^{(2n)} \supset \mathfrak{M}^{(2n+1)} \supset \supset \mathfrak{M}^{(2n+2)}$, так что $\mathfrak{M}^{(0)} \supset \mathfrak{M}^{(1)} \supset \mathfrak{M}^{(2)} \supset \ldots$

Оператор V^n частично изометричен с начальным $\mathfrak{M}^{(0)}$ и конечным $\mathfrak{M}^{(2n)}$ множествами, а $V^n P_{\mathfrak{M}^{(1)}}$—с $\mathfrak{M}^{(1)}$ и $\mathfrak{M}^{(2n+1)}$ соответственно. Поэтому все $\mathfrak{M}^{(p)} \eta \mathbf{M}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, и $\mathfrak{M}^{(0)} \sim \mathfrak{M}^{(2n)}$, $\mathfrak{M}^{(1)} \sim \mathfrak{M}^{(2n+1)}$, т. е. $\mathfrak{M}^{(p)} \sim \mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}'$, если p четно и соответственно нечетно

Напомним, что V отображает $\mathfrak{M}^{(p)}$ на $\mathfrak{M}^{(p+2)}$, а $\mathfrak{M}^{(p+1)}$ — на $\mathfrak{M}^{(p+3)}$, а потому $\mathfrak{M}^{(p)} - \mathfrak{M}^{(p+1)}$ — на $\mathfrak{M}^{(p+2)} - \mathfrak{M}^{(p+3)}$. Использование $V(P_{\mathfrak{M}^{(p)}} - P_{\mathfrak{M}^{(p+1)}})$ при этом показывает, что $\mathfrak{M}^{(p)} - \mathfrak{M}^{(p+1)} \sim \mathfrak{M}^{(p+2)} - \mathfrak{M}^{(p+3)}$. Применим теперь лемму 6.1.2 к последовательностям $\mathfrak{M}^{(0)} \cdot \mathfrak{M}^{(1)} \cdot \mathfrak{M}^{(2)} \cdot \ldots$, $\mathfrak{M}^{(0)} - \mathfrak{M}^{(1)}$, $\mathfrak{M}^{(1)} - \mathfrak{M}^{(2)}$, $\mathfrak{M}^{(2)} - \mathfrak{M}^{(3)}$, $\mathfrak{M}^{(3)} - \mathfrak{M}^{(4)}, \ldots$ и $\mathfrak{M}^{(0)} \cdot \mathfrak{M}^{(1)} \cdot \mathfrak{M}^{(2)} \cdot \ldots$, $\mathfrak{M}^{(2)} - \mathfrak{M}^{(3)}$, $\mathfrak{M}^{(1)} - \mathfrak{M}^{(2)}$, $\mathfrak{M}^{(4)} - \mathfrak{M}^{(5)}$, $\mathfrak{M}^{(3)} - \mathfrak{M}^{(4)}, \ldots$ Она даст нам $\mathfrak{M}^{(0)} \sim \mathfrak{M}^{(1)}$, т. е. $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$, а тем самым и $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.

6.2. Следующая лемма дает важное средство для установления равенства относительных размерностей.

Лемма 6.2.1. *Если X — замкнутый линейный оператор со всюду плотной областью определения и* $X \eta \mathbf{M}$, *то*

$$[\mathrm{Range}\, X] \sim [\mathrm{Range}\, X^*].$$

Доказательство. Образуем каноническое разложение X в смысле определения 4.4.1. Согласно лемме 4.4.1 $X \eta \mathbf{M}$ влечет за собой, что $W \eta \mathbf{M}$, W частично изометричен, его начальное множество суть $[\mathrm{Range}\, X^*]$, а конечное — $[\mathrm{Range}\, X]$. Поэтому

$$[\mathrm{Range}\, X^*] \sim [\mathrm{Range}\, X], \quad [\mathrm{Range}\, X] \sim [\mathrm{Range}\, X^*].$$

Теперь мы в два этапа докажем аналог «теоремы сравнения» из общей теории множеств.

Лемма 6.2.2. *Если* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \eta \mathbf{M}$ и $\neq (0)$, *то существуют два пространства* $\mathfrak{P}$ *и* $\mathfrak{Q} \neq 0$, $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}$, *для которых* $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$.

Доказательство. Выберем $f \in \mathfrak{M}$, $f \neq 0$. Тогда $E_f^{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}'$ и $\neq 0$, $P_{\mathfrak{N}} \in \mathbf{M} \neq 0$, поэтому согласно следствию из теоремы III $P_{\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}} \cdot \mathfrak{N}} = P_{\mathfrak{N}} \cdot E_f^{\mathbf{M}} \neq 0$, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}} \cdot \mathfrak{N} \neq (0)$. Выберем $g \in \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}} \cdot \mathfrak{N}$, $g \neq 0$, домножая его на $1/\|g\|$, получим $\|g\| = 1$. Так как $g \in \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$, найдется $A \in \mathbf{M}$ с $\|g - Af\| < 1$. Тогда $\|P_{\mathfrak{N}} g - P_{\mathfrak{N}} Af\| < 1$. Теперь из $P_{\mathfrak{N}} g = g$, $P_{\mathfrak{M}} f = f$ следует, что $\|g - P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}} f\| < 1$. Поскольку $\|g\| < 1$, это означает, что $P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}} f \neq 0$ и $P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}} \neq 0$.

Применим теперь лемму 6.2.1: $[\mathrm{Range}\, P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}}] \sim [\mathrm{Range}\, (P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}})^*]$. Так как $P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}} \neq 0$, то и $(P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}})^* \neq 0$, значит, оба эти множества $\neq 0$. Более того,

$$[\mathrm{Range}\, P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}}] \subset [\mathrm{Range}\, P_{\mathfrak{N}}] = \mathfrak{N},$$

$$[\mathrm{Range}\, (P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}})^*] = [\mathrm{Range}\, P_{\mathfrak{M}} A^* P_{\mathfrak{N}}] \subset [\mathrm{Range}\, P_{\mathfrak{M}}] = \mathfrak{M}.$$

Поэтому $\mathfrak{P} = [\mathrm{Range}\,(P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}})]$ и $\mathfrak{Q} = [\mathrm{Range}\,(P_{\mathfrak{M}} A^* P_{\mathfrak{N}})]$ удовлетворяют нашим требованиям.

Лемма 6.2.3. *Если* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \eta \mathbf{M}$, *то или* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, *или* $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть Ω — первое несчетное ординальное число Кантора. Для любого $\alpha < \Omega$ определим пару $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\alpha$ следующим образом: все $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\alpha$ будут линейными замкнутыми множествами $\eta \mathbf{M}$, $\neq (0)$ и $\mathfrak{M}_\alpha \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_\alpha \subset \mathfrak{N}$. Если $\alpha < \Omega$ и все $\mathfrak{M}_\beta$, $\mathfrak{N}_\beta$ с $\beta < \alpha$ уже определены, то образуем $\mathfrak{M} - [\mathfrak{M}_\beta, \beta < \alpha]$ и $\mathfrak{N} - [\mathfrak{N}_\beta, \beta < \alpha]$. Так как $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{M}_\beta, \mathfrak{N}_\beta \eta \mathbf{M}$, то и эти два множества тоже $\eta \mathbf{M}$. Если оба они $\neq (0)$, то существуют два множества $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \neq (0)$ с $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M} - [\mathfrak{M}_\beta, \beta < \alpha]$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N} - [\mathfrak{N}_\beta, \beta < \alpha]$, $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$. Пусть $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}_\alpha = \mathfrak{Q}$ для какой-нибудь пары таких $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$. Как мы видим, $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\alpha \neq (0)$, $\mathfrak{M}_\alpha \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_\alpha \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_\alpha \sim \mathfrak{N}_\alpha$. Если же предыдущее условие не выполнено, то пусть $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\alpha$ (и все $\mathfrak{M}_\gamma$, $\mathfrak{N}_\gamma$ с $\gamma \geqslant \alpha$) останутся не определенными.

Пусть $\bar{\alpha} \leqslant \Omega$ — первое из чисел α, для которых $\mathfrak{M}_\alpha$ или $\mathfrak{N}_\alpha$ не определено. Если $\bar{\alpha} < \Omega$, мы имеем $\mathfrak{M} - [\mathfrak{M}_\alpha, \alpha < \bar{\alpha}] = (0)$ или $\mathfrak{N} - [\mathfrak{N}_\alpha, \alpha < \bar{\alpha}] = (0)$. Рассмотрим теперь все $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\alpha$ с $\alpha < \bar{\alpha}$ сегда $\mathfrak{M}_\alpha \neq (0)$. Если $\alpha, \beta < \bar{\alpha}$, предположим, что $\alpha > \beta$. Тогда $\mathfrak{M}_\alpha \subset \mathfrak{M} - [\mathfrak{M}_{\beta'}, \beta' < \alpha]$, так что $\mathfrak{M}_\alpha$ ортогонально $\mathfrak{M}_\beta$. Это соотношение симметрично относительно α и β, так что выполнено и при $\alpha < \beta$, т. е. всегда, когда $\alpha \neq \beta$. Таким образом, все $\mathfrak{M}_\alpha$ с $\alpha < \bar{\alpha}$ отличны от (0) и взаимно ортогональны. То же самое, конечно, верно и для $\mathfrak{N}_\alpha$ с $\alpha < \bar{\alpha}$.

Выберем $f_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$, $f_\alpha \neq 0$, и домножим его на $1/\|f_\alpha\|$, чтобы иметь $\|f_\alpha\| = 1$. Тогда f_α, $\alpha < \bar{\alpha}$ образуют ортонормированную систему. Поэтому их множество должно быть конечно или счетно (см. [16, с. 66), что исключает $\bar{\alpha} = \Omega$.

Если $\bar{\alpha}$ конечно, то $\bar{\alpha} = n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и α пробегают числа $1, \ldots, n$. Если $\bar{\alpha}$ бесконечно, то $\alpha < \bar{\alpha}$ имеет тот же алеф, что и $\alpha < \omega$, и может (путем переиндексации) быть им заменено; поэтому мы можем считать, что α пробегает ряд чисел $1, 2, \ldots$

Записывая i вместо α, мы видим, что получается конечная или бесконечная последовательность пар $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\mathfrak{M}_i$ взаимно орогональны, $\mathfrak{N}_i$ взаимно ортогональны, $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{N}_i$ и или $[\mathfrak{M}_i, i = 1, 2, \ldots] = \mathfrak{M}$, или $[\mathfrak{N}_i, i = 1, 2, \ldots] = \mathfrak{N}$. Далее, лемма 6.1.2 гласит, что $[\mathfrak{M}_i, i = 1, 2, \ldots] \sim [\mathfrak{N}_i, i = 1, 2, \ldots]$. Поэтому если мы положим $\mathfrak{N}' = [\mathfrak{N}_i, i = 1, 2, \ldots]$ и $\mathfrak{M}' = [\mathfrak{M}_i, i = 1, 2, \ldots]$, то получим соответственно $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ или $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, что и требовалось доказать.

6.3. Определение 6.3.1. *Мы пишем* $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$ *или* $\mathfrak{N} \succsim \mathfrak{M}$, *если* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$. *Мы пишем* $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ *или* $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, *если* $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$, *но не* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$. (*См. определение* 6.1.1 *относительно замены* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *на* $E = P_{\mathfrak{M}}$ *и* $F = P_{\mathfrak{N}}$ *и поясняющего символа* (... $\mathbf{M}$).)

И мы можем доказать следующее.

Лемма 6.3.1. *Если* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}\eta\mathbf{M}$, *то справедливы такие утверждения:*

(i) $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$ *означает, что* $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ *или* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$;

(ii) *если* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{Q}$, *то* $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ *эквивалентно* $\mathfrak{P} \prec \mathfrak{Q}$;

(iii) *всегда выполнено одно и только одно из трех соотношений* $\mathfrak{M} \lesseqgtr \mathfrak{N}$;

(iv) $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{P}$ *влечет за собой* $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{P}$.

Доказательство. Докажем утверждения в несколько измененном порядке.

Утверждение (i) очевидно.

Утверждение (iv): $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \precsim \mathfrak{P}$ означает, что $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$. Если $U \in \mathbf{M}$ — изометрическое отображение $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{P}'$ и $\mathfrak{P}''$ — U-образ $\mathfrak{N}'$, то мы имеем $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \sim \mathfrak{P}'' \subset \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, так что $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{P}$.

Если бы при этом было $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$, то мы могли бы написать $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{P} \precsim \mathfrak{M}$, что вместе с $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$ дает $\mathfrak{P} \precsim \mathfrak{N}$. По лемме 6.1.3 $\mathfrak{N} \precsim \mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P} \precsim \mathfrak{N}$ вместе означают, что $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$, что противоречит $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{P}$. Поэтому $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{P}$.

Утверждение (ii) : предположим, что $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{Q}$, мы можем написать $\mathfrak{P} \precsim \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \precsim \mathfrak{Q}$, откуда следует, что $\mathfrak{P} \precsim \mathfrak{Q}$ (см. начало доказательства (iv)). Из $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$ следовало бы, что $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ в противоречии с $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Поэтому мы должны иметь $\mathfrak{P} \prec \mathfrak{Q}$. Подобным же образом из $\mathfrak{P} \prec \mathfrak{Q}$ следует, что $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$

Утверждение (iii) : по лемме 6.2.3 мы имеем $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$ или $\mathfrak{N} \precsim \mathfrak{M}$, согласно (i) это означает, что $\mathfrak{M} \lesseqgtr \mathfrak{N}$. Отношение $\sim$ одновременно с $\succ$ благодаря (ii) дает $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{M}$; $\prec$ и $\sim$ вместе дают то же самое; $\succ$ и $\prec$ в силу утверждения (iv) опять-таки приводят к $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}$. Но $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}$ невозможно, ибо $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$. Поэтому имеет место только одно из трех соотношений.

Подытоживая леммы 6.1.1 и 6.3.1, мы имеем

Теорема VI. *Понятия* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ (*т. е.* $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$) *для* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$ (*см. определения* 6.1.1 *и* 6.3.1) *обладают свойствами отношений эквивалентности и полной упорядоченности.*

Прочие важные их свойства приведены в леммах 6.1.2 и 6.3.1.

Некоторые немедленные следствия.

Лемма 6.3.2. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$. *Тогда имеем*

(i) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ *влечет за собой* $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$;

(ii) *всегда* $(0) \precsim \mathfrak{M} \precsim \mathfrak{H}$;

(iii) $\mathfrak{M} \sim (0)$ *означает, что* $\mathfrak{M} = (0)$.

Доказательство. Утверждение (i): запишем $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

Утверждение (ii) : из $(0) \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ и (i);

Утверждение (iii) : $\mathfrak{M}$ является образом (0) относительно некоторого линейного U, так что $\mathfrak{M} = (0)$.

Глава VII

КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

7.1. Мы продолжаем двигаться по пути, знакомому нам из общей теории множеств.

Определение 7.1.1. *Подпространство* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *конечно, если из* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ *следует* $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$; *в противном случае оно бесконечно.* (*См. определение*

6.1.1. *относительно замены* $\mathfrak{M}$ *на* $E = P_{\mathfrak{M}}$ *и поясняющего символа* (... **M**).)

Некоторые непосредственные следствия:

Лемма 7.1.1. *Пусть* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, *тогда имеем:*

(i) *если* $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{M}$ *бесконечно, то и* $\mathfrak{N}$ *бесконечно; если* $\mathfrak{N}$ *конечно, то и* $\mathfrak{M}$ *конечно;*

(ii) (0) *конечно;*

(iii) *если бесконечные* $\mathfrak{M}$ *вообще существуют, то* $\mathfrak{H}$ *бесконечно.*

Доказательство. Утверждение (i): вторая часть утверждения следует из первой, поэтому рассмотрим только первую. Поскольку $\mathfrak{M}$ бесконечно, найдется такое $\mathfrak{P}$, что $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P} \subsetneqq \mathfrak{M}$. Тогда $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N} - \mathfrak{M}] \sim [\mathfrak{P}, \mathfrak{N} - \mathfrak{M}] \subsetneqq [\mathfrak{M}, \mathfrak{N} - \mathfrak{M}]$, $\mathfrak{N} \sim [\mathfrak{P}, \mathfrak{N} - \mathfrak{M}] \subsetneqq \mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{N}$ тоже бесконечно

Утверждение (ii): $\mathfrak{N} \subset (0)$ уже само по себе означает, что $\mathfrak{N} = (0)$.

Утверждение (iii): если $\mathfrak{M}$ бесконечно, то из $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{H}$ и (i) сразу же следует, что и $\mathfrak{H}$ бесконечно.

Теперь начнем подготовку к количественному сравнению множеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$

Лемма 7.1.2. *Пусть* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M} \neq (0)$. *Тогда существует конечная или бесконечная последовательность* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ (*ее длина может оказаться равной* 0) *и такое* $\mathfrak{D}$, *что имеем* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{D}$ — *взаимно ортогональные линейные замкнутые множества — все* $\eta\mathbf{M}$:

$$[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{D}] = \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}_2 \sim \ldots, \mathfrak{D} \prec \mathfrak{M},$$

причем, если последовательность бесконечна, можно считать, что $\mathfrak{D} = (0)$.

Доказательство. Пусть Ω — первое несчетное ординальное число Кантора. Для всех $\alpha < \Omega$ определим $\mathfrak{P}_\alpha$ следующим образом: все $\mathfrak{P}$ — линейные замкнутые множества:

$$\mathfrak{P}_\alpha\eta\mathbf{M}, \quad \mathfrak{P}_\alpha \subset \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}_\alpha.$$

Если $\alpha < \Omega$ и все $\mathfrak{P}_\beta$, $\beta < \alpha$, уже определены, то образуем $\mathfrak{N} - [\mathfrak{P}_\beta, \beta < \alpha]$. Поскольку $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}_\beta\eta\mathbf{M}$, это множество тоже $\eta\mathbf{M}$. Если оно $\succsim \mathfrak{M}$, то существует $\mathfrak{P}\eta\mathbf{M}$ с $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{N} - [\mathfrak{P}_\beta, \beta < \alpha]$, $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{M}$. Положим тогда $\mathfrak{P}_\alpha$ равным какому-нибудь такому $\mathfrak{P}$. Если же эти условия не выполнены, оставим $\mathfrak{P}_\alpha$ (и все $\mathfrak{P}_\gamma$ с $\gamma \geqslant \alpha$) не определенными.

Пусть первое α, для которого $\mathfrak{P}_\alpha$ не определено, равно $\bar{\alpha} \leqq \Omega$. Если $\bar{\alpha} < \Omega$, мы должны иметь $\mathfrak{N} - [\mathfrak{P}_\alpha, \alpha < \bar{\alpha}] \prec \mathfrak{M}$.

Так же как и при доказательстве леммы 6.2.3, мы убеждаемся в том, что все $\mathfrak{P}_\alpha$, $\alpha < \bar{\alpha}$, взаимно ортогональны, а поскольку $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{M} \neq (0)$, то $\mathfrak{P}_\alpha \neq (0)$. Как и ранее, отсюда следует, что множество всех $\mathfrak{P}_\alpha$ конечно или счетно, что исключает случай $\bar{\alpha} = \Omega$.

Если $\bar{\alpha}$ конечно, то $\bar{\alpha} = n + 1$, $n = 1, 2, \ldots$, а α пробегает множество $1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. Если $\bar{\alpha}$ бесконечно, то $\alpha < \bar{\alpha}$ имеет тот же алеф, что и $\alpha < \omega$, и поэтому (путем переиндексации $\mathfrak{P}_\alpha$) может быть заменено им. Таким образом, мы можем считать, что α пробегает натуральный ряд чисел $1, 2, \ldots$

Теперь, записывая i вместо α, мы имеем конечную или бесконечную последовательность $\mathfrak{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\mathfrak{P}_i$ взаимно ортогональны; $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}_2 \sim \ldots$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{N} - [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] \prec \mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{D}$ взаимно ортогональны и $\mathfrak{N} = [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{D}]$.

Таким образом, случай, когда последовательность конечна, полностью разобран. В случае бесконечной последовательности мы еще должны избавиться от $\mathfrak{O}$. Итак, предположим, что $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ образуют бесконечную последовательность.

Мы имеем $\mathfrak{O} \prec \mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}_1$, так что $\mathfrak{O} \sim \mathfrak{O}' \subset \mathfrak{P}_1$. Применим лемму 6.1.2 к двум последовательностям $\mathfrak{O}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ и $\mathfrak{O}', \mathfrak{P}_2, \ldots$. Она дает

$$\mathfrak{N} \sim [\mathfrak{O}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] \sim [\mathfrak{O}', \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots] \subset [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] \subset [\mathfrak{O}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] = \mathfrak{N}.$$

Таким образом, $\mathfrak{N} \precsim [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] \precsim \mathfrak{N}$, $[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] \sim \mathfrak{N}$. Пусть $U \in \mathbf{M}$ — изометрическое отображение $[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots]$ на $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}_i'$ — U-образ $\mathfrak{P}_i$. Тогда $\mathfrak{P}_i'$ взаимно ортогональны и $[\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots] = \mathfrak{N}$. Использование $UP_{\mathfrak{P}_i}$ дает $\mathfrak{P}_i \sim \mathfrak{P}_i'$, так что $\mathfrak{M} \sim \sim \mathfrak{P}_1' \sim \mathfrak{P}_2' \sim \ldots$ Поэтому мы можем заменить $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{O}$ на $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots, (0)$. Доказательство окончено.

Лемма 7.1.3. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M} \neq (0)$, $\mathfrak{N}$ конечно. Тогда последовательность $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ из леммы 7.1.2 конечна и ее длина однозначно определяется заданием $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Назовем это число $[\mathfrak{N}/\mathfrak{M}] = 0, 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Если бы последовательность $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ была бесконечной, мы могли бы применить лемму 6.1.2 к $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ и $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$ и получить, что $\mathfrak{N} = [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] \sim [\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots] \subsetneqq \mathfrak{N}$ (ибо $\mathfrak{P}_1 \neq (0)$, поскольку $\mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{M} \neq (0)$), т. е. что $\mathfrak{N}$ бесконечно, а это противоречит условию.

Предположим теперь, что есть два представления

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_m, \mathfrak{O}] = [\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots, \mathfrak{P}_n', \mathfrak{O}']$$

в смысле леммы 7.1.2, причем $m \neq n$. Благодаря симметрии мы можем считать, что $m < n$, $m + 1 \leqslant n$.

Тогда $\mathfrak{O} \prec \mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}_{m+1}'$, так что $\mathfrak{O} \sim \mathfrak{O}^* \subset \mathfrak{P}_{m+1}'$ и $\mathfrak{O}^* \neq \mathfrak{P}_{m+1}'$. Согласно лемме 6.1.2 имеем теперь $\mathfrak{N} = [\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_m, \mathfrak{O}] \sim [\mathfrak{P}_1', \ldots, \mathfrak{P}_m', \mathfrak{O}^*] \subsetneqq [\mathfrak{P}_1', \ldots, \mathfrak{P}_m', \mathfrak{P}_{m+1}'] \subset [\mathfrak{P}_1', \ldots, \mathfrak{P}_n', \mathfrak{O}_0'] = \mathfrak{N}$, откуда следует бесконечность $\mathfrak{N}$, что опять-таки противоречит условию леммы.

7.2. Теперь мы подготовлены для выяснения основных свойств бесконечного случая.

Лемма 7.2.1. *Предположим, что $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$ и $\mathfrak{N}$ бесконечно. Тогда $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Мы имеем $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}' \subsetneqq \mathfrak{N}$. Пусть $U \in \mathbf{M}$ — частично изометрическое отображение, переводящее $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}'$. Для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ образуем U^n-образы $\mathfrak{N}$ и обозначим их через $\mathfrak{N}^{(n)}$ ($\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ совпадают с $\mathfrak{N}^{(0)}$, $\mathfrak{N}^{(1)}$ соответственно). Поскольку $\mathfrak{N}^{(0)} \supset \mathfrak{N}^{(1)}$, мы имеем (применением U^n!) $\mathfrak{N}^{(n)} \supset \mathfrak{N}^{(n+1)}$, поэтому $\mathfrak{N}^{(0)} \supset \mathfrak{N}^{(1)} \supset \mathfrak{N}^{(2)} \supset \ldots$ Оператор U^n есть частичная изометрия с конечным множеством $\mathfrak{N}^{(n)}$, так что $\mathfrak{N}^{(n)}\eta\mathbf{M}$; U отображает $\mathfrak{N}^{(n)}$ на $\mathfrak{N}^{(n+1)}$, $\mathfrak{N}^{(n+1)}$ — на $\mathfrak{N}^{(n+2)}$, а потому $\mathfrak{N}^{(n)} - \mathfrak{N}^{(n+1)}$ — на $\mathfrak{N}^{(n+1)} - \mathfrak{N}^{(n+2)}$. Использование $U(P_{\mathfrak{N}^{(n)}} - P_{\mathfrak{N}^{(n+1)}})$ показывает, что $\mathfrak{N}^{(n)} - \mathfrak{N}^{(n+1)} \sim \mathfrak{N}^{(n+1)} - \mathfrak{N}^{(n+2)}$. Положим $\mathfrak{P}_n = \mathfrak{N}^{(n)} - \mathfrak{N}^{(n+1)}$, тогда $\mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*, \ldots$ образуют бесконечную последовательность, взаимно ортогональны, все $\subset \mathfrak{N}^{(0)} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}_1^* \sim \mathfrak{P}_2^* \sim \ldots$ Поскольку

$$\mathfrak{P}_1^* = \mathfrak{N}^{(0)} - \mathfrak{N}^{(1)} = \mathfrak{N} - \mathfrak{N}' \neq (0),$$

то и все $\mathfrak{P}_n \neq (0)$.

Применим теперь к $\mathfrak{P}_1^*$, $\mathfrak{N}$ (в качестве $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$) конструкцию леммы 7.1.2 и выберем $\mathfrak{P}_\alpha$ для $\alpha = 1, 2, \ldots$ равными $\mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*, \ldots$ соответственно. В результате появится бесконечное $\bar{\alpha}$, которое, как описано в доказательстве леммы 7.1.2, мы заменим на $\bar{\alpha} = \omega$. При этом $\mathfrak{D}$ будет исключено. Итак, $\mathfrak{N} = [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots]$, причем последовательность бесконечна и $\mathfrak{P}_1^* \sim \mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}_2 \sim \ldots$

Применим теперь лемму 7.1.2. к $\mathfrak{P}_1^*$, $\mathfrak{M}$ (в качестве $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$), тогда $\mathfrak{M} = [\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots, \mathfrak{D}']$, где последовательность конечна или бесконечна, и

$$\mathfrak{P}_1^* \sim \mathfrak{P}_1' \sim \mathfrak{P}_2' \sim \ldots, \mathfrak{D}' \prec \mathfrak{P}_1^*.$$

Если она бесконечна, можно положить $\mathfrak{D}' = (0)$ и, использовав лемму 6.1.2, получить

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots] \sim [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] = \mathfrak{N}.$$

Если же она конечна, то мы имеем

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2', \ldots, \mathfrak{P}_n', \mathfrak{D}'] \quad \text{и} \quad \mathfrak{D}' \prec \mathfrak{P}_1^* \sim \mathfrak{P}_{n+1}, \quad \mathfrak{D}' \sim \mathfrak{D}'' \subset \mathfrak{P}_{n+1}.$$

Тогда лемма 6.1.2 дает

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots, \mathfrak{P}_n', \mathfrak{D}'] \sim [\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{D}''] \subset$$
$$\subset [\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}_{n+1}] \subset [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] = \mathfrak{N}.$$

Итак, в любом случае $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{N}$.

Лемма 7.2.2. *Имеет место альтернатива:*

(a) $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *бесконечно, если и только если* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{H}$, *и конечно, если и только если* $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{H}$;

(b) *все* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *конечны. В этом случае* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{H}$ *влечет за собой* $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{H}$ конечно, то по лемме 7.1.1, (iii) и все $\mathfrak{M}$ конечны. Если $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \subsetneqq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{M}$ означало бы, что $\mathfrak{H}$ бесконечно. Таким образом, если $\mathfrak{H}$ конечно, имеет место случай (b).

Если $\mathfrak{H}$ бесконечно, то $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{H}$ влечет за собой согласно лемме 7.1.1, (i) бесконечность $\mathfrak{M}$. Если же, наоборот, $\mathfrak{M}$ бесконечно, лемма 7.2.1, примененная к $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ (в качестве $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$), дает $\mathfrak{H} \precsim \mathfrak{M}$. По лемме 6.3.2, (i) $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{H}$, так что $\mathfrak{M} \sim \sim \mathfrak{H}$. Поскольку всегда $\mathfrak{M} \precsim \mathfrak{H}$ (см. там же), то условие $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{H}$ характеризует конечные $\mathfrak{M}$. При этом имеет место случай (a).

Удобную характеристику бесконечного случая дает

Лемма 7.2.3. $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *бесконечно тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M} \neq (0)$ *и существует* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ *с* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$.

Доказательство. Условие достаточно: если $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условиям леммы, то

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} \neq (0), \qquad \mathfrak{M} - \mathfrak{N} \neq (0), \qquad \mathfrak{N} \neq \mathfrak{M},$$

так что $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \subsetneqq \mathfrak{M}$.

Оно необходимо: если $\mathfrak{M}$ бесконечно, то доказательство леммы 7.2.1 показывает, что существует бесконечная последовательность $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$, в которой все $\mathfrak{P}_i$ взаимно ортогональны, $\neq (0)$, $\mathfrak{M} = [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots]$ и $\mathfrak{P}_1 \sim \mathfrak{P}_2 \sim \ldots$ Теперь

по лемме 6.1.2 $[\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots] \sim [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3, \ldots] \sim [\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_4, \ldots]$ и при $\mathfrak{N} = [\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3, \ldots]$, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. Поскольку $\mathfrak{P}_1 \neq (0)$, очевидно, $\mathfrak{M} \neq (0)$.

7.3. Продолжая наши исследования в направлениях, знакомых по общей теории множеств, естественно установить аддитивность понятия конечности. Мы докажем его за пять последовательных шагов, причем первая лемма представляет некоторый интерес и сама по себе.

Лемма 7.3.1. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *ортогональны*, $\mathfrak{P} \subset [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$. *Тогда* $\mathfrak{P}$ *может быть представлено в следующей форме (все встречающиеся ниже множества линейны и замкнуты):*

Найдутся два ортогональных множества $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''\eta\mathbf{M}$ *и* $\subset \mathfrak{M}$; *два ортогональных множества* $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''\eta\mathbf{M}$ *и* $\subset \mathfrak{N}$ *и замкнутый линейный оператор* $A\eta\mathbf{M}$ *со следующими свойствами: область определения* A *является плотным подмножеством* $\mathfrak{M}''$; *образ* A — *плотным подмножеством* $\mathfrak{N}''$; $Af = 0$ *влечет за собой* $f = 0$. *Множество* $\mathfrak{P}^*$ *всех* $f + Af$ ($f \in$ *области определения* A) *линейно, замкнуто и* $\eta\mathbf{M}$:

$$\mathfrak{P}^* \sim \mathfrak{M}'' \sim \mathfrak{N}'';$$

$\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{P}^*$ *взаимно ортогональны и*

$$\mathfrak{P} = [\mathfrak{M}', \mathfrak{N}', \mathfrak{P}^*].$$

Доказательство. Положим $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{P}$, тогда $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}'\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, так что $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{N}'$ ортогональны и $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{P}$. Поэтому мы можем образовать $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P} - [\mathfrak{M}', \mathfrak{N}']$, тогда $\mathfrak{P}^*\eta\mathbf{M}$; $\mathfrak{P}^*$ ортогонально обоим $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{N}'$, и $\mathfrak{P} = [\mathfrak{M}', \mathfrak{N}', \mathfrak{P}^*]$. Теперь нам осталось лишь охарактеризовать $\mathfrak{P}^*$, указанное в лемме, в терминах $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{N}''$ и A.

Если вектор $f \in \mathfrak{P}^*$, то и $f \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$, так что $f = g + h$, $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$ (см. [16, с. 76]). Ясно, что g и h определены однозначно. Если в этом разложении $g = 0$, то $f = h \in \mathfrak{N}$; $f \in \mathfrak{P}^* \subset \mathfrak{P}$, так что $f \in \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{P} = \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{P} - \mathfrak{P}^*$. Поскольку $f \in \mathfrak{P}^*$, отсюда следует, что $f = 0$, $h = 0$. Аналогичным образом, из $h = 0$ следует, что $g = 0$. Благодаря линейности это означает, что g однозначно определяет h и наоборот (если только они вообще соответствуют какому-либо $f \in \mathfrak{P}^*$). Таким образом, мы можем определить однозначный оператор A с однозначным обратным A^{-1} по правилу $Ag = h$, как только g, h соответствуют указанным выше образом какому-нибудь $f \in \mathfrak{P}^*$. Поэтому $\mathfrak{P}^*$ является множеством всех $f + Af$. Поскольку оно $\eta\mathbf{M}$, линейно и замкнуто, то же верно и для A.

Положим теперь $\mathfrak{M}'' =$ [область определения A], $\mathfrak{N}'' =$ [образ A]. Нам осталось доказать лишь, что $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}$ и ортогонально $\mathfrak{M}'$, что $\mathfrak{N}'' \subset \mathfrak{N}$ и ортогонально $\mathfrak{N}'$, а также, что $\mathfrak{P}^* \sim \mathfrak{N}'' \sim \mathfrak{M}''$.

Если g принадлежит области определения A, положим $f = g + h$ с $f \in \mathfrak{P}^*$, $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$. Таким образом, $g \in \mathfrak{M}$, f ортогонален $\mathfrak{M}'$ и $h \in \mathfrak{N}$ ортогонален $\mathfrak{M}$, а значит, и $\mathfrak{M}'$. Поэтому $g = f - h$ ортогонален $\mathfrak{M}'$, $g \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$. Значит, область определения $A \subset \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$, т. е. $\mathfrak{M}'' =$ [область определения A] $\subset \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$. Аналогично $\mathfrak{N}'' \subset \mathfrak{N} - \mathfrak{N}'$.

Рассмотрим теперь оператор $A_1 = (1 + A)\, P_{\mathfrak{M}''}$ (линейный оператор, совпадающий с $1 + A$ на $\mathfrak{M}''$ и с 0 на $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}''$). Ясно что $A_1\eta\mathbf{M}$, линеен, замкнут и что его область определения всюду плотна. Далее, [образ A_1] = [образ $(A + 1)$] = $\mathfrak{P}^*$, т. е. [образ A_1] = $\mathfrak{P}^*$. С другой стороны, [образ A_1^*] = $\mathfrak{H} - (f,$

$A_1f=0)=\mathfrak{H}-(f,\ (1+A)P_{\mathfrak{M}''}f=0)=\mathfrak{H}-(f,\ P_{\mathfrak{M}''}f=0);\ \mathfrak{H}-(\mathfrak{H}-\mathfrak{M}'')=$ $=\mathfrak{M}''$. Теперь применение леммы 6.2.1 к A_1 дает $\mathfrak{P}^*\sim\mathfrak{M}''$. Аналогично, $\mathfrak{P}^*\sim$ $\sim\mathfrak{N}''$.

Таким образом, все утверждения нашей леммы доказаны.

Лемма 7.3.2. *Предположим, что* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *ортогональны;* $\mathfrak{P}\subset[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]$. *Тогда или* $\mathfrak{P}\precsim\mathfrak{M}$, *или* $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{P}\precsim\mathfrak{N}$.

Доказательство. Применив лемму 7.3.1 к $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, получим множества $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{P}^*$ и оператор A; используя ее же к $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{P}$, получим множества $\overline{\mathfrak{M}}'$, $\overline{\mathfrak{M}}''$, $\overline{\mathfrak{N}}'$, $\overline{\mathfrak{N}}''$, $\overline{\mathfrak{P}}^*$ и оператор B. Поскольку $\mathfrak{P}$ и $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-$ $-\mathfrak{P}$ ортогональны, $\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{P}$, $\overline{\mathfrak{M}}'=\mathfrak{M}\cdot([\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{P})$ также ортогональны; то же верно и для $\mathfrak{N}'$, $\overline{\mathfrak{N}}'$. Образуем $\mathfrak{M}^0=\mathfrak{M}-[\mathfrak{M}',\overline{\mathfrak{M}}']$, $\mathfrak{N}^0=\mathfrak{N}-[\mathfrak{N}',\overline{\mathfrak{N}}']$.

Если $f\in$ области определения A, то $f+Af\in\mathfrak{P}^*\subset\mathfrak{P}$ ортогонален к $\overline{\mathfrak{M}}'\subset$ $\subset[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{P}$. Но $Af\in\mathfrak{N}$ тоже ортогонален $\overline{\mathfrak{M}}'\subset\mathfrak{M}$. Поэтому f ортогонален $\overline{\mathfrak{M}}'$. Таким образом, и все $\mathfrak{M}''=[$области определения $A]$ ортогонально $\overline{\mathfrak{M}}'$. Кроме того, мы знаем, что оно ортогонально $\mathfrak{M}'$ и $\subset\mathfrak{M}$, так что $\mathfrak{M}''\subset\mathfrak{M}-$ $-[\overline{\mathfrak{M}}',\mathfrak{M}']=\mathfrak{M}^0$. Подобным же образом $\overline{\mathfrak{M}}''\subset\mathfrak{M}^0$. Аналогично этому и $\mathfrak{N}''$, $\overline{\mathfrak{N}}''\subset\mathfrak{N}^0$.

Рассмотрим теперь $\mathfrak{N}'$, $\overline{\mathfrak{M}}'$. Имеем $\mathfrak{N}'\gtrless\overline{\mathfrak{M}}'$ (по теореме VI), т. е. или $\mathfrak{N}'\precsim$ $\precsim\overline{\mathfrak{M}}'$, $\mathfrak{N}'\sim\mathfrak{M}^*\subset\overline{\mathfrak{M}}'$, или $\mathfrak{N}'\succsim\overline{\mathfrak{M}}'$, $\overline{\mathfrak{M}}'\sim\overline{\mathfrak{N}}^*\subset\mathfrak{N}'$. В первом случае (согласно лемме 6.1.2) $\mathfrak{P}=[\mathfrak{M}',\mathfrak{N}',\mathfrak{P}^*]\sim[\mathfrak{M}',\mathfrak{M}^*,\mathfrak{M}'']\subset[\mathfrak{M}',\overline{\mathfrak{M}}',\mathfrak{M}^0]=\mathfrak{M}$; во втором случае (как и ранее) $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{P}=[\overline{\mathfrak{M}}',\overline{\mathfrak{N}}',\overline{\mathfrak{P}}^*]\sim[\overline{\mathfrak{N}}^*,\overline{\mathfrak{N}}',\overline{\mathfrak{N}}'']\subset[\mathfrak{N}',\overline{\mathfrak{N}}',\mathfrak{N}^0]=$ $=\mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{P}\precsim\mathfrak{M}$ или соответственно $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{P}\precsim\mathfrak{N}$.

Лемма 7.3.3. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$; $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *ортогональны. Если* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *конечны, то и* $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]$ *конечно.*

Доказательство. Предположим, что $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]$ бесконечно. Тогда по лемме 7.2.3 существует такое $\mathfrak{P}\subset[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]$, что $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]\sim\mathfrak{P}\sim[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{P}$. По лемме 7.3.2 мы имеем $\mathfrak{P}\precsim\mathfrak{M}$ или $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{P}\precsim\mathfrak{N}$, так что $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{N}\succsim[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]$. По лемме 7.1.1, (i) в этом случае $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{N}$ должны быть бесконечными, что противоречит сделанному нами предположению.

Лемма 7.3.4. *Если* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, *то* $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{N}\precsim\mathfrak{M}$.

Доказательство. Подпространство $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{N}$, очевидно, совпадает со множеством всех $P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}f$, где f пробегает $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]$. Поэтому оно равно $[P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}f$, $f\in\{\mathfrak{M},\mathfrak{N}\}]=[P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}(g+h),\ g\in\mathfrak{M},\ h\in\mathfrak{N}]=[P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}g;\ g\in\mathfrak{M},\ h\in\mathfrak{N}]=[P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}g,\ g\in$ $\in\mathfrak{M}]=[P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}\cdot P_{\mathfrak{M}}g',\ g'\in\mathfrak{H}]=[\text{Range}\,P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}\cdot P_{\mathfrak{M}}]$. В то же время $[\text{Range}\,(P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}P_{\mathfrak{M}})^*]=$ $=[\text{Range}\,(P_{\mathfrak{M}}P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}})]\subset[\text{Range}\,P_{\mathfrak{M}}]=\mathfrak{M}$. Применение леммы 6.2.1 к $P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}P_{\mathfrak{M}}$ дает теперь $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{N}=[\text{Range}\,P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}P_{\mathfrak{M}}]\sim[\text{Range}\,(P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}P_{\mathfrak{M}})^*]\subset\mathfrak{M}$, откуда $[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]-\mathfrak{N}\precsim\mathfrak{M}$.

Лемма 7.3.5. *Если* $\mathfrak{M}_1,\ldots,\mathfrak{M}_n\eta\mathbf{M}$ *и все* $\mathfrak{M}_i$ *конечны, то* $[\mathfrak{M}_1,\ldots,\mathfrak{M}_n]$ *тоже конечно.*

Доказательство. Утверждение очевидно для $n=1$. Рассмотрим $n=$ $=2$. По леммам 7.3.4 и 7.1.1, (i) $[\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2]-\mathfrak{M}_2$ конечно. Поскольку $[\mathfrak{M}_1,$ $\mathfrak{M}_2]-\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_2$ ортогональны, применима лемма 7.3.3, дающая $[[\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2]-$ $-\mathfrak{M}_2,\mathfrak{M}_2]$, т. е. $[\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2]$ конечно. Значит, и для $n=2$ утверждение тоже верно.

Предположим теперь, что $n = 3, 4, \ldots$ и что для $n - 1$ утверждение уже доказано. Тогда $[\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}]$ конечно, и, поскольку утверждение верно для $n = 2$, $[[\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}], \mathfrak{M}_n]$, т. е. $[\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n]$, тоже конечно. Этим завершается доказательство.

Глава VIII

ЧИСЛЕННАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

8.1. Используем информацию об относительной размерности, полученную ранее, для определения ее количественной меры. Это будет сделано путем уточнения чисел $[\mathfrak{N}\,\mathfrak{M}]$ из леммы 7.1.3, которые принимают целые значения и поэтому лишь приблизительно измеряют отношение двух множеств.

Наша задача идентична той, с которой приходится сталкиваться при желании перейти от чисто геометрического исчисления с интервалами к аналитическому с численными значениями длины, т. е. к задаче, решаемой с помощью знаменитого алгоритма Евклида. В действительности наша лемма 7.1.3 является первым шагом этого алгоритма.

Технически, однако, предпочтительнее использовать несколько иную процедуру. Нам придется на короткое время сделать различие между двумя случаями: существованием и несуществованием минимального $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$. Первый случай не представляет интереса, ибо если минимальное $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ существует, то благодаря теореме IV мы уже имеем полное описание $\mathbf{M}$ (как прямого фактора). Но, поскольку это различие не отражается на возможности количественного измерения относительной размерности, мы сохраним полноту обсуждения, включив этот случай.

Определение 8.1.1. *Предположим, что* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$ *конечны и* $\neq (0)$. *Если мы имеем*

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_n, \mathfrak{O}],$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ *(конечно!);* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{O}$ *взаимно ортогональны;* $\mathfrak{P}_i \sim \mathfrak{M}$, *то будем использовать сокращенную запись:* $\mathfrak{N} \approx n \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{O}$. *Если* $\mathfrak{O} = (0)$, *мы опустим его.*

Лемма 8.1.1. *Если* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *конечно,* $\neq (0)$ *и не минимально, то существует конечное* $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, $\neq (0)$ *с*

$$|\mathfrak{M}/\mathfrak{N}| \geqslant 2.$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{M}$ не минимально, найдется такое $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, что $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \neq (0)$. Тогда $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} - \mathfrak{N} \neq (0)$. Имеем $\mathfrak{N} \gtrless \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$, т. е. $\mathfrak{N} \precsim \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ или $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. Во втором случае заменим $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ так, чтобы всегда было $\mathfrak{N} \precsim \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$.

Включение $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ влечет за собой конечность $\mathfrak{N}$. Поскольку $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ ортогональны и $\subset \mathfrak{M}$, мы имеем с очевидностью $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{N}'$ при $\mathfrak{O} = \mathfrak{M} - [\mathfrak{N}, \mathfrak{N}']$, $\mathfrak{M} \approx 2 \odot \mathfrak{N} \# \mathfrak{O}$. Применив лемму 7.1.3 к $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, получим $\mathfrak{O} \approx p \odot \mathfrak{N} \# \mathfrak{O}'$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{O}' \prec \mathfrak{N}$. Тогда

$$\mathfrak{M} \approx (2 + p) \odot \mathfrak{N} \# \mathfrak{O}', \qquad \mathfrak{O}' \prec \mathfrak{N},$$

так что $\lfloor \mathfrak{M}/\mathfrak{N} \rfloor = 2 + p \geqslant 2$.

Лемма 8.1.2. *Любое минимальное* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *конечно и* $\neq (0)$.

Доказательство. Неравенство $\mathfrak{M} \neq (0)$ является просто частью определения. Бесконечность $\mathfrak{M}$ повлекла бы за собой $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \subsetneqq \mathfrak{M}$ с $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, а поскольку $\mathfrak{M}$ минимально, то $\mathfrak{N} = (0)$. Тогда $\mathfrak{M} \sim (0)$, $\mathfrak{M} = (0)$, что ведет к противоречию.

Определение 8.1.2. *Некоторые (конечные или бесконечные) последовательности* $\mathfrak{S} = (\overline{\mathfrak{M}}_1, \overline{\mathfrak{M}}_2, \ldots)$, *элементы которых* $\eta\mathbf{M}$, *конечны и* $\neq (0)$, *будут называться фундаментальными последовательностями. Эти последовательности таковы:*

(α) *любое минимальное* $\overline{\mathfrak{M}}_1\eta\mathbf{M}$ *само по себе образует фундаментальную последовательность (длины 1!);*

(β) *любая бесконечная последовательность* $\overline{\mathfrak{M}}_1, \overline{\mathfrak{M}}_2, \ldots \eta\mathbf{M}$, *конечных и* $\neq (0)$ *элементов фундаментальна, если* $[\overline{\mathfrak{M}}_i/\overline{\mathfrak{M}}_{i+1}] \geqslant 2$ *для* $i = 1, 2, \ldots$

Лемма 8.1.3. *Если вообще существуют множества* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, *конечные и* $\neq (0)$, *то найдется хоть одна фундаментальная последовательность*

Доказательство. Если существует минимальное $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, положим $\overline{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{M}$. Согласно лемме 8.1.2 оно удовлетворяет всем требованиям случая (α). Если же минимального $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ не существует, выберем конечное $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M} \neq (0)$, положим $\overline{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{M}$ и с помощью леммы 8.1.1 получим $\overline{\mathfrak{M}}_{i+1}$ из $\overline{\mathfrak{M}}_i$. Полученная последовательность удовлетворяет требованиям случая (β). ❙

Докажем сейчас две важные оценки.

Лемма 8.1.4. *Пусть* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}\eta\mathbf{M}$, *конечны и* $\neq (0)$. Тогда

$$\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right]\left[\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}\right] \leqslant \left[\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}\right] < \left(\left[\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right] + 1\right),$$

а если $\mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{P}$ *ортогональны, то*

$$\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right] + \left[\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}\right] \leqslant \left[\frac{[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]}{\mathfrak{M}}\right] \leqslant \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right] + \left[\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}\right] + 1.$$

Доказательство. Положим сначала $[\mathfrak{N}/\mathfrak{M}] = m$, $\mathfrak{N} \approx m \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}' \prec \mathfrak{M}$ и $[\mathfrak{P}/\mathfrak{N}] = n$, $\mathfrak{P} \approx n \odot \mathfrak{N} \# \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}' \prec \mathfrak{N}$. Очевидно, при этом $\mathfrak{P} \approx m \cdot n \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}''$, откуда, как и в конце доказательства леммы 8.1.1, следует, что $[\mathfrak{P}/\mathfrak{M}] \geqslant m \cdot n$. Если бы, однако, мы имели $[\mathfrak{P}/\mathfrak{M}] \geqslant (m + 1)(n + 1)$, это означало бы, что $\mathfrak{P} \approx [\mathfrak{P}/\mathfrak{M}] \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}''' \approx (m + 1)(n + 1) \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}^{IV}$, где

$$\mathfrak{M}^{IV} \approx ([\mathfrak{P}/\mathfrak{M}] - (m + 1)(n + 1)) \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}'''$$

Иными словами, $(n + 1) \odot \mathfrak{N}^0 \approx \mathfrak{P}^0 \subset \mathfrak{P}$, где $\mathfrak{N}^0 \approx (m + 1) \odot \mathfrak{M}$. Теперь, поскольку

$$\mathfrak{N} \approx m \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}' \precsim \mathfrak{N}^0,$$

мы можем написать, что $(n + 1) \odot \mathfrak{N} \approx \mathfrak{P}^{00} \subset \mathfrak{P}^0 \subset \mathfrak{P}$, т. е.

$$\mathfrak{P} \approx (n + 1) \odot \mathfrak{N} \# \mathfrak{N}''.$$

Это, как и выше, дает $[\mathfrak{P}/\mathfrak{N}] \geqslant n + 1$, что противоречит $[\mathfrak{P}/\mathfrak{N}] = n$. Таким

образом, мы должны иметь $m \cdot n \leqslant [\mathfrak{P}/\mathfrak{M}] < (m+1)(n+1)$, что составляет первую цепочку неравенств.

Предположим далее, что $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}$ ортогональны, и положим

$$[\mathfrak{N}/\mathfrak{M}] = m, \ \mathfrak{N} \approx m \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}', \qquad \mathfrak{M}' \prec \mathfrak{M},$$

и

$$[\mathfrak{P}/\mathfrak{M}] = p, \ \mathfrak{P} \approx p \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}^{V}, \qquad \mathfrak{M}^{V} \prec \mathfrak{M}.$$

Тогда $[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}] \approx (m+p) \odot \mathfrak{M} \# [\mathfrak{M}', \mathfrak{M}^{V}]$, поэтому, как и ранее, $[[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]/\mathfrak{M}] \geqslant \geqslant m + p$. Если бы, однако, мы имели $[[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]/\mathfrak{M}] \geqslant m + p + 2$, это бы означало, что

$$[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}] \approx [[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]/\mathfrak{M}] \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}^{VI} \approx (m+p+2) \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}^{VII},$$

где

$$\mathfrak{M}^{VII} \approx ([[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]/\mathfrak{M}] - (m+p+2)) \odot \mathfrak{M} \# \mathfrak{M}^{VI}.$$

Поэтому $[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}] = [\overline{\mathfrak{N}}, \overline{\mathfrak{P}}, \mathfrak{M}^{VII}]$, где $\overline{\mathfrak{N}}, \overline{\mathfrak{P}}, \mathfrak{M}^{VII}$ взаимно ортогональны и $\overline{\mathfrak{N}} \approx \approx (m+1) \odot \mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{P}} \approx (p+1) \odot \mathfrak{M}$. Это влечет за собой $\mathfrak{N} \sim \overline{\mathfrak{N}}^0 \subsetneqq \overline{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{P} \sim \overline{\mathfrak{P}}^0 \subsetneqq \subsetneqq \overline{\mathfrak{P}}$, так что

$$[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}] \sim [\overline{\mathfrak{N}}^0, \overline{\mathfrak{P}}^0] \subsetneqq [\overline{\mathfrak{N}}, \overline{\mathfrak{P}}] \subset [\overline{\mathfrak{N}}, \overline{\mathfrak{P}}, \mathfrak{M}^{VII}] = [\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]$$

в противоречии с конечностью $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P}$ (по лемме 7.3.3 или 7.3.5). Таким образом, $[[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]/\mathfrak{M}] < m + p + 2$, и поэтому $m + p \leqslant [[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]/\mathfrak{M}] \leqslant m + p + 1$, что составляет вторую цепочку неравенств.

Эти неравенства позволяют нам следующим образом установить численные соотношения между относительными размерностями.

Лемма 8.1.5. *Если $\mathfrak{S} = (\overline{\mathfrak{M}}_1, \overline{\mathfrak{M}}_2, \ldots)$ — фундаментальная последовательность, а $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$ конечны и $\neq (0)$, то существует*

$$\lim_i \frac{[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i]}{[\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_i]} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}}$$

(в случае (α) мы понимаем под $\lim_i$ просто значение дроби при $i = 1$, в случае (β) — $\lim_{i \to \infty}$). Это — конечное вещественное положительное число.

Доказательство. В случае (α) нам нужно доказать только, что $[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_1]$, $[\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_1]$ оба $\neq 0$. Если $[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_1] = 0$, то $\mathfrak{N} \approx \mathfrak{O} \prec \overline{\mathfrak{M}}_1$, так что $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}' \subset \subset \overline{\mathfrak{M}}_1$, причем $\mathfrak{N}' \neq \overline{\mathfrak{M}}_1$. Так как $\mathfrak{N}'\eta\mathbf{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}_1$ минимально, отсюда с необходимостью следует, что $\mathfrak{N}' = (0)$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}' = (0)$, $\mathfrak{N} = (0)$, что противоречит условию $\mathfrak{N} \neq (0)$. Поэтому $[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_1] \neq 0$. По той же причине $[\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_1] \neq 0$.

Рассмотрим случай (β). Согласно лемме 8.1.4 мы имеем $[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_{i+1}] \geqslant [\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i][\overline{\mathfrak{M}}_i/\overline{\mathfrak{M}}_{i+1}] \geqslant 2[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i]$, так что всегда $[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i] = 0$ или $\lim_{i \to \infty} [\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i] = \infty$. Первое равенство означало бы, что $\mathfrak{N} \prec \overline{\mathfrak{M}}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots$ Тогда лемма 8.1.4 дает

$$\left[\frac{\overline{\mathfrak{M}}_i}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+l}}\right] \geqslant \left[\frac{\overline{\mathfrak{M}}_i}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+1}}\right] \cdots \left[\frac{\overline{\mathfrak{M}}_{i+l-1}}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+l}}\right] \geqslant 2^l,$$

в частности $[\overline{\mathfrak{M}}_1/\overline{\mathfrak{M}}_i] \geqslant 2^{i-1}$ (беря 1, $i-1$ в качестве i, j). Итак, $\overline{\mathfrak{M}}_1 \sim 2^{i-1} \odot \odot \overline{\mathfrak{M}}_i \# \overline{\mathfrak{M}}_i'$ и a fortiori $\overline{\mathfrak{M}}_1 \approx 2^{i-1} \odot \mathfrak{N} \# \mathfrak{M}_i''$. Отсюда, как мы часто делали при доказательстве лемм 8.1.1 и 8.1.4, можно заключить, что $[\overline{\mathfrak{M}}_1/\mathfrak{N}] \geqslant 2^{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots$, что невозможно. Таким образом, мы доказали, что $\lim_{i\to\infty} [\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i] = \infty$ и аналогично этому $\lim_{i\to\infty} [\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_i] = \infty$

Повторное применение леммы 8.1.4 дает

$$\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right] \leqslant \left(\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{\overline{\mathfrak{M}}_i}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right] + 1\right),$$

$$\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right] \geqslant \left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]\left[\frac{\overline{\mathfrak{M}}_i}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right],$$

так что

$$\frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right]} \leqslant \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right] + 1}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]} \; \frac{\left[\frac{\overline{\mathfrak{M}}_i}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right] + 1}{\left[\frac{\overline{\mathfrak{M}}_i}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right]} \leqslant \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right] + 1}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]} \; \frac{2^j + 1}{2^j}.$$

Теперь $j \to \infty$ дает

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_{i+j}}\right]} \leqslant \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right] + 1}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]},$$

т. е.

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]} \leqslant \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right] + 1}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]}.$$

Для достаточно большого i $[\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_i] \neq 0$, так что правая часть неравенства конечна, а значит, и $\limsup_{i\to\infty}$ слева тоже конечен. Теперь $i \to \infty$ дает, учитывая, что $\lim_{i\to\infty} [\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_i] = \infty$:

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]} \leqslant \liminf_{i\to\infty} \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right] + 1}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]} = \liminf_{i\to\infty} \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]}.$$

Таким образом, $\lim_{i\to\infty} \frac{[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i]}{[\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_i]}$ существует и конечен. Он неотрицателен по оп-

ределению, а перестановка $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ доказывает, что он не может равняться 0. Доказательство закончено.

Лемма 8.1.6. *Если* $\mathfrak{S} = (\overline{\mathfrak{M}}_1, \overline{\mathfrak{M}}_2, \ldots)$ — *фундаментальная последовательность*, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}\eta\mathbf{M}$, *конечны и* $\neq (0)$, *то верны следующие утверждения.*

(i) *если* $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$, *то* $(\mathfrak{N}/\mathfrak{M})_{\mathfrak{S}} = (\mathfrak{P}/\mathfrak{M})_{\mathfrak{S}}$;

(ii) *если* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, *то* $(\mathfrak{P}/\mathfrak{M})_{\mathfrak{S}} = (\mathfrak{P}/\mathfrak{N})_{\mathfrak{S}}$;

(iii) $\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} = 1$; $\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\right)_{\mathfrak{S}} = \frac{1}{(\mathfrak{N}/\mathfrak{M})_{\mathfrak{S}}}$; $\left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}}\left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}\right)_{\mathfrak{S}}$;

(iv) *если* $\mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{P}$ *ортогональны, то*

$$\left(\frac{[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} + \left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}}.$$

Доказательство. Мы докажем эти утверждения в несколько измененном порядке.

Утверждение (iii): очевидно из определения.

Утверждение (i): очевидно, $[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i] = [\mathfrak{P}/\overline{\mathfrak{M}}_i]$, что влечет за собой $(\mathfrak{N}/\mathfrak{M})_{\mathfrak{S}} = (\mathfrak{P}/\mathfrak{M})_{\mathfrak{S}}$.

Утверждение (ii) следует из (i) и (iii).

Утверждение (iv). рассмотрим сначала случай (α). Тогда $\mathfrak{N} \approx [\mathfrak{N}/\mathfrak{M}_1] \odot \overline{\mathfrak{M}}_1 \# \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}' \prec \overline{\mathfrak{M}}_1$. Поэтому $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}'' \subset \overline{\mathfrak{M}}_1$, что исключает случай $\mathfrak{M}'' = \overline{\mathfrak{M}}_1$. Так как $\mathfrak{M}''\eta\mathbf{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}_1$ минимально, это с необходимостью влечет за собой $\mathfrak{M}'' = (0)$, $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}'' = (0)$, $\mathfrak{M}' = (0)$. Отсюда $\mathfrak{N} \approx [\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_1] \odot \overline{\mathfrak{M}}_1$ и аналогичным образом $\mathfrak{P} \sim [\mathfrak{P}/\overline{\mathfrak{M}}_1] \odot \overline{\mathfrak{M}}_1$, а потому $[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}] \sim ([\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_1] + [\mathfrak{P}/\overline{\mathfrak{M}}_1]) \odot \overline{\mathfrak{M}}_1$;

Таким образом, $\left[\frac{[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]}{\overline{\mathfrak{M}}_1}\right] = \left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_1}\right] + \left[\frac{\mathfrak{P}}{\overline{\mathfrak{M}}_1}\right]$. Это означает, что

$$\frac{\left[\frac{[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]}{\overline{\mathfrak{M}}_1}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_1}\right]} = \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_1}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_1}\right]} + \frac{\left[\frac{\mathfrak{P}}{\overline{\mathfrak{M}}_1}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_1}\right]}$$

и в условиях случая (α) $\left(\frac{[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} + \left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}}$.

Рассмотрим теперь случай (β). Лемма 8.1.4 тогда дает

$$\frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right] + \left[\frac{\mathfrak{P}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]} \leqslant \frac{\left[\frac{[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]} \leqslant \frac{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right] + \left[\frac{\mathfrak{P}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right] + 1}{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{M}}_i}\right]}.$$

Если теперь устремить i к ∞ и учесть, что $\lim_{i\to\infty}[\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_i] = \infty$ (см. доказательство леммы 8.1.5), это переходит в

$$\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} + \left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} \leqslant \left(\frac{[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} \leqslant \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} + \left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}},$$

т. е.

$$\left(\frac{[\mathfrak{N}, \mathfrak{P}]}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}} + \left(\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}}.$$

8.2. Введем численную относительную размерность с помощью следующего неявного определения.

Определение 8.2.1. *Вещественнозначная функция $D(\mathfrak{M})$, определенная на всех линейных замкнутых множествах $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, является функцией относительной размерности, если она обладает следующими свойствами:*

(i) *$D(\mathfrak{M})$ равна 0, если $\mathfrak{M} = (0)$; она конечна и положительна, если $\mathfrak{M}$ конечно и $\neq (0)$; она равна ∞, если $\mathfrak{M}$ бесконечно;*

(ii) *если $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, то $D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{N})$;*

(iii) *если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ ортогональны, то $D([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]) = D(\mathfrak{M}) + D(\mathfrak{N})$ (относительно замены $\mathfrak{M}$ на $E = P_{\mathfrak{M}}$ и использования поясняющего символа (... $\mathbf{M}$) см. определение 6.1.1. Если нам потребуется сделать связь между $\mathbf{M}$ и функцией $D(\mathfrak{M})$ явной, мы будем писать $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$).*

Результаты п. 8.1 позволяют полностью разобраться с вопросами существования.

Лемма 8.2.1. *Всегда существует по меньшей мере одна функция относительной размерности $D(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Если не существует ни одного конечного $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M} \neq (0)$, положим

$$D(\mathfrak{M}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \mathfrak{M} = (0), \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям. Если же существуют конечные $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M} \neq (0)$, выберем любое из них, скажем $\mathfrak{M}_0$. Затем выберем с помощью леммы 8.1.3 какую-нибудь фундаментальную последовательность $\mathfrak{S}$. Наконец, положим

$$D(\mathfrak{M}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \mathfrak{M} = (0), \\ (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_0)_{\mathfrak{S}} & \text{для конечных } \mathfrak{M} \neq (0), \\ \infty & \text{для бесконечных } \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Напомним, что согласно леммам 7.1.1, (i) и 7.3.3 или 7.3.5 $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ бесконечно тогда и только тогда, когда бесконечно $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{N}$. Теперь очевидно выполнение условия (i), а (ii) и (iii) следуют из леммы 8.1.6, (i) и (iv) соответственно.

Лемма 8.2.2. *Если $D(\mathfrak{M})$ — функция относительной размерности, а $\mathfrak{S}$ — фундаментальная последовательность, то для любых $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, конечных и $\neq (0)$ мы имеем соотношение*

$$\frac{D(\mathfrak{N})}{D(\mathfrak{M})} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}}.$$

Доказательство. Мы будем различать два случая — (α) и (β) — из определения 8.1.2. В случае (α) мы имеем (ср. доказательство леммы 8.1.6, (iv))

$$\mathfrak{N} \approx \left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_1}\right] \odot \overline{\mathfrak{M}}_1, \quad \mathfrak{M} \approx \left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_1}\right] \odot \overline{\mathfrak{M}}_1,$$

откуда согласно определению 8.1.2 $D(\mathfrak{N}) = [\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_1]\, D(\overline{\mathfrak{M}}_1)$, $D(\mathfrak{M}) = [\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_1]\, D(\overline{\mathfrak{M}}_1)$, причем $D(\overline{\mathfrak{M}}_1)$ конечна и положительна, так что

$$\frac{D(\mathfrak{N})}{D(\mathfrak{M})} = \frac{[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_1]}{[\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_1]} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}}.$$

В случае (β) мы имеем

$$\mathfrak{N} \approx \left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_i}\right] \odot \overline{\mathfrak{M}}_i \# \mathfrak{M}_i', \quad \mathfrak{M}_i' \prec \overline{\mathfrak{M}}_i; \quad \mathfrak{M} \approx \left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_i}\right] \odot \overline{\mathfrak{M}}_i \# \mathfrak{M}_i'', \quad \mathfrak{M}_i'' \prec \overline{\mathfrak{M}}_i$$

При этом $\mathfrak{M}_i' \sim \mathfrak{M}_i''' \subset \overline{\mathfrak{M}}_i$, что (используя здесь и далее определение 8.2.1, как мы это уже делали выше) влечет за собой

$$D(\overline{\mathfrak{M}}_i) = D(\mathfrak{M}_i''') + D(\overline{\mathfrak{M}}_i - \mathfrak{M}_i''') \geqslant D(\mathfrak{M}_i''') = D(\mathfrak{M}_i').$$

Поэтому

$$D(\mathfrak{N}) = \left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_i}\right] D(\overline{\mathfrak{M}}_i) + D(\mathfrak{M}_i') \leqslant \left(\left[\frac{\mathfrak{N}}{\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_i}\right] + 1\right) D(\overline{\mathfrak{M}}_i),$$

$$D(\mathfrak{M}) = \left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_i}\right] D(\overline{\mathfrak{M}}_i) + D(\mathfrak{M}_i'') \geqslant \left[\frac{\mathfrak{M}}{\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_i}\right] D(\overline{\mathfrak{M}}_i)$$

$$\frac{D(\mathfrak{N})}{D(\mathfrak{M})} \leqslant \frac{[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i] + 1}{[\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_i]}.$$

Теперь, если вспомнить, что из доказательства леммы 8.1.5 $\lim_{i\to\infty} [\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_i] = \infty$, переход к пределу $i \to \infty$ дает

$$\frac{D(\mathfrak{N})}{D(\mathfrak{M})} \leqslant \lim_{i\to\infty} \frac{[\mathfrak{N}/\overline{\mathfrak{M}}_i] + 1}{[\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}_i]} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}}.$$

Меняя местами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и учитывая лемму 8.1.6, (iii), получим, что верно и обратное неравенство $\geqslant$; так что мы снова имеем равенство.

Лемма 8.2.3. *Все функции относительной размерности $D(\mathfrak{M})$ получаются из одной из них, скажем $D_0(\mathfrak{M})$, путем образования $aD_0(\mathfrak{M})$ со всеми конечными положительными константами a.*

Доказательство. Ясно, что любая функция $aD_0(\mathfrak{M})$ является функцией относительной размерности вместе с $D_0(\mathfrak{M})$.

Рассмотрим теперь две функции относительной размерности $D_0(\mathfrak{M})$ и $D(\mathfrak{M})$. Если конечных $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M} \neq (0)$, не существует, то мы имеем $D_0(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{M}) =$

$= 0$ и ∞ для $\mathfrak{M} = (0)$ и $\mathfrak{M} \neq (0)$ соответственно, так что $D(\mathfrak{M}) = aD_0(\mathfrak{M})$ с $a = 1$. Предположим поэтому, что существует конечное $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M} \neq (0)$, и выберем при помощи леммы 8.1.3 фундаментальную последовательность $\mathfrak{S}$. Тогда лемма 8.2.2 даст для $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, конечных и $\neq (0)$:

$$\frac{D(\mathfrak{N})}{D(\mathfrak{M})} = \frac{D_0(\mathfrak{N})}{D_0(\mathfrak{M})} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right)_{\mathfrak{S}},$$

т. е. $D(\mathfrak{M})/D_0(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{N})/D_0(\mathfrak{N})$. Поэтому для таких $\mathfrak{M}$ $D(\mathfrak{M})/D_0(\mathfrak{M})$ не зависит от $\mathfrak{M}$; значит, это — конечная положительная константа a. При этом мы получаем $D(\mathfrak{M}) = aD_0(\mathfrak{M})$ для любого $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, которое конечно и $\neq (0)$. Но это верно также и при $\mathfrak{M} = (0)$ или бесконечном, ибо тогда обе части обращаются в 0 и ∞ соответственно. Таким образом, желаемое соотношение выполняется во всех без исключения случаях.

Это завершает доказательство.

С другой стороны, мы можем заметить, что лемма 8.2.2 показывает также, что $(\mathfrak{M}/\mathfrak{N})_{\mathfrak{S}}$ не зависит от выбора фундаментальной последовательности $\mathfrak{S}$. Оно тем не менее зависит от наличия такой последовательности, в то время как существование $D(\mathfrak{M})$ от него не зависит.

8.3. Связь между отношением порядка $\gtreqless$ и относительной размерностью устанавливается такой леммой.

Лемма 8.3.1. *Если $D(\mathfrak{M})$ — функция относительной размерности и $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, то $\mathfrak{M} \gtreqless \mathfrak{N}$ эквивалентно $D(\mathfrak{M}) \gtreqless D(\mathfrak{N})$ соответственно.*

Доказательство. Отношение $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ влечет за собой $D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{N})$ согласно определению 8.2.1, (ii). Рассмотрим теперь $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{M}$ конечно, ибо из бесконечности $\mathfrak{M}$ следовало бы, что $\mathfrak{M} \succsim \mathfrak{N}$; при этом $D(\mathfrak{M})$ тоже конечно. Далее, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ и случай $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$ исключается. Поэтому $\mathfrak{N} - \mathfrak{N}' \neq (0)$, $D(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}') > 0$ (оба раза используется определение 8.2.1, (i)). Теперь определение 8.2.1, (ii) и (iii) дает $D(\mathfrak{N}) = D(\mathfrak{N}') + D(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}') > D(\mathfrak{N}') = D(\mathfrak{M})$, $D(\mathfrak{M}) < D(\mathfrak{N})$.

Перемена мест $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ показывает, что $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}$ влечет за собой $D(\mathfrak{M}) > D(\mathfrak{N})$. Таким образом, $\mathfrak{M} \gtreqless \mathfrak{N}$ влечет за собой $D(\mathfrak{M}) \lesseqgtr D(\mathfrak{N})$ соответственно. Поскольку мы имеем полное разделение случаев, обратное тоже верно.

Суммируя леммы 8.2.1, 8.2.3 и 8.3.1, имеем

Теорема VII. *Функция относительной размерности $D(\mathfrak{M})$, охарактеризованная в определении 8.2.1 всегда существует, она единственна с точностью до произвольного постоянного (вещественного, конечного и положительного) множителя a. Конкретный выбор $D(\mathfrak{M})$, т. е. a, является нормировкой относительной размерности*

Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, то $\mathfrak{M} \gtreqless \mathfrak{N}$ эквивалентно $D(\mathfrak{M}) \lesseqgtr D(\mathfrak{N})$ соответственно.

Мы будем использовать $D(\mathfrak{M})$ для того, чтобы получить подробную характеристику самого $\mathbf{M}$. Для этого установим свойства непрерывности $D(\mathfrak{M})$.

Лемма 8.3.2. *Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... — (конечная или бесконечная) последовательность, все $\mathfrak{M}_i\eta\mathbf{M}$ и взаимно ортогональны. Тогда*

$$D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) = \Sigma_i D(\mathfrak{M}_i).$$

Доказательство. Те $\mathfrak{M}_i$, которые равны (0), не меняют ни одну из сторон равенства, поэтому мы можем опустить их. Далее, будем считать, что все $\mathfrak{M}_i \neq (0)$ и $D(\mathfrak{M}_i) > 0$.

Предположим сначала, что последовательность конечна, скажем $\mathfrak{M}_1, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{M}_n$. Для $n=0$, 1 наше утверждение очевидно, для $n=2$ оно совпадает со свойством (iii) определения 8.2.1. Таким образом, нужно рассмотреть лишь случай $n = 3, 4, \ldots$, предполагая утверждение уже доказанным для $n-1$. Тогда, поскольку $[\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n] = [[\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}], \mathfrak{M}_n]$, а утверждение верно для $n-1$ и для двух слагаемых, оно верно и для n.

Предположим далее, что последовательность бесконечна. Тогда мы имеем

$$[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots] = [\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n, [\mathfrak{M}_{n+1}, \mathfrak{M}_{n+2}, \ldots]],$$

так что

$$D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) = \sum_{i=1}^{n} D(\mathfrak{M}_i) + D([\mathfrak{M}_{n+1}, \mathfrak{M}_{n+2}, \ldots]) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} D(\mathfrak{M}_i).$$

Поэтому $\sum_{i=1}^{n} D(\mathfrak{M}_i) \leqslant D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots])$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, а значит, и $\sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i) \leqslant D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots])$.

Предположим теперь, что имеет место строгое неравенство. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i)$ конечна. Поэтому $\lim_{i\to\infty} D(\mathfrak{M}_i) = 0$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$ (фактически $\mathfrak{M}_i$), что $0 < D(\mathfrak{N}) < \varepsilon$. Выберем такое $\mathfrak{N}$ для

$$\varepsilon = D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) - \sum_{1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i) > 0.$$

Рассмотрим выражение $D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) - \sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i)$. Оно равняется $(D(\mathfrak{M}_1) + D([\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots])) - \sum_{1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i) = D([\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots]) - \sum_{i=2}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i)$. Иными словами, оно не меняется при замене $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ на $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3 \ldots$ Применяя это i_0 раз, мы видим, что оно не изменится, даже если мы перейдем к $\mathfrak{M}_{i_0+1}, \mathfrak{M}_{i_0+2}, \ldots$ Далее, $\sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_{i_0+i}) = \sum_{i_0+1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i)$ может быть сделано произвольно малым, если i_0 достаточно велико. Поэтому мы можем сделать его $\leqslant D(\mathfrak{N})$. Возьмем теперь $\mathfrak{M}_{i_0+1}, \mathfrak{M}_{i_0+2}, \ldots$ в качестве $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ Мы видим при этом, что $\sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i) \leqslant D(\mathfrak{N})$ и все еще $D(\mathfrak{N}) < D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) - \sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i)$ и a fortiori $D(\mathfrak{N}) < D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots])$.

Теперь мы построим последовательность $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots$ взаимно ортогональных множеств $\mathfrak{N}_i\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}$ с $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{N}_i$. Построение будем вести по индукции. Предположим, что для $i = 1, 2, \ldots$ все $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{i-1}$ уже построены и удовлетворяют нашим условиям, тогда мы определим $\mathfrak{N}_i$ следующим образом: $D(\mathfrak{N}_j) = D(\mathfrak{M}_j)$, $j = 1, \ldots, i-1$, конечно, так что $D(\mathfrak{N} - [\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{i-1}]) = D(\mathfrak{N}) - \sum_{j=1}^{i-1} D(\mathfrak{N}_j) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_j) - \sum_{j=1}^{i-1} D(\mathfrak{M}_j) = \sum_{j=i}^{\infty} D(\mathfrak{M}_j) \geqslant D(\mathfrak{M}_i)$, $\mathfrak{M}_i \precsim \mathfrak{N} - [\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{i-1}]$, а потому $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N} - [\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{i-1}]$. Такой выбор $\mathfrak{N}_i$ удовлетворяет нашим условиям.

Теперь $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{N}_i$, все $\mathfrak{M}_i$ взаимно ортогональны и все $\mathfrak{N}_i$ — тоже взаимно ортогональны, так что приложима лемма 6.1.2, которая дает $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, ..] \sim \sim [\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, ...] \subset \mathfrak{N}$, $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, ...] \precsim \mathfrak{N}$, $D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, ...]) \leqslant D(\mathfrak{N})$. Но, с другой стороны, мы имеем $D(\mathfrak{N}) < D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 ...])$, что приводит к противоречию. Таким образом, наше исходное предположение, касающееся знака $<$, оказывается неверным и для исходной последовательности должно выполняться равенство

$$D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, ...]) = \sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i).$$

Этим и завершается доказательство.

Лемма 8.3.3. *Пусть* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ — *бесконечная последовательность, в* $\mathfrak{M}_i \eta \mathbf{M}$ *и* $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \ldots$ *Тогда*

$$\lim_{i \to \infty} D(\mathfrak{M}_i) = D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, ...]).$$

Доказательство. Положим $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}_i - \mathfrak{M}_{i-1}$ для $i = 2, 3, \ldots$ Тогда все $\mathfrak{N}_i \eta \mathbf{M}$ и взаимно ортогональны. Поэтому к ним приложима лемма 8.3.2, которая дает

$$\sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{N}_i) = D([\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, ...]).$$

Далее, $[\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_i] = \mathfrak{M}_i$, так что $[\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, ...] = [\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, ...]$, и, кроме того,

$$\sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{N}_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} D(\mathfrak{N}_i) = \lim_{n \to \infty} D([\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n]) = \lim_{n \to \infty} D(\mathfrak{M}_n).$$

Таким образом, мы имеем $\lim_{i \to \infty} D(\mathfrak{M}_i) = D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, ...])$.

Лемма 8.3.4. *Пусть* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ — *бесконечная последовательность, все* $\mathfrak{M}_i \eta \mathbf{M}$ *и* $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \ldots$ *Если не все* $\mathfrak{M}_i$ *бесконечны, то*

$$\lim_{i \to \infty} D(\mathfrak{M}_i) = D(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \cdot \ldots).$$

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{M}_{i_0}$ конечно. Положим $\mathfrak{M}'_i = \mathfrak{M}_{i_0} - \mathfrak{M}_{i_0+i}$. Тогда все $\mathfrak{M}'_i \eta \mathbf{M}$ и $\mathfrak{M}'_1 \subset \mathfrak{M}'_2 \subset \ldots$, так что к ним можно применить лемму 8.3.3, которая дает $\lim_{i \to \infty} D(\mathfrak{M}'_i) = D([\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2, \ldots])$.

Но $D(\mathfrak{M}'_i) = D(\mathfrak{M}_{i_0} - \mathfrak{M}_{i_0+i}) = D(\mathfrak{M}_{i_0}) - D(\mathfrak{M}_{i_0+i})$ и $[\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2, \ldots] = [\mathfrak{M}_{i0} - \mathfrak{M}_{i_0+1}, \mathfrak{M}_{i_0} - \mathfrak{M}_{i_0+2}, \ldots] = \mathfrak{M}_{i_0} - (\mathfrak{M}_{i_0+1} \cdot \mathfrak{M}_{i_0+2} \cdot \ldots) = \mathfrak{M}_{i_0} - (\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \cdot \ldots)$. Таким образом, мы получаем, что

$$D(\mathfrak{M}_{i_0}) - \lim_{i \to \infty} D(\mathfrak{M}_{i_0+i}) = D(\mathfrak{M}_{i_0}) - D(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \cdot \ldots)$$

и

$$\lim_{i \to \infty} D(\mathfrak{M}_{i_0+i}) = D(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \cdot \ldots),$$

или, что то же самое, $\lim_{i \to \infty} D(\mathfrak{M}_i) = D(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 \cdot \ldots)$.

Следующий критерий оказывается полезным, потому что он дает условия на функции относительной размерности, которые не используют явным образом понятия конечности и бесконечности множеств $\mathfrak{M} \eta \mathbf{M}$.

Лемма 8.3.5. *Если вещественнозначная функция* $D'(\mathfrak{M})$, *определенная на всех линейных замкнутых множествах* $\mathfrak{M} \eta \mathbf{M}$, *принимает только значения* $\geqslant 0$ *и* $\leqslant \infty$ *и если некоторые из фактически принимаемых ею значений* $\neq 0, \infty$, *то условия* (ii) *и* (iii) *из определения* 8.2.1 *достаточны для того, чтобы* $D'(\mathfrak{M})$ *была функцией относительной размерности.*

Доказательство. Мы должны вывести (i) из определения 8.2.1 исходя из этих условий. Выберем $\overline{\mathfrak{M}}\eta\mathbf{M}$ с $\infty > D'(\overline{\mathfrak{M}}) > 0$.

Поскольку (0) ортогонально $\overline{\mathfrak{M}}$ и $[\overline{\mathfrak{M}}, (0)] = \overline{\mathfrak{M}}$, условие (iii) дает $D'(\overline{\mathfrak{M}}) + D'((0)) = D'(\overline{\mathfrak{M}})$, а так как $D'(\overline{\mathfrak{M}})$ конечно, это означает, что $D'((0)) = 0$.

Если какое-нибудь $\mathfrak{M}$ бесконечно, то и $\mathfrak{H}$ бесконечно и $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{H}$. Тогда благодаря (ii) нам остается доказать только, что $D'(\mathfrak{H}) = \infty$. Согласно лемме 7.2.3, примененной к $\mathfrak{H}$, мы имеем $2D'(\mathfrak{H}) = D'(\mathfrak{H})$, откуда $D'(\mathfrak{H}) = 0$ или ∞. Но $D'(\mathfrak{H}) = D'(\overline{\mathfrak{M}}) + D'(\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{M}}) \geqslant D'(\overline{\mathfrak{M}}) > 0$, так что $D'(\mathfrak{H}) = \infty$. Это распространяется и на все бесконечные $\mathfrak{M}$.

Если $\mathfrak{M}$ конечно и не равно (0), то применим лемму 7.1.3 к $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ и к $\overline{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}$ (взятым в качестве $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ из леммы). Тогда (ii) и (iii) дают $D'(\mathfrak{M}) \leqslant ([\mathfrak{M}/\overline{\mathfrak{M}}] + 1) D'(\overline{\mathfrak{M}})$. Поэтому $D'(\overline{\mathfrak{M}}) < \infty$ с необходимостью влечет за собой $D'(\mathfrak{M}) < \infty$. Далее, $D'(\overline{\mathfrak{M}}) \leqslant ([\overline{\mathfrak{M}}/\mathfrak{M}] + 1) D'(\mathfrak{M})$. Поэтому из $D'(\overline{\mathfrak{M}}) > 0$ с необходимостью следует, что $D'(\mathfrak{M}) > 0$. Таким образом, $0 < D'(\mathfrak{M}) < \infty$, что и завершает доказательство.

8.4. Теперь мы переходим к поиску инвариантных характеристик **M** в терминах его функции относительной размерности $D(\mathfrak{M})$.

Лемма 8.4.1. *Множество* Δ *значений функции* $D(\mathfrak{M})$ (*т. е. множество всех значений данной* $D(\mathfrak{M})$ *для всех* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$) *обладает следующими свойствами:*

(i) *элементами* Δ *являются вещественные числа* $\geqslant 0$, $\leqslant \infty$;

(ii) $0 \in \Delta$, Δ *содержит наибольший элемент* $\bar{\alpha} > 0$;

(iii) $\alpha, \beta \in \Delta$ *и* $\alpha > \beta$ *влечет за собой* $\alpha - \beta \in \Delta$;

(iv) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \Delta$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leqslant \bar{\alpha}$ *влекут за собой* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \in \Delta$.

Доказательство. Утверждение (i) очевидно.

Утверждение (ii): $D((0)) = 0$; $D(\mathfrak{H}) = \bar{\alpha}$, ибо $\mathfrak{H} \neq (0)$, а значит, $D(\mathfrak{H}) > 0$.

Утверждение (iii): β должно быть конечно. Выберем $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$ с $D(\mathfrak{M}) = \alpha$, $D(\mathfrak{N}) = \beta$. Тогда $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}$, $D(\mathfrak{N}') = D(\mathfrak{N}) = \beta$ конечно, так что $D(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}') = D(\mathfrak{M}) - D(\mathfrak{N}') = \alpha - \beta$.

Утверждение (iv): если какое-либо $\alpha_j = \infty$, то и $\sum_1^{\infty} \alpha_i = \infty$, так что $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \alpha_j \in \Delta$, поэтому мы можем считать, что все α_i конечны. Определим по индукции последовательность $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ взаимно ортогональных множеств $\mathfrak{M}_i\eta\mathbf{M}$ с $D(\mathfrak{M}_i) = \alpha_i$. Предположим, что для $i = 1, 2, \ldots$ множества $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}$, удовлетворяющие этим условиям, уже определены, тогда построим $\mathfrak{M}_i$ следующим образом:

$$D(\mathfrak{H} - [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}]) = D(\mathfrak{H}) - \sum_1^{i-1} D(\mathfrak{M}_j) = \bar{\alpha} - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j - \sum_1^{i-1} \alpha_j = \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_i.$$

Выберем $\mathfrak{M}'_i\eta\mathbf{M}$ с $D(\mathfrak{M}_i) = \alpha_i$, тогда $\mathfrak{M}'_i \precsim \mathfrak{H} - [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}]$, $\mathfrak{M}'_i \sim \mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{H} - [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}]$. Такое определение $\mathfrak{M}_i$ удовлетворяет всем требованиям. Теперь по лемме 8.3.2 $D([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) = \sum_{i=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$.

Лемма 8.4.2. *Единственными множествами* Δ, *удовлетворяющими условиям* (i) — (iv) *леммы* 8.4.1, *являются следующие* ($\bar{\varepsilon}$, $\bar{\alpha}$ *конечны*):

(I_n) : $\bar{\varepsilon} > 0$, $n = 1, 2, \ldots$; Δ *состоит из всех* $i\bar{\varepsilon}$, $i = 0, 1, \ldots, n$;

(I_∞) : $\bar{\varepsilon} > 0$; Δ *состоит из всех* $i\bar{\varepsilon}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \infty$;

(II_1) : $\bar{\alpha} > 0$; Δ *состоит из всех* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \bar{\alpha}$;

(II_∞) : Δ *состоит из всех* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$;

(III_∞) : Δ *состоит из* $0, \infty$.

Доказательство. Множество Δ содержит 0 согласно (iii) и некоторый элемент, больший нуля, согласно (i), (ii). Если оно не содержит элементов >0, $<\infty$, то состоит в точности из 0 и ∞, что как раз соответствует случаю (III_∞).

Будем теперь считать, что оно содержит элементы >0, $<\infty$.

Сначала предположим, что это множество содержит наименьший элемент $\bar{\varepsilon}$. Если $\alpha \in \Delta$ и конечно, то существует $i = 0, 1, \ldots$ с $i\bar{\varepsilon} \leqslant \alpha < (i+1)\bar{\varepsilon}$. Если $i\bar{\varepsilon} \neq \alpha$, то согласно (iii) числа $\alpha, \alpha - \bar{\varepsilon}, \ldots, \alpha - i\bar{\varepsilon}$ принадлежат Δ. Но $0 < \alpha - i\bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}$, что невозможно. Поэтому $\alpha = i\bar{\varepsilon}$. В частности, $\bar{\alpha} = n\bar{\varepsilon}$, $n = 0$, $1, \ldots$, если оно конечно, и так как $\bar{\alpha} > 0$, то $n \neq 0$. Если же $\bar{\alpha}$ бесконечно, мы можем написать $\bar{\alpha} = \infty\bar{\varepsilon}$, так что в любом случае $\bar{\alpha} = n\bar{\varepsilon}$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Для всех остальных $\alpha \in \Delta$, $\alpha < \bar{\alpha}$, так что α конечны, $\alpha = i\bar{\varepsilon}$, и поскольку $\alpha < \bar{\alpha}$, то $i < n$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Обратно, если $i = 0, 1, \ldots, n-1$, то $i\bar{\varepsilon} < n\bar{\varepsilon}$, $\bar{\alpha}$ и (iv) с $\alpha_1 = \ldots = \alpha_i = \bar{\varepsilon}$, $\alpha_{i+1} = \alpha_{i+2} = \ldots = 0$ дает $i\bar{\varepsilon} \in \Delta$. Таким образом, Δ состоит из всех $i\bar{\varepsilon}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, что соответствует случаю (I_n), если $n = 1, 2, \ldots$, и случаю (I_∞), если $n = \infty$.

Допустим, наконец, что наименьший элемент >0, $<\infty$ в Δ не существует. Пусть ε' — точная нижняя грань элементов $\varepsilon > 0$; если бы оказалось, что $\varepsilon' > 0$, то существовало бы $\alpha \in \Delta$, $\alpha > 0$ с $\alpha < 2\varepsilon'$, и так как из $\alpha = \varepsilon'$ следовало бы, что α — наименьший элемент >0, $<\infty$ в Δ, то $\alpha > \varepsilon'$. Далее существует $\beta \in \Delta$, $\beta > 0$ с $\beta < \alpha$ и $\beta > \varepsilon'$. Тогда $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha > \beta$ и согласно (iii) $\alpha - \beta \in \Delta$, но $\alpha - \beta > 0$, $\alpha - \beta < 2\varepsilon' - \varepsilon' = \varepsilon'$, что невозможно. Значит, $\varepsilon' = 0$, и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha \in \Delta$ с $0 < \alpha < \varepsilon$.

Пусть теперь $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 \leqslant \bar{\alpha}$. Выберем $\alpha \in \Delta$ с $0 < \alpha < \beta_2 - \beta_1$. Тогда существует $i = 0, 1, 2, \ldots$, для которого $i\alpha \leqslant \beta_1 \leqslant (i+1)\alpha$, так что $(i+1)\alpha = i\alpha + \alpha < \beta_1 + \beta_2 - \beta_1 = \beta_2$. Поскольку $(i+1)\alpha < \bar{\alpha}$, то (iv) с $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{i+1} = \alpha$, $\alpha_{i+2} = \alpha_{i+3} = \ldots = 0$ дает $(i+1)\alpha \in \Delta$. Итак, мы видим, что существует $\beta \in \Delta$ с $\beta_1 < \beta < \beta_2$.

Рассмотрим теперь любое α с $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ и образуем последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots$ с $0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \alpha$ и $\lim_{i\to\infty}\beta_i = \alpha$. Для каждого i выберем $\beta_i' \in \Delta$ с $\beta_i < \beta_i' < \beta_{i+1}$. Тогда $\beta_i' > \beta_{i-1}'$, $\beta_i' - \beta_{i-1}' \in \Delta$, $i = 2, 3, \ldots$ Положим $\alpha_1 = \beta_1'$, $\alpha_i = \beta_i' - \beta_{i-1}'$ для $i = 2, 3, \ldots$ и применим (iv): $\sum_1^\infty \alpha_i = \lim_{i\to\infty}\beta_i' = \alpha < \bar{\alpha}$, так что $\alpha \in \Delta$.

Таким образом, Δ состоит из всех α с $0 \leqslant \alpha \leqslant \bar{\alpha}$, что представляет собой случай (II_1), если $\bar{\alpha}$ конечно, и случай (II_∞), если $\bar{\alpha} = \infty$.

Эти рассуждения исчерпывают все возможности.

Применим теперь одновременно леммы 8.4.1 и 8.4.2, имея в то же время в виду, что мы можем нормировать $D(\mathfrak{M})$ так, чтобы сделать $\bar{\varepsilon} = 1$ (в случаях (I_n) и (I_∞)) или соответственно $\bar{\alpha} = 1$ (в случае (II_1)). Тогда у нас получится

Теорема VIII. *Область значений* $D(\mathfrak{M})$ (*т. е. множество всех значений, принимаемых данной функцией* $D(\mathfrak{M})$ *для всех* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$) *есть одно из следующих множеств*:

(I_n) с $n = 1, 2, \ldots$ — *множество* $0, 1, \ldots, n$;
(I_∞) — *множество* $0, 1, \ldots, \infty$;
(II_1) — *множество всех* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$;
(II_∞) — *множество всех* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$;
(III_∞) — *множество* $0, \infty$.

В случаях (I_n), (I_∞), (II_1) мы использовали *стандартную нормировку* $D(\mathfrak{M})$. Случай (II_∞) не нормируем, а в случае (III_∞) нормировка вообще не нужна, ибо 0 и ∞ не меняются при умножении на конечное положительное число.

Мы называем (I_n) и (II_1) конечными, а (I_∞), (II_∞), (III_∞) — бесконечными случаями. С другой стороны, мы назовем случаи I (т. е, (I_n) и (I_∞)) дискретными, II (т. е. (II_1) и (II_∞)) — непрерывными, а III (т. е. (III_∞)) — чисто бесконечным случаем.

Немедленно возникают следующие проблемы.

Проблема 3. *Какие из классов* (I_n) — (III_∞) *реально существуют*?

Проблема 4. *Какие комбинации этих классов возникают для парных факторов* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$? *Для общей факторизации* $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$?

Проблема 5. *Какому классу принадлежит прямой фактор* $\mathbf{M}$?

Проблема 6. *Являются ли все факторы* $\mathbf{M}$, *принадлежащие одному классу, изоморфными как кольца, или существуют дальнейшие инвариантные характеристики*?

Проблема 7. *Являются ли все факторизации* $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$, *в которых каждое* $\mathbf{M}_i$ *принадлежит заданному классу, алгебраически изоморфными или даже пространственно изоморфными или существуют другие инвариантные характеристики*?

Мы можем представить значительный материал, проясняющий эти проблемы, но единственная, на которую может быть дан полный ответ, — это проблема 5.

8.5. Установим инвариантность объектов последних пунктов относительно изоморфизмов колец.

Лемма 8.5.1. *Заменим* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\,\eta\mathbf{M}$ *их проекторами* $E = P_{\mathfrak{M}}$, $F = P_{\mathfrak{N}}$, *которые* $\in\mathbf{M}$ (*см. определения* 6.1.1, 7.1.1 и 8.2.1). *Понятия* $E \sim F$ ($\ldots \mathbf{M}$), *конечность и бесконечность* E *относительно* $\mathbf{M}$, $D_{\mathbf{M}}(E)$ (*кроме нормировки*) *инвариантны относительно алгебраического изоморфизма колец*.

Доказательство. Соотношение $E \sim F$ означает, что существует такой $U \in \mathbf{M}$, что $UU^*U = U$, $U^*U = E$, $UU^* = F$, E бесконечен, если существует такой $F \in \mathbf{M}$, что $F^2 = F^* = F$, $EF = F$, $F \neq E$, $F \sim E$. Функция $D(E)$ охарактеризована в определении 8.2.1 с использованием лишь понятий 0, конечности, бесконечности, $E \sim F$ и $E + F$ с $EF = 0$. Поэтому все эти конструкции инвариантны относительно изоморфизмов колец.

Теперь, комбинируя лемму 8.5.1 и теорему VIII, можно сделать такое утверждение:

Теорема IX. *Случаи* (I_n) — (III_∞) *из теоремы* VIII *инвариантны относительно алгебраических изоморфизмов колец. Точно так же инвариантны и* $D_M(E)$ (*мы пишем* $E = P_{\mathfrak{M}} \in \mathbf{M}$ для $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$), *кроме ее нормировки, и даже стандартная нормировка* (*в случаях* (I_n) — (II_1)).

8.6. Теперь мы найдем в этой классификации место прямых факторов.

Лемма 8.6.1. $\mathbf{M}$ *является прямым фактором тогда и только тогда, когда он принадлежит дискретному случаю:* (I_n) *или* (I_∞). *Если использовать пространственный изоморфизм* $\mathfrak{H}$ *с* $\mathfrak{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{H}_m$, *при котором* $\mathbf{M}$ *переходит в* $\mathbf{B}_i^{(i)}$, *то соответствующее* $\mathfrak{H}_i$ *будет* n*-мерным евклидовым пространством и соответственно гильбертовым пространством. Если* $E_i = P_{\mathfrak{M}_i}$ — *проекции в* $\mathfrak{H}_i$, *то* $D_M(E_i^{(i)})$ *совпадает в стандартной нормировке просто с обычным понятием размерности.*

Доказательство. В случаях (I) существует $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ с $D(\mathfrak{M}) = 1$. Если $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, то $D(\mathfrak{N}) \leqslant D(\mathfrak{M})$, $D(\mathfrak{N}) = 0, 1$. Первое влечет за собой $\mathfrak{N} = (0)$, второе — $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$, а поскольку $\mathfrak{M}$ конечно и случай $\mathfrak{N} \subsetneqq \mathfrak{M}$ исключается, то $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{M} \neq (0)$. Поэтому $\mathfrak{M}$ минимально и $\mathbf{M}$ — прямой фактор (см. теорему IV). Таким образом, наше условие достаточно.

Все остальные утверждения предполагают, что $\mathbf{M}$ — прямой фактор, а потому алгебраически (даже вполне) изоморфен $\mathbf{B}_i$. Поэтому мы можем заменить (согласно теореме IX) $\mathfrak{H}$, $\mathbf{M}$ на $\mathfrak{H}_i$, $\mathbf{B}_i$, т. е. считать, что $\mathbf{M} = \mathbf{B}$.

Любое одномерное $\mathfrak{M} = [\varphi]$, $\varphi \neq 0$ (теперь все $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$), причем $\mathfrak{M} \neq (0)$ и конечно ($\mathfrak{N} \subsetneqq \mathfrak{M}$ влечет за собой $\mathfrak{N} = (0)$, что исключает случай $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$), так что $\infty > D_B([\varphi]) > 0$. Кроме того, $[\varphi] \sim [\psi]$, так что $D_B([\varphi]) = D_B([\psi])$, $D_B([\varphi])$ постоянно. Отнормируем $D_B(\mathfrak{M})$ так, чтобы получить $D_B([\varphi]) = 1$. Тогда лемма 8.3.2 дает нам $D_B(\mathfrak{M})$ — обычная размерность $\mathfrak{M}$.

При этом если $\mathfrak{H}$ — n-мерное евклидово пространство, такая функция $D_B(\mathfrak{M})$ имеет область значений $0, 1, \ldots, n$, если это — гильбертово пространство, она имеет область значений $0, 1, \ldots, \infty$. Это доказывает, что $\mathbf{M}$ соответствует случаям (I_n) и (I_∞), причем нормировка стандартна.

Этим завершается доказательство.

Лемма 8.6.1 позволяет разрешить проблемы 3 — 7 в дискретных случаях (т. е. для прямых факторов). Приведем подробности решения.

Дискретные случаи (I_n) для любого $n = 1, 2, \ldots$ и (I_∞) действительно существуют; в факторизации $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_m$ можно предписывать любую комбинацию дискретных случаев (I_n) и (I_∞) для $\mathbf{M}_i$. Нужно только построить $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{H}_m$, где $\mathfrak{H}_i$ — соответствующее n-мерное евклидово пространство или гильбертово пространство, и положить $\mathbf{M}_i = \mathbf{B}_i^{(i)}$. Более того, если $m - 1$ из факторов $\mathbf{M}_i$ принадлежит дискретным случаям, то и все они дискретны (см. лемму 5.4.1); в частности, два фактора $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ (и a fortiori два парных фактора) или оба относятся к дискретным случаям, или ни один из них не относится. Прямые факторы идентичны факторам в дискретных случаях. Если в факторизации $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_m$ все $\mathbf{M}_i$ относятся к дискретным случаям, то все они — прямые факторы, так что $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$ — прямая факторизация (см. лемму 5.4.1). Таким

образом, пространственный изоморфизм переводит $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{H}_m$, а каждый $\mathbf{M}_i$ — в $\mathbf{B}_i^{(i)}$, так что $\mathfrak{H}_i$ определяются классами $\mathbf{M}_i$ (ср. выше). Так, если два фактора $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ принадлежат одному дискретному классу, они вполне изоморфны (см. лемму 2.3.4 и [22, § 4], ср. факторизации $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ и $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$); если в двух факторизациях $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_m$ и $\mathbf{N}_1, \ldots, \mathbf{N}_m$ соответствующие $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{N}_i$ принадлежат одинаковым дискретным классам для $i = 1, \ldots, m$, то мы имеем даже пространственный изоморфизм.

Часть III

ПАРЫ ФАКТОРОВ

Глава IX

КАЧЕСТВЕННОЕ СРАВНЕНИЕ $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ И $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$

9.1. Сначала нам нужно будет изучить бесконечные суммы знакоопределенных операторов. Следующие рассмотрения основаны на конструкции К. Фридрихса [7, с. 472, 476]. Ситуация, которую мы будем исследовать, описывается следующим образом.

Определение 9.1.1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность всюду определенных, ограниченных эрмитовых (полу)определенных операторов. Иными словами, для каждого $i = 1, 2, \ldots$ существует такое α_i, что $0 \leqslant (A_i f, f) \leqslant \alpha_i \| f \|^2$ тождественно для всех $f \in \mathfrak{H}$ (см. [16, с. 73—74]).*

Положим $A_0 = 1$. Определим $\mathfrak{A}$ как множество векторов $f \in \mathfrak{H}$, для которых конечна сумма $\sum_{i=0}^{\infty} (A_i f, f)$. Для любых двух $f, g \in \mathfrak{H}$, для которых $\sum_{i=0}^{\infty} (A_i f, g)$ абсолютно сходится, обозначим эту сумму через $Q(f, g)$.

Лемма 9.1.1. *$\mathfrak{A}$ — линейное множество. Если f, $g \in \mathfrak{A}$, то определено $Q(f, g)$. Если взять αf и $f + g$ в качестве линейных операций и $Q(f, g)$ — в качестве скалярного произведения, то $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям* A, B, E *из* [16, с. 64 — 66]. (*Возможно, однако, что* $\mathfrak{A} = (0)$.)

Доказательство. Так как $(A_i \alpha f, \alpha f) = |\alpha|^2 (A_i f, f)$, из $f \in \mathfrak{A}$ следует, что и $\alpha f \in \mathfrak{A}$. Поскольку

$$(A_i (f+g), (f+g)) \leqslant (A_i (f+g), (f+g)) + (A_i (f-g), (f-g)) = \\ = 2(A_i f, f) + 2(A_i g, g),$$

из $f, g \in \mathfrak{A}$ следует, что и $f + g \in \mathfrak{A}$. Таким образом, $\mathfrak{A}$ — линейное множество. Имеем далее $|(A_i f, g)| \leqslant {}^1/_2 (A_i f, f) + {}^1/_2 (A_i g, g)$ (это доказывается буквально так же, как обычное неравенство Шварца, см. [16, с. 64]), так что если $f, g \in \mathfrak{A}$, то $\sum_{i=0}^{\infty} (A_i f, g)$ абсолютно сходится и, значит, определено $Q(f, g)$.

Проверим теперь A, B и E из [16]. Все требования A и B очевидны, кроме B,4. Последнее тоже выполнено, ибо из $f \neq 0$ следует, что $Q(f, f) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_i f, f) \geqslant (A_0 f, f) = \| f \|^2 > 0$. Рассмотрим E. Мы должны доказать, что если $f_1, f_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ и $\lim_{m,n\to\infty} Q(f_m - f_n, f_m - f_n) = 0$, то существует $f \in \mathfrak{A}$ с

$\lim_{n\to\infty} Q(f_n - f, f_n - f) = 0$. Поскольку $Q(f_m - f_n, f_m - f_n) \geqslant \| f_m - f_n \|^2$, мы имеем $\lim_{m,n\to\infty} \| f_m - f_n \|^2 = 0$. Поэтому существует $f \in \mathfrak{H}$ с $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$. Так как

$$\lim_{m,n\to\infty} Q(f_m - f_n, f_m - f_n) = 0,$$

для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что из $m, n \geqslant n_0$ следует, что

$$Q(f_m - f_n, f_m - f_n) \leqslant \varepsilon$$

и a fortiori $\sum_{i=0}^{j} (A_i(f_m - f_n), f_m - f_n) \leqslant \varepsilon$. Пусть теперь $n \to \infty$, из непрерывности всех A_i следует, что $\sum_{i=0}^{j} (A_i(f_m - f), f_m - f) \leqslant \varepsilon$. Это выполнено для любого $j = 0, 1, \ldots$, значит, и $\sum_{i=0}^{\infty} (A_i(f_m - f), f_m - f) \leqslant \varepsilon$. Последнее доказывает, что $f_m - f \in \mathfrak{A}$, $f = f_m - (f_m - f) \in \mathfrak{A}$ и, далее, что $Q(f_m - f, f_m - f) \leqslant \varepsilon$. Итак, мы получили, что $f \in \mathfrak{A}$ и $\lim_{m\to\infty} Q(f_m - f, f_m - f) = 0$. Это завершает доказательство.

Лемма 9.1.2. *Для любого $f \in \mathfrak{H}$ существует одно и только одно $f^* \in \mathfrak{A}$, для которого $(f, g) = Q(f^*, g)$ для всех $g \in \mathfrak{A}$. При этом $\| f^* \| \leqslant \| f \|$.*

Доказательство. Рассмотрим $L(g) = (f, g)$ с $g \in \mathfrak{A}$ как функционал на $\mathfrak{A}$. Очевидно, мы имеем: 1) $L(ag) = aL(g)$, 2) $L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2)$. Более того, $|L(g)| = |(f, g)| \leqslant \| f \| \cdot \| g \| \leqslant \| f \| \sqrt{Q(g, g)}$, т. е. 3) $|L(g)| \leqslant a_0 \sqrt{Q(g, g)}$, где $a_0 = \| f \|$. При этих условиях, конечно, существует $f^* \in \mathfrak{A}$, для которого $L(g) = Q(f^*, g)$ с произвольными $g \in \mathfrak{A}$, причем f^* определен однозначно (см. [11, с. 11; 13а, с. 34]). Иными словами, $(f, g) = Q(f^*, g)$; если $g = f^*$, имеем, в частности, $Q(f^*, f^*) = (f, f^*) \leqslant \| f \| \| f^* \|$, но, так как $Q(f^*, f^*) \geqslant \| f^* \|^2$, отсюда следует, что $\| f^* \| \leqslant \| f \|$.

Определение 9.1.2. *Определим оператор B равенством $Bf = f^*$, где f^* описан в лемме* 9.1.2.

Лемма 9.1.3. *Оператор B является всюду определенным ограниченным эрмитовым, (полу)определенным (в $\mathfrak{H}$) оператором; образ $B \subset \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Очевидно, что B определен всюду; $(Bf, f) = (f^*, f) = Q(f^*, f^*)$ и $\leqslant \| f^* \| \| f \| \leqslant \| f \|^2$, так что B ограничен, эрмитов и (полу)определен. Поскольку $Bf = f^* \in \mathfrak{A}$, мы имеем образ $B \subset \mathfrak{A}$.

Лемма 9.1.4. *Образуем $B^{1/2}$ в смысле Ф. Риса (см. ссылку в доказательстве). Оператор $B^{1/2}$ всюду определен, ограничен эрмитов и (полу)определен. Образ $B^{1/2} = \mathfrak{A}$. Для $f \in \mathfrak{H} - [\mathfrak{A}]$ $B^{1/2} f = 0$, в то время как для $f, g \in [\mathfrak{A}]$ $(f, g) = Q(B^{1/2} f, B^{1/2} f)$.*

Доказательство. Относительно определения и характера $B^{1/2}$ см., например, [16, с. 113]. Из $B^{1/2} f = 0$ следует, что $Bf = B^{1/2}(B^{1/2} f) = 0$; $Bf = 0$ влечет за собой $\| B^{1/2} f \|^2 = (B^{1/2} f, B^{1/2} f) = (Bf, f) = 0$, $B^{1/2} f = 0$; $Bf = 0$ означает, что f^* из леммы 9.1.2 равен 0, т. е. $(f, g) = 0$ для $g \in \mathfrak{A}$. Это означает, что $f \in \mathfrak{H} - [\mathfrak{A}]$. Таким образом, мы имеем

$$(f; B^{1/2} f = 0) = (f; Bf = 0) = \mathfrak{H} - [\mathfrak{A}],$$

$$[\mathrm{Range}\, B^{1/2}] = [\mathrm{Range}\, B] = [\mathfrak{A}].$$

Рассмотрим $f \in [\mathfrak{A}]$. Тогда f является точкой конденсации образа $B^{1/2}$, так что существует такая последовательность $f_1, f_2, \ldots$, что $\lim_{n\to\infty} \| B^{1/2} f_n - f \| = 0$. Далее, все $Bf_n \in \mathfrak{A}$ и

$$Q(Bf_m - Bf_n, Bf_m - Bf_n) = (f_m - f_n, Bf_m - Bf_n) =$$
$$= (B^{1/2} f_m - B^{1/2} f_n, B^{1/2} f_m - B^{1/2} f_n) = \| B^{1/2} f_m - B^{1/2} f_n \|^2,$$

так что $\lim_{m,n\to\infty} Q(Bf_m - Bf_n, Bf_m - Bf_n) = 0$. Но $\mathfrak{A}$ удовлетворяет постулату полноты E (для $Q(\ldots,\ldots)$, см. лемму 9. 1. 1), так что существует $f^0 \in \mathfrak{A}$ с

$$\lim_{n\to\infty} Q(Bf_n - f^0, Bf_n - f^0) = 0.$$

Далее, $Q(g, g) \geqslant \| g \|^2$, поэтому $\lim_{n\to\infty} \| Bf_n - f^0 \| = 0$. С другой стороны, из непрерывности $B^{1/2}$ следует, что $\lim_{n\to\infty} \| Bf_n - B^{1/2} f \| = \lim_{n\to\infty} \| B^{1/2} (B^{1/2} f_n - f) \| = 0$, так что $f^0 = B^{1/2} f$, что доказывает включение $B^{1/2} f \in \mathfrak{A}$. Кроме того, мы обнаружили, что

$$\lim_{n\to\infty} Q(Bf_n - B^{1/2} f, Bf_n - B^{1/2} f) = 0.$$

Рассмотрим векторы $f, g \in [\mathfrak{A}]$. Тогда $B^{1/2} f, B^{1/2} g \in \mathfrak{A}$ и, образуя такую же, как и выше, последовательность $f_1, f_2, \ldots$ для f и ее аналог $g_1, g_2, \ldots$ для g благодаря непрерывности внутреннего произведения в $\mathfrak{A}$ в метрике $\mathfrak{A}$ ($Q(\ldots,\ldots)$, см. [16, с. 65]), мы с необходимостью имеем

$$Q(B^{1/2} f, B^{1/2} g) = \lim_{n\to\infty} Q(Bf_n, Bg_n) = \lim_{n\to\infty} (f_n, Bg_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (B^{1/2} f_n, B^{1/2} g_n) = (f, g).$$

Таким образом, $B^{1/2}$ отображает $[\mathfrak{A}]$ на некоторое подмножество $\mathfrak{A}'$ из $\mathfrak{A}$, причем это отображение изоморфно, если мы используем внутреннее произведение (f, g) в $[\mathfrak{A}]$ и $Q(f, g)$ в $\mathfrak{A}'$.

Из сказанного следует, что отображение взаимно однозначно. Далее, $[\mathfrak{A}]$ — замкнутое подмножество в топологическом пространстве $\mathfrak{H}$ (в топологии метрики $\| f - g \| = (f - g, f - g)^{1/2}$), так что $\mathfrak{A}'$ тоже полно, а поэтому должно быть замкнутым подмножеством $\mathfrak{A}$ (в топологии метрики $[Q(f - g, f - g)]^{1/2}$). В этом смысле $\mathfrak{A}'$ — замкнутое линейное подмножество $\mathfrak{A}$. Рассмотрим поэтому $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ (в смысле внутреннего произведения $Q(f, g)$). Включение $f \in \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ означает, что $f \in \mathfrak{A}$ и $Q(f, g) = 0$ для любого $g \in \mathfrak{A}'$, т. е. что $Q(f, B^{1/2} g') = 0$ для любого $g' \in [\mathfrak{A}]$. Для любых $g'', g' = B^{1/2} g'' \in [\mathfrak{A}]$ мы a fortiori имеем $Q(f, Bg'') = 0$, $(f, g'') = 0$ с любым g'', и, значит, $f = 0$. Это доказывает, что $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}' = (0)$. Далее, любой вектор $f \in \mathfrak{A}$ является суммой элемента из $\mathfrak{A}$ и элемента из $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ (это фундаментальная теорема о проекциях, приложимая к пространствам, удовлетворяющим, как и $\mathfrak{A}$, лишь свойствами A, B, E, см. [11, с. 14; 13а, с. 34]); поскольку $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}' = (0)$, это означает, что $f \in \mathfrak{A}'$. Таким образом, мы доказали, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. Мы видим, что $B^{1/2}$ отображает $[\mathfrak{A}]$ на $\mathfrak{A}$. В $\mathfrak{H} - [\mathfrak{A}]$ (мы снова используем внутреннее произведение (f, g) из $\mathfrak{H}$), однако, он равен 0. Поэтому образ $B^{1/2} = \mathfrak{A}$. Итак, мы доказали все утверждения нашей леммы.

Приведем еще одно важное свойство $B^{1/2}$.

Лемма 9.1.5. *Пусть* **M** — *кольцо, содержащее* 1. *Если указанные выше* A_1, A_2, ... *являются элементами* **M**, *то и* $B^{1/2} \in \mathbf{M}$.

Доказательство. Оператор $A_n \in \mathbf{M}$, $A_n \eta \mathbf{M}$, значит, A_n инвариантен относительно любого унитарного $U' \in \mathbf{M}'$. Поэтому $\mathfrak{A}$ и $Q(f, g)$, а вместе с ними и B, который был однозначно определен с их помощью, инвариантны относительно U'. Таким образом, $B \eta \mathbf{M}$ и по лемме 4.2.1 $B \in \mathbf{M}$. Отсюда следует, что $B^{1/2} \in \mathbf{M}$, например, согласно [19, с. 213].

9.2. Рассмотрим теперь множества $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ из определения 5.1.1.

Лемма 9.2.1. *Пусть* **M** — *кольцо, содержащее* 1. *Если* $g_0 \in \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}$, *то можно найти такие два линейных замкнутых оператора* X', $Y' \eta \mathbf{M}$ *со всюду плотными областями определения, что* $g_0 = X'Y'f_0$. (*Конечно,* f_0 *принадлежит области определения* Y', *а* $Y'f_0$ — *области определения* X'; X' *даже ограничен.*)

Доказательство. По условию леммы g_0 — точка конденсации множества всех $A'f_0$, $A' \in \mathbf{M}'$. Для любого $n = 1, 2, \ldots$ мы можем найти $A_n' \in \mathbf{M}'$ с $\| A_n' f_0 - g_0 \| \leqslant 1/2^n$.

Поэтому $\| A_{n+1}' f_0 - A_n' f_0 \| \leqslant (1/2^{n+1}) + (1/2^n) = 3/2^{n+1}$ и

$$(2^n (A_{n+1}' - A_n')^* (A_{n+1}' - A_n') f_0, f_0) = 2^n ((A_{n+1}' - A_n') f_0, (A_{n+1}' - A_n') f_0) =$$
$$= 2^n \| (A_{n+1}' - A_n') f_0 \|^2 \leqslant 2^n (3/2^{n+1})^2 = 9/2^{n+2}.$$

Проведем теперь построение из определения 9.1.1 с $2^n (A_{n+1}' - A_n')^* (A_{n+1}' - A_n')$ в качестве A_n. При этом получим $\mathfrak{A}$ и $Q(f, g)$, а также B, $B^{1/2}$ — из определения 9.1.2 и леммы 9.1.4, которые будем обозначать через B', $B'^{1/2}$. Лемма 9.1.5 дает $B'^{1/2} \in \mathbf{M}'$. Заметим, что наша оценка обеспечивает $f_0 \in \mathfrak{A}$.

Оператор $B'^{1/2}$ осуществляет взаимно однозначное отображение $[\mathfrak{A}]$ на $\mathfrak{A}$ (даже изоморфное! см. лемму 9.1.4). Определим (только на $\mathfrak{A}$!) обратный к нему оператор Y_0'. Поскольку $B'^{1/2} \in \mathbf{M}'$, мы имеем $\mathfrak{A}$-образ $B'^{1/2} \eta \mathbf{M}'$, так что $Y_0' \eta \mathbf{M}'$; по определению, Y_0' линеен и замкнут. Но область определения $Y_0' = \mathfrak{A}$ плотна только в $[\mathfrak{A}]$. Если мы положим $Y' = Y_0' P_{[\mathfrak{A}]}$, то, очевидно, $Y' \eta \mathbf{M}'$, линеен, замкнут и имеет всюду плотную область определения.

Рассмотрим $f \in \mathfrak{H}$. Тогда $B'^{1/2} f = B'^{1/2} P_{[\mathfrak{A}]} f \in \mathfrak{A}$ и $Q(B'^{1/2} f, B'^{1/2} f) = \| P_{[\mathfrak{A}]} f \|^2 \leqslant \leqslant \| f^2 \|$. Но $Q(B'^{1/2} f, B'^{1/2} f) = (B'^{1/2} f, B'^{1/2} f) + \sum_{n=1}^{\infty} (2^n (A_{n+1}' - A_n')^* (A_{n+1}' - A_n') B'^{1/2} f, B'^{1/2} f) = \| B'^{1/2} f \|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \| (A_{n+1}' - A_n') B'^{1/2} f \|^2 \geqslant 2^n \| (A_{n+1}' - A_n') B'^{1/2} f \|^2$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, так что

$$\| (A_{n+1}' - A_n') B'^{1/2} f \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2^n}} \| f \|,$$

$$\| A_{n+p}' - A_n') B'^{1/2} f \| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} + \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2^{n+p-1}}} \right) \| f \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}} \right) \| f \| = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2^n}} \| f \|,$$

или, что то же самое,

$$\| (A_m - A_n') B'^{1/2} f \| \leqslant (2 + \sqrt{2}) / \sqrt{2^{\mathrm{Min}(m,n)}} \| f \|.$$

Поэтому $\lim_{m,n\to\infty} \| (A_m - A_n') B'^{1/2} f \| \Rightarrow 0$ и существует единственный вектор f^* с $\lim_{n\to\infty} \| A_n' B'^{1/2} f - f^* \| = 0$. Определим оператор X' равенством $X'f = f^*$; тогда, очевидно, X' является равномерным пределом последовательности $A_1' B'^{1/2}$, $A_2' B'^{1/2}$, ... (см. [18, с. 384]), а потому замкнут и тоже $\eta\mathbf{M}'$.

Далее, $f_0 \in \mathfrak{A}$, поэтому $Y'f_0 = Y_0' f_0 \in [\mathfrak{A}]$ и $B'^{1/2} Y' f_0 = B'^{1/2} Y_0' f_0 = f_0$, g_0 — предел при $n \to \infty$ последовательности $A_n' f_0 = (A_n' B'^{1/2}) Y' f_0$, так что $g_0 = X'Y'f_0$.

Доказательство закончено.

Заметим, что из самого произведения операторов $X'Y'$ трудно извлечь какую-либо пользу. Оно, вообще говоря, не замкнуто, и непонятно, имеет ли оно вообще однозначное замыкание (см. [21, с. 300]). Мы увидим в пунктах 16.3, 16.4, как понятие конечности позволит преодолеть это препятствие; пока что это несущественно, ибо мы можем работать с X' и Y' порознь.

9.3. Сравним $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$ и $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$. Отныне и далее мы предполагаем, что $\mathbf{M}$ — фактор.

Лемма 9.3.1. *Если $g_0 = X'f_0$, где $X'\eta\mathbf{M}'$ — линейный замкнутый оператор со всюду плотной областью определения, то*

$$\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} \precsim \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}} \ (\ldots \mathbf{M}').$$

Доказательство. $X'\eta\mathbf{M}'$ означает, что X' коммутирует со всеми унитарными $U \in \mathbf{M}'' = \mathbf{M}$, т. е. со всеми элементами $\mathbf{M}^{(U)}$ (см. [18, с. 392]), а поскольку он линеен и замкнут, он будет коммутировать даже с операторами из $R(\mathbf{M}^{(U)}) = \mathbf{M}$ (см. [18, с. 392, 405]). Тогда мы имеем

$$\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} = [Ag_0, A \in \mathbf{M}] = [AX'f_0, A \in \mathbf{M}] = [X'Af_0, A \in \mathbf{M}] =$$
$$= [X'f, f \in (Af_0, A \in \mathbf{M})] \subset [X'f, f \in \text{Domain } X' \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}],$$

где Domain X' — область определения оператора X'. Положим $[\text{Domain } X' \times \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}] = \mathfrak{N}'$; ясно, что $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}$, а $X'\eta\mathbf{M}'$, $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}\eta\mathbf{M}'$ влечет за собой $\mathfrak{N}'\eta\mathbf{M}'$. Очевидно, $X' \cdot P_{[\mathfrak{N}']}$ — линейный замкнутый оператор со всюду плотной областью определения и $\eta\mathbf{M}'$. Полученные выше соотношения доказывают, что $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} \subset [\text{Range } (X' P_{\mathfrak{N}'})]$. С другой стороны,

$$[\text{Range}\,(X' \cdot P_{\mathfrak{N}'})^*] = \mathfrak{H} - (f, X'P_{\mathfrak{N}'} f = 0) \subset \mathfrak{H} - (f, P_{\mathfrak{N}'} f = 0) =$$
$$= \mathfrak{H} - (\mathfrak{H} - \mathfrak{N}') = \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}.$$

Используя лемму 6.2.1, мы получаем, что

$$\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} \subset [\text{Range}\,(X' \cdot P_{\mathfrak{N}'})] \sim [\text{Range}\,(X' \cdot P_{\mathfrak{N}'})^*] \subset \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}$$

($\sim$ понимается относительно $(\ldots \mathbf{M}')$), и потому $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} \precsim \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}} (\ldots \mathbf{M}')$.

Лемма 9.3.2. *Из $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}'} \precsim \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}'} (\ldots \mathbf{M})$ следует, что $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} \precsim \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}} (\ldots \mathbf{M}')$.*

Доказательство. Соотношение $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} \precsim \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}'} (\ldots \mathbf{M})$ означает, что $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}'} \sim \mathfrak{N}$ $(\ldots \mathbf{M})$, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}$. При этом частично изометрический оператор $U \in \mathbf{M}$ отображает $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}}$ на $\mathfrak{N}$, тогда как U^* отображает $\mathfrak{N}$ на $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}'}$.

Далее, $U_{g_0} \in \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}$, так что по лемме 9.2.1 $U_{g_0} = X' \cdot Y' f_0$, где X', Y' — линейные замкнутые операторы со всюду плотными областями определения. По лемме 9.3.1 $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}} \gtrsim \mathfrak{M}_{Y' f_0}^{\mathbf{M}} \gtrsim \mathfrak{M}_{X'Y' f_0}^{\mathbf{M}} = \mathfrak{M}_{Ug_0}^{\mathbf{M}}$, все $\gtrsim$ (... $\mathbf{M}'$). Но $U^* U g_0 = g_0$, так что

$$\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} = [Ag_0, A \in \mathbf{M}] = [AU^*Ug_0, A \in \mathbf{M}] \subset [BUg_0, \quad B \in \mathbf{M}] = \mathfrak{M}_{Ug_0}^{\mathbf{M}}.$$

Тогда $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} \subset \mathfrak{M}_{Ug_0}^{\mathbf{M}} \lesssim \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}$ (... $\mathbf{M}'$), $\mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}} \lesssim \mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}}$ (... $\mathbf{M}'$).

Лемма 9.3.3. $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}'} \gtrless \mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}'}$ (... $\mathbf{M}$) *эквивалентно* $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}} \gtrless \mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}}$ (... $\mathbf{M}'$) *соответственно.*

Доказательство. По лемме 9.3.2 $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}} \gtrsim \mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}}$ (... $\mathbf{M}$) влечет за собой $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}} \gtrsim \mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}}$ (... $\mathbf{M}'$). Обратное получается путем замены $\mathbf{M}$ на $\mathbf{M}'$ (и $\mathbf{M}'$ на $\mathbf{M}'' = \mathbf{M}$). Поэтому $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}'} \gtrsim \mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}'}$ ($\mathbf{M}$ ...) и $\mathfrak{M}_{f_0}^{\mathbf{M}} \gtrsim \mathfrak{M}_{g_0}^{\mathbf{M}}$ (... $\mathbf{M}'$) эквивалентны. То же получится и для $\lesssim$ путем перемены мест f_0 и g_0. Она верна для $\succ$, потому что $\succ$ означает, что выполнено $\gtrsim$, но не выполнено $\sim$; наконец, для $\prec$ результат получается путем перемены мест f_0 и g_0. Таким образом, все утверждения леммы доказаны.

Глава X

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'})$ И $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}})$

10.1. Последние пункты дают основу для количественного сравнения $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'})$ с $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}})$. Будем снова считать $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ факторами, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$, $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}')$ — произвольным образом нормированными функциями относительной размерности в $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ соответственно; Δ и Δ' — множествами их значений. Введем

Определение 10.1.1. *Обозначим область значений* $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'})$ *(для всех* $f \in \mathfrak{H}$) *через* Δ_0, *а область значений* $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}})$ *(для всех* $f \in \mathfrak{H}$) — *через* Δ_0'.

Лемма 10.1.1. *Если мы установим соответствие* $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'})$ *с* $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}})$, *то получим взаимно однозначное отображение* Δ_0 *на* Δ_0'. *Обозначим его через* $\alpha' = \varphi(\alpha)$, $\alpha \in \Delta_0$, $\alpha' \in \Delta_0'$, $\varphi(\alpha)$ — *монотонно возрастающая функция* α.

Доказательство. Лемму 9.3.3 можно переформулировать следующим образом: $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}) \gtreqless D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}'})$ эквивалентно $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}) \gtreqless D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}})$ соответственно. Отсюда следуют все утверждения нашей леммы.

Теперь мы опишем Δ_0, Δ_0', $\varphi(\alpha)$ и множество всех пар $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$.

Лемма 10.1.2. *Если* $A \in \mathbf{M}$, *то* $[Ag, g \in \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}] = \mathfrak{M}_{Af}^{\mathbf{M}'}$.

Доказательство. Имеем

$$[Ag; g \in \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}] = [Ag, g \in [B'f, B' \in \mathbf{M}']] = [Ag, g \in (B'f, B' \in \mathbf{M})] =$$

$$= [AB'f, B' \in \mathbf{M}'] = [B'Af, B' \in \mathbf{M}'] = \mathfrak{M}_{Af}^{\mathbf{M}'}.$$

Лемма 10.1.3. *Необходимые и достаточные условия существования* $f \in \mathfrak{H}$ *с* $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}} = \mathfrak{N}$ *таковы:* $\mathfrak{M} \eta \mathbf{M}$, $\mathfrak{N} \eta \mathbf{M}'$, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) \in \Delta_0$, $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{N}) = \varphi(D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}))$.

Доказательство. Поскольку необходимость очевидна, остановимся на достаточности. Наши предположения влекут за собой существование g с $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}'}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$, $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}}) = D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{N})$. Поэтому $\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}'} \sim \mathfrak{M}(\ldots\mathbf{M})$ и $\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}} \sim \mathfrak{N}(\ldots\mathbf{M}')$. Пусть $U \in \mathbf{M}$—частично изометрический оператор с начальным и конечным множествами $\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}'}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно, а $U' \in \mathbf{M}'$ — аналогичный оператор для $\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}}$ и $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим теперь $\mathfrak{M}_{U'g}^{\mathbf{M}'}$. Оно равно $[A'U'g;\ A' \in \mathbf{M}']$ и поэтому, конечно, является подмножеством $[B'g,\ B' \in \mathbf{M}'] = \mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}'}$. Но, с другой стороны, для любого $B' \in \mathbf{M}'$ мы имеем для $A' = B'U'^* \in \mathbf{M}'$, $A'U'g = B'U'^*U'g = B'P_{\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}}}g = B'g$. Таким образом, наше множество совпадает с $\mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}'}$. Теперь лемма 10.1.2 дает $\mathfrak{M}_{UU'g}^{\mathbf{M}'} = [Uh, h \in \mathfrak{M}_{U'g}^{\mathbf{M}'}] = [Uh, h \in \mathfrak{M}_g^{\mathbf{M}'}] = [\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$. Аналогичным образом $\mathfrak{M}_{U'Ug}^{\mathbf{M}} = \mathfrak{N}$. Поэтому $f = UU'g = U'Ug$ удовлетворяет всем требованиям.

Лемма 10.1.4. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \Delta_0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \in \Delta$, $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\alpha_i) \in \Delta'$ *влекут за собой* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \in \Delta_0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\alpha_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\right)$.

Доказательство. Мы хотим сконструировать последовательность взаимно ортогональных $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \eta\mathbf{M}$ так, чтобы $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_i) = \alpha_i$. Конструкцию проведем по индукции. Предположим, что $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}$ уже сконструированы и удовлетворяют этим требованиям, а также условию $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}]) \geqslant \sum_i^{\infty} \alpha_j$, где $i = 1, 2, \ldots$ (для $i = 1$ это верно, ибо $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$, поскольку $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \in \Delta$). Построим теперь $\mathfrak{M}_i$ следующим образом: если $\alpha_i = \infty$, то $\sum_j^{\infty} \alpha_j = \infty$ и $\mathfrak{H} - [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}]$ бесконечно. Применим теперь лемму 7.2.3 и положим $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}$ для получившегося $\mathfrak{N}$, которое, очевидно, удовлетворяет всем требованиям. Если α_i конечно, выберем $\mathfrak{M}_i'\eta\mathbf{M}$ с $D(\mathfrak{M}_i') = \alpha_i$. Тогда $\mathfrak{M}_i' \lesssim \mathfrak{H} - [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}]$, $\mathfrak{M}_i' \sim \mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{H} - [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}]$, и используем это $\mathfrak{M}_i$. Тогда $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_i) = \alpha_i$, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_i]) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - [\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}]) - D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_i) \geqslant \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_j - \alpha_i = \sum_{j=i+1}^{\infty} \alpha_j$, и снова все условия выполнены.

Выберем подобным образом последовательность $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots \in \mathbf{M}'$ так, что $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{N}_i) = \varphi(\alpha_i)$. (Теперь нужно использовать $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\alpha_i) \in \Delta$.) Согласно лемме 10.1.3 существует $f_i \in \mathfrak{H}$ с $\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}'} = \mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}} = \mathfrak{N}_i$. Поскольку мы можем заменить f_i на $\alpha_i f_i$, можно считать, что $\|f_i\| \leqslant 1/i$.

Мы видим, что $\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}'}$, $i = 1, 2, \ldots$, взаимно ортогональны, как и $\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}}$, $i = 1, 2, \ldots$ Поэтому f_i взаимно ортогональны, и, поскольку $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (1/i^2)$ конечно, мы можем построить $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ (см. [16, с. 67]).

Поскольку $f_i \in \mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}'}$, то $f \in [\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}'},\ i = 1, 2, \ldots]$, и, принимая во внимание взаимную ортогональность $\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}}$, $i = 1, 2, \ldots$, мы имеем $f_i = E_{f_i}^{\mathbf{M}'} f$. Аналогично этому $f \in [\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}},\ i = 1, 2, \ldots]$ и $f_i = E_{f_i}^{\mathbf{M}} f$.

Теперь

$$\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} = [A'f, A' \in \mathbf{M}'] = \left[\sum_1^\infty{}_i A'f_i, A' \in \mathbf{M}' \right] \subset [[A'f_i, A' \in \mathbf{M}'], i = 1, 2, \ldots] =$$

$$= [\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}'}, i = 1, 2, \ldots]$$

и

$$\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} = [A'f, A' \in \mathbf{M}'] \supset [B'E_{f_i}^{\mathbf{M}}f, B' \in \mathbf{M}'] = [B'f_i, B' \in \mathbf{M}'] = \mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}'},$$

$$\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} \supset [\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}'}, i = 1, 2, \ldots].$$

Таким образом, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} = [\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}'}, i = 1, 2 \ldots]$ и также $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}} = [\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}}, i = 1, 2, \ldots]$. Итак, мы имеем $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}) = \sum_{i=1}^\infty D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}'}) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i$, $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}) = \sum_{i=1}^\infty D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_{f_i}^{\mathbf{M}}) = \sum_{i=1}^\infty \varphi(\alpha_i)$. Поэтому $\sum_1^\infty \alpha_i \in \Delta_0$, $\sum_{i=1}^\infty \varphi(\alpha_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_i\right)$.

Лемма 10.1.5. $0 \in \Delta_0$; *существует* $\alpha \in \Delta_0$ *с* $\alpha > 0$; *если* $\alpha \in \Delta$, $\alpha \leqslant \beta \in \Delta_0$, *то* $\alpha \in \Delta_0$.

Доказательство. Для $f = 0$ $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}) = D_{\mathbf{M}}((0)) = 0$, для $f \neq 0$ $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} \neq (0)$, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}) > 0$; $\alpha \leqslant \beta \in \Delta_0$, $\alpha \in \Delta$, влечет за собой существование f с $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}) = \beta$ и $\mathfrak{N} \eta \mathbf{M}$ с $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}) = \alpha$. Поэтому $\mathfrak{N} \precsim \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$, и по лемме 10.1.2 $\mathfrak{M}_{P_{\mathfrak{N}'}f}^{\mathbf{M}'} = [P_{\mathfrak{N}'}g, g \in \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}] = \mathfrak{N}' \sim \mathfrak{N}$, таким образом $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_{P_{\mathfrak{N}'}f}^{\mathbf{M}'}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}) = \alpha$.

10.2. При помощи леммы 10.1.4 теперь можно завершить обсуждение свойств Δ_0, Δ_0' и $\varphi(\alpha)$. Мы используем теорему VIII и отдельно обсудим три случая: (I)—(III) для $\mathbf{M}$.

Предположим сначала, что для $\mathbf{M}$ имеет место случай (I). Тогда по леммам 3.2.3, 3.2.4 и 8.6.1 для $\mathbf{M}'$ мы тоже имеем случай (I). Используем $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ и $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M})$ в их стандартной нормировке. По лемме 10.1.5 $0 \in \Delta_0$ и существует $\alpha \in \Delta_0$ с $\alpha > 0$, а значит, и $\alpha \geqslant 1$, откуда следует $1 \in \Delta_0$, ибо $1 \in \Delta$.

Аналогично $0, 1 \in \Delta_0'$. Поскольку $\varphi(\alpha)$ монотонно возрастает (по лемме 10.1.1) и 0 является наименьшим элементом как Δ_0, так и Δ_0', то $\varphi(0) = 0$, а так как 1 — наименьший элемент, не равный нулю в Δ_0 и Δ_0', то $\varphi(1) = 1$.

Обозначим более точно случай $\mathbf{M}$ через $(\mathrm{I}_{m'})$, где $m' = 1, 2, \ldots$ или ∞; аналогично, тип $\mathbf{M}'$ — через $(\mathrm{I}_{n'})$, где $n' = 1, 2, \ldots$ или ∞. Применим для $p = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{Min}(m', n')$ лемму 10.1.4 с $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 1$, $\alpha_{p+1} = \alpha_{p+} = \ldots = 0$, если p конечно, и $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$, если p бесконечно. Мы получим, что $p \in \Delta_0$ и $\varphi(p) = p$.

Если бы Δ_0 имело другие элементы, мы бы получили, что

$$q \in \Delta_0, \qquad q \neq 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{Min}(m', n').$$

Но $q \in \Delta$, $q = 0, 1, 2, \ldots, m'$, так что $\mathrm{Min}(m', n') < q \leqslant m'$. Поэтому

$$\varphi(\mathrm{Min}(m', n')) < \varphi(q)$$

(по лемме 10.1.1), но $\varphi(\mathrm{Min}(m', n')) = \mathrm{Min}(m', n')$ и $\varphi(q) \in \Delta_0 \subset \Delta'$, значит,

$\text{Min}(m', n) < \varphi(q) \leqslant n'$. Но тогда $\text{Min}(m', n') < m'$ и $< n'$, что невозможно. Поэтому Δ_0 является в точности множеством 0, 1, 2, ..., $\text{Min}(m', n')$ и на нем $\varphi(\alpha) = \alpha$; значит, и Δ_0' совпадает с этим множеством. Мы видим, что должно получиться или $\Delta_0 = \Delta$, или $\Delta_0' = \Delta'$.

Рассмотрим теперь для **M** случай (III). Здесь Δ состоит в точности из двух элементов: 0, ∞, так что $\Delta_0 = \Delta$ по лемме 10.1.5. При этом $\Delta_0 = (0, \infty)$, $\Delta_0' = (\varphi(0), \varphi(\infty)) = (0, \varphi(\infty))$. Лемма 10.1.5, примененная к $\mathbf{M}'$, исключает существование $\alpha' \in \Delta'$ с $0 < \alpha' < \varphi(\infty)$. Это делает невозможным случай (II) для $\mathbf{M}'$. Случай (I) для $\mathbf{M}'$ отпадает, как и выше (поменять местами **M** и $\mathbf{M}'$), так что для $\mathbf{M}'$ мы тоже получаем случай (III). Из тех же соображений, что и для **M**, мы имеем $\Delta_0' = \Delta' = (0, \infty)$, $\varphi(\infty) = \infty$. Таким образом, снова $\varphi(\alpha) = \alpha$, но теперь $\Delta_0 = \Delta$ и $\Delta_0' = \Delta'$.

Предположим, наконец, для **M** случай (II). Приведенные выше аргументы исключают для $\mathbf{M}'$ случаи (I) и (III) (переставить **M** и $\mathbf{M}'$!), так что для $\mathbf{M}'$ мы тоже имеем случай (II). Перед нами четыре возможности: **M** в случае ($\text{II}_{m'}$) и $\mathbf{M}'$ в случае ($\text{II}_{n'}$) с $m', n' = 1, \infty$.

Рассмотрим пару $\alpha \in \Delta_0$, $\alpha' \in \Delta_0'$ с $\alpha' = \varphi(\alpha)$ и $p = 1, 2, \ldots$ Тогда $(\alpha/p) \in \Delta_0$, $(\alpha'/p) \in \Delta_0'$. Предположим, что $(\alpha'/p) > \varphi(\alpha/p)$. Очевидно, $p(\alpha/p) = \alpha \in \Delta_0$. Далее, $p\varphi(\alpha/p) < \alpha' \in \Delta_0' \subset \Delta'$, поскольку для **M** мы имеем случай (II), отсюда следует, что $p\varphi(\alpha/p) \in \Delta'$. Поэтому можно применить лемму 10.1.4 для $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = (\alpha/p)$, $\alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \ldots = 0$, получив $p\varphi(\alpha/p) = \varphi(\alpha) = \alpha'$, $(\alpha'/p) = \varphi(\alpha/p)$. Это противоречит нашему предположению $(\alpha'/p) > \varphi(\alpha/p)$. Перемена местами **M**, $\mathbf{M}'$ исключает также и $(\alpha'/p) < \varphi(\alpha/p)$. Таким образом, мы доказали, что $\alpha'/p = \varphi(\alpha/p)$. Другими словами,

$$\varphi(\alpha/p) = (1/p)\,\varphi(\alpha).$$

Пусть теперь $q = 0, 1, \ldots, p$. Мы имеем $(q/p)\,\alpha \leqslant \alpha \in \Delta_0 \subset \Delta$, так что (благодаря случаю (II) для **M** и $\mathbf{M}'$) $(q/p)\,\alpha \in \Delta$, $q\varphi(\alpha/p) \in \Delta'$. Поэтому можно применить лемму 10.1.4 для $\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = \alpha/p$, $\alpha_{q+1} = \alpha_{q+2} = \ldots = 0$, получая $(q/p)\,\alpha \in \Delta_0$ и $\varphi((q/p)\,\alpha) = q\varphi(\alpha/p) = (q/p)\,\varphi(\alpha)$. Другими словами, если $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, то $\varphi(\beta) = (\beta/\alpha)\,\varphi(\alpha)$ для рационального (β/α).

По лемме 10.1.5 из $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ следует, что $\beta \in \Delta_0$ и $\varphi(\beta)$ определена во всем этом интервале. Поскольку она монотонно возрастает (см. лемму 10.1.1), мы имеем $\varphi(\beta) = (\beta/\alpha)\,\varphi(\alpha)$ для всех таких β, т. е. $\varphi(\alpha)/\alpha = \varphi(\beta)/\beta$ (при $\alpha, \beta \neq 0$).

Предположим, что $\alpha, \beta \in \Delta_0$ и не равны нулю. Если $\alpha \geqslant \beta$, то $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, и мы знаем, что $\varphi(\alpha)/\alpha = \varphi(\beta)/\beta$. По симметрии это равенство верно и для $\alpha \leqslant \beta$, т. е всегда. Таким образом, $\varphi(\alpha)/\alpha$ равно константе, скажем C. По своей природе C конечна и положительна. Мы получаем, что $\varphi(\alpha) = C\alpha$, если $\alpha \in \Delta_0$, $\alpha \neq 0$ и, конечно, для $\alpha = 0$ то же.

Пусть наименьшая верхняя грань множества Δ_0 равна m'', а множества Δ_0' — n'' соответственно. Мы имеем $0 < m'' \leqslant m'$, $0 < n'' \leqslant n'$ и, конечно, $n'' = Cm''$. Число m'' принадлежит Δ_0: выберем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ с $\alpha_i \geqslant 0$, $\Sigma_1^i \alpha_j < m''$, $\Sigma_1^\infty \alpha_j = m''$ (например, $\alpha_i = m''/2^i$, если m'' конечно, и $\alpha_i = 1$, если m'' бесконечно) и применим лемму 10.1.4. Аналогично n'' принадлежит Δ_0'.

Предположим теперь, что $m'' < m'$, $n'' < n'$. Тогда m'', n'' оба конечны и существует $2 > \theta > 1$ с $\theta m'' < m'$, $\theta n'' < n'$. Тогда $(\theta/2)\, m'' < m'$ и потому $\in \Delta_0$, в то время как $2\,(\theta/2)\, m'' = \theta m'' \leqslant m'$ принадлежит Δ, а $2\varphi\,((\theta/2)\, m'') = 2C\,(\theta/2)\, m'' = \theta n'' \leqslant n'$ и $\in \Delta'$. Применение леммы 10.1.4 для $\alpha_1 = \alpha_2 = (\theta/2)\, m''$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = 0$ дает $\theta m'' \in \Delta_0$. Но это невозможно, ибо $\theta m'' > m''$.

Таким образом, мы имеем $m'' = m'$ и $n'' \leqslant n'$ или $m'' \leqslant m'$ и $n'' = n'$, а кроме того, $n'' = Cm''$. Рассмотрим теперь четыре возможные комбинации $m', n' = 1, \infty$. Если $m' = n' = 1$, то $C \geqslant 1$ с необходимостью влечет за собой $n'' = n' = 1$, $m' = (1/C)\, n' = 1/C \leqslant 1$, так что $\Delta_0 = \Delta$, в то время как из $C \leqslant 1$ следует, что $m'' = m' = 1$, $n'' = Cm'' = C \leqslant 1$ и $\Delta_0 = \Delta$. Поскольку оба Δ, Δ' (т. е. $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$, $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M})$) нормированы, C имеет инвариантный смысл. Если $m' = 1$ и $n' = \infty$, то Δ' не нормировано. Тогда мы можем сделать $C = 1$. Теперь, очевидно, $m'' = m' = 1$, $n'' = m'' = 1 < \infty$. При этом $\Delta_0 = \Delta$. Если $m' = \infty$, $n' = 1$, то Δ не нормировано. Значит, мы снова можем сделать $C = 1$. Теперь, очевидно, $n'' = n' = 1$, $m'' = n' = 1 < \infty$. Значит, $\Delta_0' = \Delta$. Если, наконец, $m' = n' = \infty$, то оба Δ и Δ' не нормированы. Тогда мы снова можем сделать $C = 1$ и получить $m'' = n'' = \infty$ и $\Delta_0 = \Delta$, $\Delta_0' = \Delta'$.

Эти результаты совместно с результатами лемм 10.1.1 и 10.1.3 подытоживает

Теорема X. *В факторизации* **M**, **M**$'$ *факторы* **M**, **M**$'$ *должны оба принадлежать или классу* (I), *или классу* (II), *или классу* (III).

Функция $\varphi(\alpha)$, *определенная в лемме* 10.1.1, *всегда имеет вид* $\varphi(\alpha) = C\alpha$, *где* C — *конечная положительная константа. В случае* (I) *при использовании стандартной нормировки* Δ, Δ' *обязательно* $C = 1$; *в случае* (II), *если оба* **M**, **M**$'$ *принадлежат случаю* (II_1), *то* C — *однозначно определена; в случае* (II), *когда по крайней мере один из факторов* **M** *или* **M**$'$ *принадлежит случаю* (II_∞) *и если мы подходящим образом нормируем* Δ *или* Δ' *можно сделать* $C = 1$; *в случае* (III) *значение* C *произвольно (ибо* $\alpha = 0, \infty$), *так что мы можем взять* $C = 1$.

Всегда или $\Delta_0 = \Delta$, *или* $\Delta_0 = \Delta'$, *подробности приведены выше.*

Вектор f *с* $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}} = \mathfrak{N}$ *существует, если и только если* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}'$ *и если* $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) \in \Delta_0$, $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{N}) \in \Delta_0'$, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}) = CD_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$. (*Благодаря последнему условию любое из двух предыдущих условий влечет за собой другое.*)

Эта теорема подводит нас ближе к ответу на проблемы 4 и 7: она исключает некоторые комбинации случаев для **M**, **M**$'$ и показывает, что если **M**, **M**$'$ оба принадлежат классу (II_1), то они обладают дополнительным инвариантом — числом C. Это последнее утверждение имеет ценность, конечно, только если такие **M**, **M**$'$, когда оба относятся к случаю (II_1) и с различными значениями C, действительно существуют. Мы увидим, что это на самом деле имеет место, и получим дополнительную информацию по этому вопросу в пунктах 13.2 и 13.3.

Глава XI

ПРОИЗВЕДЕНИЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ ФАКТОРОВ

11.1. Естественный вопрос, который теперь возникает, состоит в следующем.

Проблема 8. *При каких условиях два данных кольца* **M**, **N** *могут принадлежать одной факторизации* $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$?

Следующая лемма дает необходимое и достаточное условие для этого, но при этом порождает новую проблему.

Лемма 11.1.1. $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *принадлежат одной (выбранной подходящим образом) факторизации, если и только если*: (i) $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *являются факторами*; (ii) $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *коммутируют* (*т. е.* $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}'$); (iii) $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *является фактором.*

Доказательство. Если $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ принадлежат факторизации $\mathbf{M}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{M}_n$, то $\mathbf{M} = \mathbf{M}_i$, $\mathbf{N} = \mathbf{M}_j$, $i \neq j$. Поэтому (i) выполнено согласно лемме 3.1.1; (ii) — по определению, а (iii) — снова по лемме 3.1.1, поскольку при помощи перенумерации $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ мы можем сделать $i = 1$, $j = 2$, а затем вспомнить (см. замечание в конце п. 3.1), что $\mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$, $\mathbf{R}(\mathbf{M}_3, \ldots, \mathbf{M}_n)$ тоже является факторизацией, если $n > 3$ (для $n = 2$, $\mathbf{R}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \mathbf{B}$ тривиально является фактором). Таким образом, наше условие необходимо.

Предположим теперь, что (i)—(iii) выполнены. $(\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))' = \mathbf{M}'\mathbf{N}'$ коммутирует с $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$; $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ коммутируют между собой, и $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}, (\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))') = \mathbf{R}(\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}), (\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))') = \mathbf{B}$, поскольку $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ — фактор. Значит, $\mathbf{M}, \mathbf{N}, (\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))'$ является факторизацией и она содержит $\mathbf{M}, \mathbf{N}$. Поэтому наше условие достаточно.

Возникающая новая проблема такова:

Проблема 9. *Если* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ — *два коммутирующих фактора, при каких условиях* $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *тоже будет фактором? Каким образом тип* $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ (*в смысле теоремы* VIII) *связан с типами* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$?

Мы получим только частичный ответ. Его можно получить также, используя несколько менее формальную технику, чем та, которую мы намерены употребить. Представляется, однако, разумным ее использовать, ибо она проясняет алгебраическую сторону вопроса.

Введем такое определение.

Определение 11.1.1. *Пусть* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{P}$ — *кольца, содержащие* 1. *Если* $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$, *определим* $\mathbf{M}'_\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{M}'$ ($\mathbf{M}'_\mathbf{P}$ *тоже является кольцом с* 1 *и* $\subset \mathbf{P}$).

Это понятие имеет много общих формальных свойств с $\mathbf{M}'$, с которым совпадает в случае $\mathbf{P} = \mathbf{B}$. Поскольку решающим свойством $\mathbf{M}'$ является $\mathbf{M}'' = \mathbf{M}$ (см [18, с. 397]), разумно сделать такое

Определение 11.1.2. $\mathbf{P}$ *нормально, если из* $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$ *следует* $\mathbf{M}''_{\mathbf{P}\mathbf{P}} = \mathbf{M}$.

Лемма 11.1.2. *Если* $\mathbf{P}$ *нормально, то оно является фактором; любая факторизация* $\mathbf{Q}, \mathbf{P}'$ *при этом является парной.*

Доказательство. *Положим* $\mathbf{M} = (\alpha \cdot 1)$. Тогда $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$, значит, $\mathbf{M}''_{\mathbf{P}\mathbf{P}} = \mathbf{M}$; но $(\alpha \cdot 1)'_\mathbf{P} = \mathbf{P}(\alpha \cdot 1)' = \mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{P}$, $\mathbf{P}'_\mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}'$. При этом мы имеем $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' = (\alpha \cdot 1)$. Таким образом, $\mathbf{P}$ — фактор. То, что $\mathbf{Q}, \mathbf{P}'$ является факторизацией, означает, что $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}'' = \mathbf{P}$ и $\mathbf{R}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}') = \mathbf{B}$, т. е. $(\mathbf{R}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}'))' = \mathbf{B}'$; $\mathbf{Q}'_\mathbf{P} = \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{P} = (\mathbf{R}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}'))' = \mathbf{B}' = (\alpha \cdot 1)$, следовательно, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}''_{\mathbf{P}\mathbf{P}} = (\alpha \cdot 1)'_\mathbf{P} = \mathbf{P}$.

Наше понятие нормальности можно легко выразить в терминах условий, характеризующих «B-структуры» Биркгоффа (см. [1, с. 445]), но сейчас мы не будем вдаваться в этот аспект вопроса.

Связь с проблемой 9 устанавливается следующей леммой.

Лемма 11.1.3. *Факторы* $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ *коммутируют и* $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *является фактором* (*т. е. выполнены условия леммы* 11.1.1), *если существует такое* $\mathbf{P}$, *что* $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{P}'$ *и* $\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{P}'$ *нормальны.*

В частности, это имеет место, если **M**, **N** *коммутируют и, кроме того,* **M**, **M′** *или* **N**, **N′** *оба нормальны.*

Доказательство. Включения $\mathbf{M} \subset \mathbf{P} \subset \mathbf{N}'$ показывают, что **M** и **N** коммутируют. Мы имеем

$$(\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}'_{\mathbf{P}}))'_{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}'_{\mathbf{P}}))' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}' \cdot (\mathbf{M}'_{\mathbf{P}})' = \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}''_{\mathbf{PP}},$$

а поскольку $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$ и **P** нормально, получаем $\mathbf{M}'\mathbf{M} = (\alpha \cdot 1)$.

Таким образом, учитывая, что $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}'_{\mathbf{P}}) \subset \mathbf{P}$ и **P** нормально, мы имеем $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}'_{\mathbf{P}}) = (\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}'_{\mathbf{P}}))''_{\mathbf{PP}} = (\alpha \cdot 1)'_{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$. Подобным же образом $\mathbf{R}(\mathbf{N}, \mathbf{N}'_{\mathbf{P}'}) = \mathbf{P}$. Поэтому

$$\mathbf{R}(\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}), \mathbf{R}(\mathbf{M}'_{\mathbf{P}}, \mathbf{N}'_{\mathbf{P}'})) = \mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{M}'_{\mathbf{P}}, \mathbf{N}'_{\mathbf{P}'}) = \mathbf{R}(\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{M}'_{\mathbf{P}}), \mathbf{R}(\mathbf{N}, \mathbf{N}'_{\mathbf{P}'})) =$$
$$= \mathbf{R}(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = \mathbf{B} \quad (\mathbf{P} \text{ — фактор!}).$$

Далее, **M** коммутирует с $\mathbf{M}'_{\mathbf{P}}$, ибо $\mathbf{M}'_{\mathbf{P}} \subset \mathbf{M}'$, и с $\mathbf{N}'_{\mathbf{P}'}$, потому что $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$, $\mathbf{N}'_{\mathbf{P}'} \subset \mathbf{P}'$. Значит, **M** коммутирует с $\mathbf{R}(\mathbf{M}'_{\mathbf{P}}, \mathbf{N}'_{\mathbf{P}'})$. Аналогично **N** коммутирует с $\mathbf{R}(\mathbf{M}'_{\mathbf{P}}, \mathbf{N}'_{\mathbf{P}'})$. Поэтому $\mathbf{R}(\mathbf{M}'_{\mathbf{P}}, \mathbf{N}'_{\mathbf{P}'})$, $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ — факторизация, а потому (по лемме 3.1.1) $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ является фактором.

Вторая половина леммы получается, если положить $\mathbf{P} = \mathbf{M}$ и соответственно $\mathbf{P} = \mathbf{N}'$.

11.2. Выведем некоторые свойства нормальности.

Лемма 11.2.1. *Операция* $\mathbf{M}'_{\mathbf{P}}$ *(для* $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$*) и нормальность* **P** *инвариантны относительно* (*A**, *AB*)*-изоморфизмов колец* **P**.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, а второе немедленно следует из первого.

Лемма 11.2.2. *Если* **P** *— фактор типа* (I), *то оба* **P** *и* **P′** *нормальны.*

Доказательство. Поскольку **P′** — тоже типа (I) (по леммам 3.2.4 и 8.6.1 или теореме X), достаточно рассмотреть только **P**. Тогда из леммы 8.6.1 и теоремы II следует, что **P** алгебраически (и даже вполне) изоморфно **B** для некоторого пространства $\mathfrak{H}$. Поэтому лемма 11.2.1 позволяет нам считать, что $\mathbf{P} = \mathbf{B}$.

Но тогда $\mathbf{M}'_{\mathbf{P}}$ превращается в $\mathbf{M}'_{\mathbf{B}} = \mathbf{M}'$, и поскольку $\mathbf{M}'' = \mathbf{M}$ (см. [18, с. 397]), то $\mathbf{P} = \mathbf{B}$ нормально.

Отметим, что леммы 11.1.2 и 11.2.2 вместе снова дают утверждение леммы 3.2.4: любая прямая факторизация **M**, **N** является парной (при **M**, **N**, соответствующих **Q**, **P′**).

Поскольку мы укажем не парные факторизации типа (II) (см. п. 13.4), лемма 11.1.2 означает, что не нормальные факторы типа (II) действительно существуют. Нам, однако, не удалось доказать, что никакой фактор типа (II) не является нормальным. Тем не менее все не нормальные **P**, которые нам известны, принадлежат типу (II).

Таким образом, мы имеем только частичный ответ на вопрос:

Проблема 10. *Какие факторы являются нормальными?*

Вторая половина проблемы 9 еще подлежит обсуждению: определение типа $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ в терминах типов **M** и **N**. Если **M** или **N** принадлежат типу (I) (из соображений симметрии можно считать, что это **N**), то результаты следующих двух

пунктов позволяют нам решить эту проблему. В остальных случаях наша информация неполна.

11.3. Сейчас мы рассмотрим операцию, которая в некотором смысле обратна «произведению» $\mathbf{R}$ ($\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$). Она основана на следующей лемме.

Лемма 11.3.1. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *кольцо, содержащее* $\mathbf{1}$, E — *проектор*, $\in \mathbf{M}$. *Для* $A' \in \mathbf{M}'$ *образуем* $EA' = A'E = A'_E$. *Тогда операторы* A'_E *совпадают с такими (ограниченными) операторами* $\bar{A}$, *для которых* $E\bar{A} = \bar{A}E = \bar{A}$ *и которые коммутируют со всеми* EBE, $B \in \mathbf{M}$

Доказательство. Необходимость ясна: если $A' \in \mathbf{M}'$, то A' коммутирует с $E \in \mathbf{M}$, так что мы можем определить

$$EA' = A'E = A'_E, \qquad EA'_E = EEA' = EA' = A'_E, \qquad A'_EE = A'EE = A'E = A'_E,$$

а если $B \in \mathbf{M}$, то

$$EBEA'_E = EBA'_E = EBEA' = A'EBE = A'_EBE = A'_EEBE.$$

Докажем теперь достаточность. Для этого предположим, что $\bar{A}E = E\bar{A} = \bar{A}$ и что $\bar{A}$ коммутирует со всеми EBE, $B \in \mathbf{M}$.

Поскольку $\bar{A}$ ограничен, существует $\alpha > 0$, для которого $\alpha^2 \cdot \mathbf{1} - \bar{A}^*\bar{A}$ (полу) определен, значит, существует единственный (полу) определенный $\bar{C}$ с $\bar{C}^2 = \alpha^2 \times \times \mathbf{1} - \bar{A}^*\bar{A}$ (этот $\bar{C} = (\alpha^2 \cdot \mathbf{1} - \bar{A}^*A)^{1/2}$, см. [21, с. 303]). Все EBE, $B \in \mathbf{M}$ коммутируют с $\bar{A}$, а значит, и с $\bar{A}^*$, $\bar{A}^*\bar{A}$, и с $\bar{C}$. В частности, с ними коммутирует $E = EEE$.

Пусть теперь $B_1, \ldots, B_i \in \mathbf{M}$, а $f_1, \ldots, f_i$ произвольны. Тогда мы имеем

$$\left\| \sum_{j=1}^{i} B_j\bar{C}Ef_j \right\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{i} B_j\bar{A}Ef_j \right\|^2 = \left(\sum_{j=1}^{i} B_j\bar{C}Ef_j,\ \sum_{k=1}^{i} B_k\bar{C}Ef_k \right) +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{i} B_j\bar{A}Ef_j,\ \sum_{k=1}^{i} B_k\bar{A}Ef_k \right) = \left(\sum_{j,k=1}^{i} \{E\bar{C}B_k^*B_j\bar{C}E + E\bar{A}^*B_k^*B_j\bar{A}E\} f_j, f_k \right) =$$

$$= \left(\sum_{j,k=1}^{i} \{\bar{C}EB_k^*B_jE\bar{C} + \bar{A}^*EB_k^*B_jE\bar{A}\} f_j, f_k \right) = \left(\sum_{j,k=1}^{i} \{EB_k^*B_jE\,(\bar{C}^2 + \bar{A}^*\bar{A})\} f_j, f_k \right) =$$

$$= \left(\sum_{j,k=1}^{i} \{EB_k^*B_jE\,(\alpha^2 \cdot \mathbf{1})\} f_j, f_k \right) = \alpha^2 \left(\sum_{j=1}^{i} B_jEf_j,\ \sum_{k=1}^{i} B_kEf_k \right) =$$

$$= \alpha^2 \left\| \sum_{j=1}^{i} B_jEf_j \right\|^2,$$

а поэтому $\left\| \sum_{j=1}^{i} B_j\bar{A}Ef_j \right\| \leqslant \alpha \left\| \sum_{1}^{i} B_jEf_j \right\|$.

Таким образом, из $\sum_{1}^{i} B_jEf_j = 0$ следует, что $\sum_{j=1}^{i} B_j\bar{A}Ef_j = 0$ и по линейности $\bar{\bar{A}}\left(\sum_{j=1}^{i} B_jEf_j\right) = \sum_{j=1}^{i} B_j\bar{A}Ef_j$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$; $B_j \in \mathbf{M}$, f_j произвольны для $j = 1, \ldots, i$) определяет однозначный линейный оператор $\bar{\bar{A}}$. Далее, мы можем написать $\|\bar{\bar{A}}f\| \leqslant \alpha \|f\|$, так что $\bar{\bar{A}}$ — непрерывный. Образуем теперь замыкание $\bar{\bar{A}}$, оператор $\bar{\bar{\bar{A}}}$. Он однозначен и тоже удовлетворяет неравенству $\|\bar{\bar{\bar{A}}}f\| \leqslant \alpha \|f\|$, и область определения $\bar{\bar{\bar{A}}}$ = [область определения $\bar{\bar{A}}$]. (Все это получается прямым применением критерия из [21, с. 300].)

Если $B \in \mathbf{M}$, то $\bar{\bar{A}}\left(B \sum_{j=1}^{i} B_j E f_j\right) = \bar{\bar{A}}\left(\sum_1^i B B_j E f_j\right) = \sum_{j=1}^{i} (BB_j)\,\bar{A} E f_j = B\left(\sum_{j=1}^{i} B_j \bar{A} E f_j\right) = B\left(\bar{\bar{A}}\left(\sum_{j=1}^{i} B_j E f_j\right)\right)$. Так что $\bar{\bar{A}}\eta\mathbf{M}$ (см. лемму 4.2.2). Поэтому $\tilde{\bar{\bar{A}}}\eta\mathbf{M}'$ и $\mathfrak{M}_0$ (область определения $\tilde{\bar{\bar{A}}}$)$\eta\mathbf{M}'$. Отсюда $F_0 = P_{\mathfrak{M}_0} \in \mathbf{M}'$. Отметим, что область определения $\tilde{\bar{\bar{A}}}$ содержит область определения $\bar{\bar{A}} \supset \mathfrak{M}$, если $E = P_{\mathfrak{M}}$ (положить $i = 1$, $B_1 = 1$), поэтому $F_0 \geqslant E$.

Наше определение F_0 показывает, что $\tilde{\bar{\bar{A}}} F_0$ определен всюду. Кроме того, он ограничен, и поскольку $\tilde{\bar{\bar{A}}}\eta\mathbf{M}'$, $F_0 \in \mathbf{M}'$, то $\tilde{\bar{\bar{A}}} F_0 \eta \mathbf{M}'$. Из совокупности этих фактов следует, что $\tilde{\bar{\bar{A}}} F_0 \in \mathbf{M}'$. Обозначим $A' = \tilde{\bar{\bar{A}}} F_0$.

Далее, $\tilde{\bar{\bar{A}}} Ef = \bar{A} Ef$ (положить в определении $i = 1$, $B_1 = 1$), а потому $\tilde{\bar{\bar{A}}} E = \bar{A} E = \bar{A}$. Значит, $A'E = \tilde{\bar{\bar{A}}} F_0 E = \tilde{\bar{\bar{A}}} E = \bar{A}$. Другими словами, $EA' = A'E = A'_E = \bar{A}$, что завершает доказательство.

Теперь мы можем провести построения, необходимые для нашего «разложения».

Определение 11.3.1. *Пусть $\mathbf{M}$ — кольцо с $\mathbf{1}$, а $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное множество, $\neq (0)$. Рассмотрим операторы $A \in \mathbf{M}$, которые приводятся $\mathfrak{M}$, и их ограничения на $\mathfrak{M}$, $A_{(\mathfrak{M})}$ (см. [16, с. 78]). Это ограниченные операторы в $\mathfrak{M}$. Обозначим множество всех таких $A_{(\mathfrak{M})}$ ($A \in \mathbf{M}$ и приводится $\mathfrak{M}$) через $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$.*

Лемма 11.3.2. *Пусть $\mathbf{M}$ — кольцо с $\mathbf{1}$ и $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное множество, $\neq (0)$, $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $E = P_{\mathfrak{M}}$. Тогда $(\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})})' = \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$ (это кольцо операторов в пространстве $\mathfrak{M}$).*

Доказательство. Оператор A_0 в $\mathfrak{M}$ является в то же время оператором в $\mathfrak{H}$, только его область определения $\subset \mathfrak{M}$. Если A_0 ограничен, то $A_0 E$ определен всюду в $\mathfrak{H}$, а потому (будучи ограниченным) $\in \mathbf{B}$. Поскольку его образ $\subset \mathfrak{M}$, то $E(A_0 E) = A_0 E$. Очевидно, $(A_0 E)E = A_0 E$, так что $A_0 E$ коммутирует с $E = P_{\mathfrak{M}}$ и приводится $\mathfrak{M}$. Его ограничения на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ равны A_0 и 0 соответственно.

Таким образом, A_0, B_0 (в $\mathfrak{M}$) коммутируют тогда и только тогда, когда коммутируют $A_0 E$ и $B_0 E$ (в $\mathfrak{H}$). Поэтому $A_0 \in (\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})})'$ означает, что $A_0 E$ коммутирует с каждым $B_0 E$, $B_0 \in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$. Утверждение для B_0 означает, что $B_0 = B_{(\mathfrak{M})}$, $B \in \mathbf{M}$, но тогда

$$EBE = EB = BE = B_0 E.$$

(Отметим, что, вообще говоря, $B_0 E$ отличен от $EB_0 = B_0$: их области определения равны $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно.) Итак, $A_0 E$ должен коммутировать с каждым EBE, где $B \in \mathbf{M}$, B коммутирует с E. Замена B на EBE (который коммутирует с E, причем EBE остается неизменным) показывает, что подходит любой $B \in \mathbf{M}$. Согласно лемме 11.3.1 примененной к $A_0 E$, $A_0 E = EA' = A'E$ для некоторого $A' \in \mathbf{M}'$. Это означает, что $A_0 = (A_0 E)_{(\mathfrak{M})} = A'_{(\mathfrak{M})}$, $A_0 \in \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$.

Обратно, если $A_0 \in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, $B_0 \in \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$, то $A_0 = A_{(\mathfrak{M})}$, $B_0 = B_{(\mathfrak{M})}$, где $A' \in \mathbf{M}'$, $B \in \mathbf{M}$, так что A', B, а равным образом A_0, B_0 коммутируют. Значит, $A_0 \in \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$ влечет за собой, что $A_0 \in (\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})})'$. Итак, мы полностью доказали равенство $(\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})})' = \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$.

Лемма 11.3.3. *Пусть* $\mathbf{M}$, $\mathfrak{M}$, E *такие же, как и ранее. Рассмотрим соответствие* $X \rightleftarrows X_{(\mathfrak{M})}$. *Это взаимно однозначное отображение и даже алгебраический изоморфизм друг на друга следующих колец:*

(i) *в любом случае кольца всех* $A \in \mathbf{M}$ с $EA = AE = A$ *на* $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$;

(ii) *если* $\mathbf{M}$ — *фактор, то всего* $\mathbf{M}'$ *на все* $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$.

Доказательство. Инвариантность αA, A^*, $A + B$, AB очевидна, в доказательстве нуждается лишь взаимная однозначность отображения.

Утверждение (i). Если $A_0 \in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, образуем A_0E из доказательства леммы 11.3.2. Если $A_0 = A_{(\mathfrak{M})}$, $A \in \mathbf{M}$, то, как мы видели, $A_0E = EAE$, так что $A_0E \in \mathbf{M}$ и, кроме того, $A_0 = (A_0E)_{(\mathfrak{M})}$, $E(A_0E) = (A_0E)E = A_0E$. Более того, $A_0 = (A_0E)_{(\mathfrak{M})}$ и A_0E однозначно определяют друг друга. Это завершает доказательство.

Утверждение (ii). Любой $A' \in \mathbf{M}'$ коммутирует с $E = P_{\mathfrak{M}} \in \mathbf{M}$, а значит, приводится $\mathfrak{M}$ и можно построить $A'_{(\mathfrak{M})}$. $A'_{(\mathfrak{M})} = B'_{(\mathfrak{M})}$ означает, что $A'f = B'f$ для всех $f \in \mathfrak{M}$, т. е. для всех $f = Eg$, так что $A'E = B'E$. Согласно следствию из теоремы III отсюда вытекает, что $A' = B'$, ибо $E \neq 0$. Это завершает доказательство.

Лемма 11.3.4 *Пусть* $\mathbf{M}$, $\mathfrak{M}$, E *те же, что и выше. Если* $\mathbf{M}$ — *фактор, то и* $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ — *фактор.*

Доказательство. Применим лемму 11.3.2:

$$\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})} \cdot (\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})})' = \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})} \cdot \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}')_{(\mathfrak{M})} = (\alpha \cdot 1)_{(\mathfrak{M})} = (\alpha \cdot 1_{(\mathfrak{M})}),$$

и $1_{(\mathfrak{M})}$ является единичным оператором в $\mathfrak{M}$.

Лемма 11.3.5. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *фактор, а* $\mathfrak{M}$, E — *прежние. Тогда*

(i) *если* $F \in \mathbf{M}$ *пробегает все проекторы* $F \leqslant E$ (*см.* [16, с. 76]), *то* $F_{(\mathfrak{M})}$ *пробегает все проекторы* $\in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$; $F_{(\mathfrak{M})} \sim G_{(\mathfrak{M})}(\ldots \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})})$, $(F, G \in \mathbf{M}, \leqslant E)$ *эквивалентно* $F \sim G\,(\ldots \mathbf{M})$;

(ii) *если* F' *пробегает все проекторы* $F' \in \mathbf{M}'$, *то* $F'_{(\mathfrak{M})}$ *пробегает все проекторы* $\in \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$; $F'_{(\mathfrak{M})} \sim G'_{(\mathfrak{M})}(\ldots \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})})$ *эквивалентно* $F' \sim G'\,(\ldots \mathbf{M}')$, $(F', G' \in \mathbf{M}')$.

Доказательство. Утверждение (i). Первая часть — переформулировка леммы 11.3.3, (i), ибо $EF = FE = F$ означает, что $F \leqslant E$ (см. [16, с. 76]). Что касается второй части, то отметим сначала, что $F \sim G\,(\ldots \mathbf{M})$ означает, что $F = U^*U$, $G = UU^*$ для некоторого $U \in \mathbf{M}$ (см. лемму 4.3.1 и определение 6.1.1), а $F_{(\mathfrak{M})} \sim G_{(\mathfrak{M})}\,(\ldots \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})})$ означает, что

$$F_{(\mathfrak{M})} = (U_{(\mathfrak{M})})^* U_{(\mathfrak{M})}, \qquad G_{(\mathfrak{M})} = U_{(\mathfrak{M})} (U_{(\mathfrak{M})})^*$$

(как и ранее) для некоторого $U \in \mathbf{M}$, $EU = UE = U$ (см. лемму 11.3.3, (i)). По-

следнее равенство опять-таки означает, что $F = U^*U$, $G = UU^*$ (по лемме 11.3.3, (i) благодаря алгебраическому изоморфизму колец), так что все, что нам нужно доказать, — это автоматическое выполнение равенств $EU = UE = U$ для U из первого случая. Поскольку начальное и конечное множества U имеют проекторы $F, G \leqslant E$, оба они $\subset \mathfrak{M}$, откуда следует, что $EU = UE = U$.

Утверждение (ii). Оно следует немедленно из леммы 8.5.1, поскольку кольца $\mathbf{M}'$ и $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$ алгебраически изоморфны.

Лемма 11.3.6. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *фактор*; $\mathfrak{M}$, E *те же, что и прежде. Пусть* $D_{\mathbf{M}}(F)$, $D_{\mathbf{M}'}(F')$ ($F \in \mathbf{M}$ *и соответственно,* $F' \in \mathbf{M}$)—*функции относительной размерности в* $\mathbf{M}$ *и соответственно в* $\mathbf{M}'$. *Тогда* $D^{(\mathfrak{M})}_{\mathbf{M}}(F_{(\mathfrak{M})}) = D_{\mathbf{M}}(F)$ *и* $D^{(\mathfrak{M})}_{\mathbf{M}'}(F'_{(\mathfrak{M})}) = D_{\mathbf{M}'}(F')$ — *суть функции относительной размерности в* $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ *и соответственно в* $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$.

Доказательство. По определению 9.1.1, это следует из леммы 11.3.5.

Лемма 11.3.7. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *фактор*; $\mathfrak{M}$, E — *прежние. Пусть* $D_{\mathbf{M}}(F)$, $D_{\mathbf{M}'}(F')$, $D^{(\mathfrak{M})}_{\mathbf{M}}(F)$, $D^{(\mathfrak{M})}_{\mathbf{M}'}(F')$ *будут функциями относительной размерности из леммы* 11.3.6, *а* Δ, Δ', $\Delta_{(\mathfrak{M})}$, $\Delta'_{(\mathfrak{M})}$ — *множества их значений соответственно. Тогда* $\Delta_{(\mathfrak{M})}$ *есть множество всех* $\alpha \in \Delta$, $\alpha \leqslant D_{\mathbf{M}}(E)$, *а* $\Delta'_{(\mathfrak{M})} = \Delta'$.

Доказательство. Согласно леммам 11.3.5, (i) и 11.3.6 $\Delta_{(\mathfrak{M})}$ совпадает с множеством всех $D_{\mathbf{M}}(F)$, $F \leqslant E$, т. е. с множеством всех $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Заменяя эти $\mathfrak{N}$ всеми $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{M}$, т. е. всеми $\mathfrak{N} \precsim \mathfrak{M}$, мы, очевидно, не повлияем на множество их $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$. Другими словами, у нас получается множество всех $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$ с $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}) \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$, т. е. всех $\alpha \in \Delta$ с $\alpha \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) = D_{\mathbf{M}}(E)$. Равенство $\Delta'_{(\mathfrak{M})} = \Delta_{(\mathfrak{M})}$ следует немедленно из леммы 11.3.5, (ii), и леммы 11.3.6.

11.4. Рассмотрения п. 11.3 были несимметричны постольку, поскольку возникающее там $\mathfrak{M}$ предполагалось $\eta\mathbf{M}$. Теперь мы получим симметричные результаты, рассматривая одновременно $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ и $\mathfrak{M}'\eta\mathbf{M}'$ и дважды применяя предыдущие леммы.

Лемма 11.4.1. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *фактор,* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ — *замкнутые линейные множества, оба* $\neq (0)$; $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M}'\eta\mathbf{M}'$, $E = P_{\mathfrak{M}}$, $E' = P_{\mathfrak{M}'}$. *Проведем операции определения* 11.3.1 *для замкнутого линейного множества* $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'$. *Соответствие* $X \rightleftarrows X_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ *является тогда взаимно однозначным отображением и даже алгебраическим изоморфизмом друг на друга следующих колец*:

(i) *кольца всех* $A \in \mathbf{M}$ *с* $EA = AE = A$ *на все* $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$;

(ii) *кольца всех* $A' \in \mathbf{M}'$ *с* $E'A' = A'E' = A'$ *на все* $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$.

Кроме того, мы имеем

(iii) $(\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})' = \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$, *где* $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ — *фактор. (Все это — кольца операторов в пространстве* $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}' \neq (0)$.)

Доказательство. Поскольку $E \in \mathbf{M}$, $E' \in \mathbf{M}'$, то E и E' коммутируют, значит, $EE' = P_{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'}$. Так как $E, E' \neq 0$, следствие к теореме III дает, что $EE' \neq 0$, $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}' \neq (0)$. Но так как $E' \in \mathbf{M}'$, то $E'_{(\mathfrak{M})} \in \mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$, а поскольку $E'_{(\mathfrak{M})} = EE' = P_{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'}$, то $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'\eta\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$.

Теперь (i) получается применением леммы 11.3.3, (i) к $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, $\mathfrak{M}$, а затем леммы 11.3.3, (ii) к $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$, $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'$, $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$.

Утверждение (ii) следует из (i) в результате замены $\mathbf{M}$ и $\mathfrak{M}$ на $\mathbf{M}'$ и $\mathfrak{M}'$; (iii) вытекает в результате применения лемм 11.3.2 и 11.3.4 сначала к $\mathbf{M}, \mathbf{M}'\,\mathfrak{M}$, а затем к $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$, $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'$.

Лемма 11.4.2. *Пусть* $\mathbf{M}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, E, E' *те же, что и прежде. Тогда*:

(i) *если F пробегает все проекторы $F\in\mathbf{M}$, $F\leqslant E$, то $F_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ пробегает все проекторы $\in\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$. Если $D_{\mathbf{M}}(F)$ — относительная размерность в $\mathbf{M}$, то $D_{\mathbf{M}}(F)=D_{\mathbf{M}}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})$ — относительная размерность в $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$. Обозначим области их значений через Δ и $\Delta_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ соответственно, тогда $\Delta_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ — множество всех $\alpha\in\Delta$, $\alpha\leqslant D_{\mathbf{M}}(E)$*;

(ii) *если F' пробегает все проекторы $F'\in\mathbf{M}'$, $F'\leqslant E'$, то $F'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ пробегает все проекторы $\in\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$. Если $D_{\mathbf{M}'}(F')$ — относительная размерность в $\mathbf{M}'$, то $D_{\mathbf{M}'}(F')=D_{\mathbf{M}}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F'_{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'})$ — относительная размерность в $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$. Обозначим области их значений через Δ' и $\Delta'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ соответственно, тогда $\Delta'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ — множество всех $\alpha'\in\Delta'$, $\alpha'\leqslant D_{\mathbf{M}'}(E')$.*

Доказательство. Утверждение (i) получается в результате применения лемм 11.3.5 ((i) и соответственно (ii)), 11.3.6 и 11.3.7 сначала к $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, $\mathfrak{M}$, а затем к $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}$, $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'$; (ii) следует из (i) после замены $\mathbf{M}$ и $\mathfrak{M}$ на $\mathbf{M}'$ и $\mathfrak{M}'$.

Мы видим, что парная факторизация $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ в $\mathfrak{H}$ порождает парную факторизацию $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$, $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ в $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'\neq(0)$. Лемма 11.4.2 дает нам средства для определения типов последних факторов в терминах первых двух.

Лемма 11.4.3. *Пусть $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, E, E' те же, что и ранее. Тогда $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$, $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ принадлежат тем же из типов* (I) — (III), *что и $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ (см. теорему X). В частности*:

(i) *если $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ — факторы типа* (I) *и $D_{\mathbf{M}}(F)$ и $D_{\mathbf{M}'}(F)$ даны в стандартной нормировке, то то же самое верно и для $D_{\mathbf{M}}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F_{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'})$, $D_{\mathbf{M}'}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F_{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'})$. Мы имеем тип* ($\mathrm{I}_n$) *или* ($\mathrm{I}_\infty$) *для $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ (соответственно $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$) в зависимости от того, является ли $\mathfrak{M}$ (соответственно $\mathfrak{M}'$) конечномерным размерности $n<\infty$ пространством или бесконечномерным*;

(ii) *если $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ имеют тип* (II), *то $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ (соответственно $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$) имеет тип* ($\mathrm{II}_1$) *или* ($\mathrm{II}_\infty$) *в зависимости от того, является ли $\mathfrak{M}$ (соответственно $\mathfrak{M}'$) конечным или бесконечным. Таким образом, если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ оба конечны, то число C из теоремы X (при стандартной нормировке) имеет инвариантный смысл. Если мы будем менять $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, то C будет пропорциональным $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})/D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}')$*;

(iii) *если $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ имеют тип* (III), *дальнейшие комментарии излишни.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ имеют тип (I). Примем, что $D_{\mathbf{M}}(F)$, $D_{\mathbf{M}'}(F')$ имеют стандартную нормировку. Положим $D_{\mathbf{M}}(E)=m$, $D_{\mathbf{M}'}(E')=n$, тогда $m,n>0$, т. е. $m,n=1,2,\ldots,\infty$. При этом области значений $D_{\mathbf{M}}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})$ и $D_{\mathbf{M}'}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})$ равны $0,1,\ldots,m$ и $0,1,\ldots,n$ соответственно. Поэтому $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$, $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ принадлежат к типу (I) и (i) доказано.

Пусть, далее, **M**, **M**$'$ имеют тип (II). Выберем $D_{\mathbf{M}}(F)$, а затем $D_{\mathbf{M}'}(F')$ в произвольных нормировках. Положим $D_{\mathbf{M}}(E)=\alpha_0$, $D_{\mathbf{M}'}(E')=\alpha_0'$, тогда $\alpha_0, \alpha_0'>0$ и области значений $D_{\mathbf{M}}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})$ и $D_{\mathbf{M}'}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})$ состоят из всех α с $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$ и всех α' с $0\leqslant\alpha'\leqslant\alpha_0'$ соответственно. Поэтому $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$, $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ принадлежат типу (II), и все части (ii), за исключением тех, которые относятся к C, доказаны.

Относительно C (см. теорему X) отметим следующее: для $f\in\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'$ $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ равно $[A_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}f;\ A\in\mathbf{M}]$, т. е. $]AEE'f$, $A\in\mathbf{M}$, A коммутирует с $E]$. Далее с равным успехом можно написать $EAEE'f$, и, заменив A на EAE (он принадлежит **M**, коммутирует с E, а $EAEE'$ остается неизменным), мы можем допустить все $A\in\mathbf{M}$. Теперь $EAEE'f=EAf$, поскольку $f\in\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'$, так что мы имеем $[EAf;\ A\in\mathbf{M}]=[Eg, g\in\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}]=[EE_f^{\mathbf{M}}h, h\in\mathfrak{H}]$. Но $E\in\mathbf{M}$, $E_f^{\mathbf{M}}\in\mathbf{M}'$ коммутируют, значит, $EE_f^{\mathbf{M}}=P_{\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}}$, поэтому $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}=\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$, $E_f^{\mathbf{M}(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}=(E_f^{\mathbf{M}})_{(\mathfrak{M})}$. Кроме того, из $f\in\mathfrak{M}'\eta\mathbf{M}'$ следует, что $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}\subset\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}\subset\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'$, поэтому можно написать $E_f^{\mathbf{M}(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}=(E_f^{\mathbf{M}})_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$. Аналогичным образом

$$E_f^{\mathbf{M}'(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}=(E_f^{\mathbf{M}'})_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}.$$

Это доказывает, что $D_{\mathbf{M}}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})$, $D_{\mathbf{M}'}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})$ имеют то же самое C, что и $D_{\mathbf{M}}(F)$, $D_{\mathbf{M}'}(F')$. Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ конечны, мы должны перейти к стандартной нормировке, т. е. поделить на $D_{\mathbf{M}}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(1_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})=D_{\mathbf{M}}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(E_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})=$ $=D_{\mathbf{M}}(E)=D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ и соответственно на $D_{\mathbf{M}'}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(1_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})=D_{\mathbf{M}'}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}\times$ $\times(E_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})=D_{\mathbf{M}'}(E)=D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}')$. Тем самым C умножается на $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})/D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}')$, что доказывает остальную часть (ii).

Пусть, наконец, **M**, **M**$'$ имеют тип (III). Тогда $D_{\mathbf{M}}(F)$ и $D_{\mathbf{M}'}(F')$ имеют область значений $0, \infty$. Области значений $D_{\mathbf{M}}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})$, $D_{\mathbf{M}'}^{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}(F_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')})$ должны поэтому быть равны 0 или $0, \infty$. Первый случай невозможен (ибо $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'\neq(0)$), т. е. мы снова получаем $0, \infty$, что означает принадлежность $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ и $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}')}$ к типу (III); (iii) исчерпано.

Лемма 11.4.3 показывает, что в случае (II), если он вообще имеет место, могут появляться комбинации **M**, **M**$'$ (оба из случая (II)) с произвольно заданным C (см. теорему X). В самом деле, выберем **M** типа (II), тогда **M**$'$ тоже имеет этот тип. Выберем такую нормировку $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ и $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{N})$, чтобы $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})\geqslant 1$, $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{H})\geqslant 1$. Тогда можно выбрать $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ и $\mathfrak{M}'\eta\mathbf{M}'$ с произвольно заданными $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M})=\alpha_0$ и $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}')=\alpha_0'$, если только $0\leqslant\alpha_0$, $\alpha_0'\leqslant 1$. Поэтому α_0/α_0', а вместе с тем и C можно задать произвольным образом. Таким образом, инвариант C существует эффективно, как обсуждалось в конце п. 10.2, если только случай (II) вообще имеет место. Мы увидим, что это на самом деле так, в гл. XIII.

11.5. Теперь вернемся к вопросу, сформулированному в конце п. 11.2. Определим тип **R** (**M**, **N**), где **M** и **N** — два коммутирующих фактора, при условии, что **N** имеет тип (I).

Лемма 11.5.1. *Пусть* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — *два коммутирующих фактора, образуем фактор* $\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$. *Пусть далее* φ *минимален относительно* $\mathbf{N}$ (*см. определение* 5.1.3). *Тогда* $\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'}\eta\mathbf{N}$, *а значит,* $\eta\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$ *и* $X \rightleftarrows X_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$ *является алгебраическим изоморфизмом колец* $\mathbf{M}$ *и* $(\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N}))_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$.

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'}\eta\mathbf{N}$, поскольку $\mathbf{N}\subset\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, $\mathbf{N}'\supset(\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N}))'$, отсюда следует, что $\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'}\eta\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$. Таким образом, $E_\varphi^{\mathbf{N}'}\in\mathbf{N}$ и $\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, кроме того, он коммутирует со всеми $X\in\mathbf{M}$. Соответствие $X\rightleftarrows X_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$ является алгебраическим изоморфизмом, если это взаимно однозначное отображение; но это — взаимно однозначное отображение всех $Y\in\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, для которых $E_\varphi^{\mathbf{N}'}Y = YE_\varphi^{\mathbf{N}'} = Y$ на $(\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N}))_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$ (по лемме 11.3.3, (i)). Таким образом, нам осталось доказать лишь следующее: соответствие $X_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})} = Y_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$ порождает взаимно однозначное отображение всех $X\in\mathbf{M}$ на все $Y\in\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, для которых $E_\varphi^{\mathbf{N}'}Y = YE_\varphi^{\mathbf{N}'} = Y$. Если задано $X\in\mathbf{M}$, то $Y = E_\varphi^{\mathbf{N}'}X$ обладает всеми перечисленными выше свойствами, и ясно, что $Y_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})} = X_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$. Кроме того, при заданном X наше соответствие определяет Y однозначно, потому что такое Y однозначно определяется своим $Y_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$ просто в силу взаимной однозначности соответствия $Y\rightleftarrows Y_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$, $Y\in\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, $E_\varphi^{\mathbf{N}'}Y = YE_\varphi^{\mathbf{N}'} = Y$ (согласно лемме 11.3.3, (i)). Таким образом, $X_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})} = Y_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$ — взаимно однозначное отображение всех $X\in\mathbf{M}$ на часть $Y\in\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, $E_\varphi^{\mathbf{N}}Y = YE_\varphi^{\mathbf{N}'} = Y$. Нам осталось доказать, что каждый такой Y соответствует какому-нибудь X, т. е. имеет вид $Y = E_\varphi^{\mathbf{N}'}X$, $X\in\mathbf{M}$.

Равным образом можно доказать, что если $Y\in\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, то $E_\varphi^{\mathbf{N}'}YE_\varphi^{\mathbf{N}'} = E_\varphi^{\mathbf{N}'}X$ для некоторого $X\in\mathbf{M}$. Пусть $\mathbf{P}$ будет множеством всех тех Y_0, для которых это выполнено для всех $Y = AY_0B$, $A, B\in\mathbf{N}$, иначе говоря, тех Y_0, для которых $E_\varphi^{\mathbf{N}'}AY_0BE_\varphi^{\mathbf{N}'}\in\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$ (см. лемму 11.3.3, (i); отметим, что $E_\varphi^{\mathbf{N}'}\in\mathbf{N}\subset\mathbf{M}$). Ясно, что $\mathbf{P}$ слабо замкнуто (вместе с $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$) и что из $Y_1, Y_2\in\mathbf{P}$ следует αY_1, Y_1^*, $Y_1+Y_2\in\mathbf{P}$ и $Y_1Y_2\in\mathbf{P}$, последнее верно, ибо

$$\sum_{p=1}^{\infty} E_\varphi^{\mathbf{N}'}AY_1U_{1,p}E_\varphi^{\mathbf{N}'}\cdot E_\varphi^{\mathbf{N}'}U_{p,1}Y_2BE_\varphi^{\mathbf{N}'} = \sum_{p=1}^{\infty} E_\varphi^{\mathbf{N}'}AY_1U_{1,p}P_{[f_{1,1},f_{1,2},\dots]}U_{p,1}Y_2BE_\varphi^{\mathbf{N}'} =$$
$$= \sum_{p=1}^{\infty} E_\varphi^{\mathbf{N}'}AY_1P_{[f_{p,1},f_{p,2},\dots]}Y_2BE_\varphi^{\mathbf{N}'} = E_\varphi^{\mathbf{N}'}AY_1Y_2BE_\varphi^{\mathbf{N}'}.$$

(Выберем $U_{m,p}$, $f_{m,p}$ по лемме 5.3.6 для N с $f_{1,1}=\varphi$.) Таким образом, $\mathbf{P}$ — кольцо.

Если $Y_0 = XZ$, $X\in\mathbf{M}$, $Z\in\mathbf{N}$, то для $A, B\in\mathbf{N}$ $E_\varphi^{\mathbf{N}'}AXZBE_\varphi^{\mathbf{N}'} = E_\varphi^{\mathbf{N}'}AZBE_\varphi^{\mathbf{N}'}\cdot X$. Поскольку $E_\varphi^{\mathbf{N}'}$ минимально относительно $\mathbf{N}$, последняя часть доказательства леммы 5.1.3 дает $E_\varphi^{\mathbf{N}'}AZBE_\varphi^{\mathbf{N}'} = \alpha E_\varphi^{\mathbf{N}'}$ (нужно заменить там $\mathbf{M}, E = E_f^{\mathbf{M}'}, B$ на $\mathbf{N}, E_\varphi^{\mathbf{N}'}, E_\varphi^{\mathbf{N}'}AZBE_\varphi^{\mathbf{N}'}$). Таким образом, предыдущее выражение равно $\alpha E_\varphi^{\mathbf{N}}X\in\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'})}$. Значит, $Y_0 = XZ\in\mathbf{P}$. Отсюда следует, что $\mathbf{P}\supset M$ и $\mathbf{N}$, т. е. $\mathbf{P}\supset\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$. Применение к $Y_0\in\mathbf{R}(\mathbf{M},\mathbf{N})$, $A = B = 1$ завершает доказательство.

Лемма 11.5.2 *Пусть* **M**, **N** — *два коммутирующих фактора, причем* **N** *имеет тип* (I). *Тогда* **R** (**M**, **N**) *имеет тот же тип* (I)—(III), *что и* **M**. *В частности:*

(i) *если* **M** *имеет тип* (I_m), $m = 1, 2, \ldots, \infty$, *а* **N** — *тип* (I_n), $n = 1, 2, \ldots, \infty$, *то* **R**(**M**, **N**) *имеет тип* $(I_{m\cdot n})$;

(ii) *если* **M** *принадлежит типу* (II_m), $m = 1, \infty$, *а* **N** — *типу* (I_n), $n = 1, 2, \ldots, \infty$, *то* **R** (**M**, **N**) *принадлежит типу* (II_p), *где* $p = 1$, если *m и n оба конечны, и* $p = \infty$, *если m или n бесконечно*;

(iii) *если* **M** *принадлежит типу* (III), *дальнейшие комментарии излишни.*

Доказательство. Поскольку **N** принадлежит типу (I), согласно теореме IV существуют минимальные φ (относительно **N**). Выберем один из них и положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\varphi^{\mathbf{N}'}$, тогда по лемме 11.5.1 **M** алгебраически изоморфно $(\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))_{(\mathfrak{M})}$. Поэтому согласно теореме IX они принадлежат одному и тому же типу. Теперь лемма 11.4.3 (после замены в ней **M**, $\mathfrak{M}$ на **R** (**M**, **N**), $\mathfrak{M}$) показывает, что **M** и **R** (**M**, **N**) принадлежат одному и тому же типу (I)—(III).

Рассмотрим теперь (i)—(iii).

Если **1** бесконечен относительно **M**, то, очевидно, это так и относительно **R** (**M**, **N**); то же самое верно и для **N** и **R** (**M**, **N**). Это обеспечивает (i) и (ii), если $m = \infty$ или $n = \infty$, а также исчерпывает (iii). Нам осталось рассмотреть (i) и (iii) для конечных m, n.

Построим для **N** нормированную ортогональную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из леммы 5.3.4, где все φ_i минимальны, $\mathfrak{M}_{\varphi_1}^{\mathbf{N}'}$, $\mathfrak{M}_{\varphi_2}^{\mathbf{N}'}$, ... взаимно ортогональны и $[\mathfrak{M}_{\varphi_1}^{\mathbf{N}'}, \mathfrak{M}_{\varphi_2}^{\mathbf{N}'}, \ldots] = \mathfrak{H}$. Из лемм 5.3.5 — 5.3.8 мы знаем, что, поскольку **N** — фактор типа (I_n), число этих φ равно $n: \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ (n конечно!).

Лемма 11.5.1 применима к каждому φ_i. Значит, $(\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))_{(\mathfrak{M}_{\varphi_i}^{\mathbf{N}'})}$ того же типа, что и **M**: (I_m) и соответственно (II_1) (для (i) и соответственно (ii)). Поэтому $\mathfrak{M}_{\varphi_1}^{\mathbf{N}'}$ имеет (относительную) размерность m в стандартной нормировке $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})_{(\mathfrak{M}_{\varphi_1}^{\mathbf{N}'})}$, соответственно конечную относительную размерность в любой нормировке $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N})_{(\mathfrak{M}_{\varphi_i}^{\mathbf{N}'})}$. Согласно лемме 11.4.3, (i) и (ii) то же верно для $\mathfrak{M}_{\varphi_i}^{\mathbf{N}'}$ и **R**(**M**, **N**). Поскольку $\mathfrak{M}_{\varphi_i}^{\mathbf{N}'}$ взаимно ортогональны и $[\mathfrak{M}_{\varphi_1}^{\mathbf{N}'}, \ldots, \mathfrak{M}_{\varphi_n}^{\mathbf{N}'}] = \mathfrak{H}$, из аддитивности относительной размерности следует, что она равна mn (в стандартной нормировке) и конечна (в любой нормировке) для $\mathfrak{H}$ относительно **R**(**M**, **N**). Таким образом, мы имеем случай $(I_{m\cdot n})$ соответственно (II_1) для **R**(**M**, **N**).

Это завершает доказательство.

Лемма 11.5.2 показывает, что если тип (II) вообще существует, то существует и (II_∞) ((II_1) обсуждался в п. 11.4). Достаточно взять $\mathbf{M}_0$ типа (II) в $\mathfrak{H}_1$, любой $\mathbf{N}_0$ типа (I_∞) в $\mathfrak{H}_2$ (например, $\mathfrak{H}_2$ — гильбертово пространство, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{B}_2$), а затем образовать $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0^{(1)}$, $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0^{(2)}$. Тогда **R** (**M**, **N**) обязательно окажется типа (II_∞). Все это, однако, будет установлено исчерпывающим образом в главе XII.

Часть IV
ПРИМЕРЫ СЛУЧАЯ (II)

Глава XII
ПОСТРОЕНИЕ M, M′

12.1. В конце п. 8.6 было установлено существование всех случаев (I_n), (I_∞) и всех их комбинаций для факторов **M** и парных факторизаций соответственно. Сейчас мы собираемся сделать то же самое для случаев (II_1), (II_∞). Таким образом, мы ответим на большую часть вопросов, поднятых в проблемах 3 и 4.

Нашей первой целью будет построение некоторых парных факторизаций **M**, **M′**, принадлежащих типу (II_1), (II_1) (C из теоремы X равно 1) или (II_∞), (II_∞). Эти факторизации будут содержать много произвольных параметров и поэтому представлять довольно широкий спектр примеров. Фактически дальнейшие построения, основанные на них, дадут отрицательное решение проблемы 1.

Определение 12.1.1. *Будем рассматривать группы $\mathfrak{G}$ следующего вида*:

(i) *$\mathfrak{G}$ — группа, т. е. в ней определены правило композиции ab, элемент, обратный a^{-1}, и единица 1 со свойствами $(ab)c = a(bc)$, $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, $a1 = 1a = a$ (так что ab ассоциативно, но не обязательно коммутативно)*;

(ii) *$\mathfrak{G}$ конечна или счетна.*

Определение 12.1.2. *Будем рассматривать пространства S следующего вида: на S задана внешняя мера Лебега, т. е. каждому подмножеству T из S сопоставлено вещественное число $\infty \geqslant \mu^*(T) \geqslant 0$ со следующими свойствами*:

(i) *из $T_1 \subset T_2$ следует, что $\mu^*(T_1) \leqslant \mu^*(T_2)$*;

(ii) *для каждой (конечной или бесконечной) последовательности $T_1, T_2, \ldots$*

$$\mu^*(T_1 \dot{+} T_2 \dot{+} \ldots) \leqslant \mu^*(T_1) + \mu^*(T_2) + \ldots$$

Теперь определим, следуя Каратеодори (см. [4, с. 246]), измеримость:

(*) подмножество T из S *измеримо* тогда и только тогда, когда для любого подмножества T' из S $\mu^*(T') = \mu^*(TT') + \mu^*(T' - TT')$.

Тогда будем писать $\mu(T)$ вместо $\mu^*(T)$ и называть это число *мерой* T.

Продолжим перечисление наших постулатов.

(iii) *если $\mu^*(T) < \alpha$, то существует измеримое T_0, для которого $T_0 \supset T$, $\mu(T_0) < \alpha$*;

(iv) *существует (конечная или бесконечная) последовательность измеримых множеств $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ... с конечной мерой, обладающая таким свойством: если $x, y \in S$ и $x \in T^{(i)}$ эквивалентно $y \in T^{(i)}$ (для всех $i = 1, 2, \ldots$), то $x = y$.*

Отметим следующие следствия определения 12.1.2: $\infty \geqslant \mu^*(T) \geqslant 0$ и условия (i), (ii) соответствуют условиям Каратеодори (I)—(III) без (IV) [4, с. 238—239]. Это исключение, однако, является естественным, ибо (IV) явным образом использует понятие расстояния, а мы не требуем, чтобы расстояние (или какой-либо сорт топологии) было определено в S. Условие (iii) (памятуя (i)) эквивалентно условию (V) Каратеодори [4, с. 258], поэтому наша внешняя мера является регулярной (см там же), если не учитывать топологического условия (IV). Подроб-

ная проверка рассуждений Каратеодори показывает, что, как следствие этого, остаются верными все те результаты (из [4]), касающиеся внешней меры, измеримости и меры, которые не содержат явным образом топологии в своих утверждениях. Это относится и к рассуждениям на с. 246—250 loc. cit. (ср. замечание там же на с. 257). Поэтому 0 и S измеримы, если измеримы T', T'', то $T'-T'\cdot T''$ и $T' \dotplus T'' \dotplus \ldots$ и $T'T''\ldots$ тоже измеримы. Кроме того, имеют место хорошо известные теоремы сходимости для мер.

Как мы видим, основным различием между характеристиками ситуации в S и той, которая описана в [4], является следующее: заведомо измеримые множества, служащие базисом для всех построений измеримых функций (см. определение 12.1.3 ниже), являются там борелевскими множествами (топологическое понятие), в то время как теперь их роль играют множества $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ... из (iv).

На самом деле основным значением (iv), единственного из наших постулатов, не имеющего аналога в списке Каратеодори, является замена (отсутствующей или игнорируемой) топологии в S, и в частности «топологической сепарабельности» S.

Приведем несколько очевидных примеров пространств S.

Пример а). Пусть S — (конечная или бесконечная) последовательность $S=(x_1, x_2, \ldots)$ и пусть дана соответствующая последовательность вещественных чисел $\infty > \bar{\alpha}_n \geqslant 0$. Положим

$$\mu^*(T) \equiv \sum_{x_n \in T} \bar{\alpha}_n.$$

Тогда, очевидно, выполнены условия (i), (ii), условие (iii), ибо все множества $T \subset S$ измеримы и условие (iv), потому что в качестве $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ... мы можем взять все одноэлементные $T \subset S$.

Пример b). Пусть S — любое измеримое подмножество конечномерного евклидова пространства. Пусть, далее, $\mu^*(T)$ — обычная лебегова мера. Тогда (i)—(iii), очевидно, выполнены; (iv) выполнено, ибо мы можем взять в качестве $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ... последовательность множеств $S\cdot S_1$, $S\cdot S_2$, ..., где S_1, S_2, ... — все шары с рациональным радиусом и рациональными координатами центра.

Теперь мы обычным путем введем интеграл Лебега.

Определение 12.1.3. *Комплекснозначная функция $f(x)$, определенная для всех $x \in S$, называется измеримой, если множества $(x;\ \Re(f(x)) < \alpha)$, $(x;\ \Im(f(x)) < \alpha)$ ($\Re$ — вещественная, $\Im$ — мнимая часть) измеримы для всех вещественных α. Понятия суммируемости и (лебегова) интеграла $\int_S f(x)\,dx$ измеримой функции $f(x)$ определяются одним из нескольких обычных эквивалентных способов.* (Процедура Каратеодори [4, с. 418—427], совпадающая с «геометрическим» определением Лебега [10, с. 116—120], требует сначала введения понятия внешней меры на произведении пространств. Однако «аналитическое» определение Лебега [10, с. 112—116] можно применять непосредственно; другое очень удобное определение принадлежит Бохнеру [2, с. 265—267].)

Образуем теперь три функциональных пространства.

Определение 12.1.4. *Пусть $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ — множество всех комплекснозначных функций $f(a)$, определенных для всех $a \in \mathfrak{G}$ с конечной суммой $\sum_{a \in \mathfrak{G}} |f(a)|^2$.*

Положим по определению

$$(f, g)_{\mathfrak{G}} = \sum_{a \in \mathfrak{G}} f(a) \overline{g(a)}.$$

Пусть $\mathfrak{H}_S$ — *множество всех измеримых комплекснозначных функций* $f(x)$, *определенных для всех* $x \in S$, *для которых конечен* $\int_S |f(x)|^2 dx$. *Отождествим* f *и* g, *если* $f(x) = g(x)$ *всюду, за исключением множества меры* 0. *Определим* $(f, g)_S = \int_S f(x) \overline{g(x)}\, dx$.

Пусть $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ — *множество всех комплекснозначных функций* $F(x, a)$, *определенных для всех* $x \in S$, $a \in \mathfrak{G}$, *измеримых по* x (*для любого фиксированного* $a \in \mathfrak{G}$) *с конечной суммой* $\sum_{a \in \mathfrak{G}} \int_S |F(x, a)|^2 dx$. *Отождествим* F *и* $\mathfrak{G}$, *если* $F(x, a) = G(x, a)$ *всюду, за исключением* x*-множества меры* 0 (*зависящего от* a). *Положим по определению*

$$(F, G)_{S\mathfrak{G}} = \sum_{a \in \mathfrak{G}} \int_S F(x, a) \overline{G(x, a)}\, dx.$$

Операции $\alpha \cdot$ *и* «$+$» *определены очевидным образом во всех трех пространствах* $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{H}_S$, $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$.

Согласно определению 12.1.2, (iv) никакие две точки $x \neq y$ не могут обладать свойством

$$x, y \notin T^{(1)} \dot{+} T^{(2)} \dot{+} \ldots;$$

$S - (T^{(1)} \dot{+} T^{(2)} + \ldots)$ измеримо, и, если его мера конечна, мы можем добавить его к последовательности $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$, получая таким образом $T^{(1)} \dot{+} T^{(2)} \dot{+} \ldots \ldots = S$. Единственный случай, когда этого нельзя сделать, это когда $S - (T^{(1)} \dot{+} T^{(2)} \dot{+} \ldots) = (x_0)$, $\mu((x_0)) = \infty$. Но тогда мы должны иметь $f(x_0) = 0$ и $F(x_0, a) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{H}_S$ и $F \in \mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ соответственно, так что можно выбросить x_0 из S. (Если $x \in S$, $x \neq x_0$, то $x \in T^{(i)}$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots$, так что $\mu^*(x) \leqslant \mu(T^{(i)}) < \infty$. Поэтому определение 12.1.5 (см. ниже) исключает возможность $x_0 a \neq x_0$, значит, $x_0 a = x_0$, таким образом, исключение x_0 не влияет и на операцию xa.) В дальнейшем мы всегда предполагаем, что

$$T^{(1)} \dot{+} T^{(2)} \dot{+} \ldots = S.$$

Если $\mu(S) = 0$, то $\mathfrak{H}_S$ и $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ могут состоять только из 0. Поэтому мы явно требуем, чтобы $\mu(S) > 0$.

Лемма 12.1.1. *Все три пространства* $\mathfrak{H}_S$, $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ *и* $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ *удовлетворяют постулатам* A, B, C, E *из* [16, с. 64 — 66], *т. е. являются конечномерными евклидовыми или гильбертовыми пространствами* (*и* $\neq (0)$).

Используя полную ортонормированную систему из всех функций

$$\varphi_{a_0}(a) = \begin{cases} 1 & \text{для } a = a_0, \\ 0 & \text{для } a \neq a_0, \quad a_0 \in \mathfrak{G} \text{ в } \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}, \end{cases}$$

и устанавливая соответствие $F(x, a) \sim \langle F(x, \bar{a}_1), F(x, \bar{a}_2), \ldots \rangle$ ($\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ — *некоторая нумерация элементов* $\mathfrak{G}$, *так что* a_0 (*см. выше*) *пробегает* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$), *мы получим изоморфизм* $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ *с* $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} \otimes \mathfrak{H}_S$ *в смысле определения* 2.4.1 *и леммы* 2.4.1.

В дальнейшем будем использовать более симметричную запись

$$F(x, a) \sim \langle F(x, a_0); \quad a_0 \in \mathfrak{G} \rangle.$$

Доказательство. Если мы используем нумерацию $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ элементов $\mathfrak{G}$ и положим $f(\bar{a}_n) = x_n$, $n = 1, 2$, то $f(a) \sim (x_1, x_2, \ldots)$ и наше определение совпадает с исходным определением конечномерного евклидова или гильбертова пространства (см. [16, с. 69]). Относительно $\mathfrak{H}_S$ достаточно заметить, что рассуждения из [16, с. 108—111], касающиеся A, B, E, непосредственно применимы к нему, те же, которые касаются C, применимы, если возникающую там систему окрестностей заменить на $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$

Поскольку $\mu(S) = \mu(T^{(1)} \dotplus T^{(2)} \dotplus \ldots) > 0$, то для некоторого i $\mu(T^{(i)}) > 0$. В то же время она меньше ∞. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in T^{(i)}, \\ 0, & x \notin T^{(i)} \end{cases}$$

принадлежит $\mathfrak{H}_S$ и не равна нулю. Значит, $\mathfrak{H}_S \neq (0)$. Последняя часть нашей леммы получается немедленно путем сравнения нашего определения с определением 2.4.1 и леммой 2.4.1. Поскольку $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ изоморфно $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} \otimes \mathfrak{H}_S$, оно тоже должно удовлетворять A, B, C, E. Поскольку $\mathfrak{H}_S \neq (0)$, то и $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}} \neq (0)$.

До сих пор связь между S и $\mathfrak{G}$ была чисто формальной, обязанной своим происхождением тому, что мы построили пространство $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}_S \otimes \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$. Внутренняя связь между ними устанавливается следующими предположениями.

Определение 12.1.5. $\mathfrak{G}$ *является m-группой в* S, *если для каждого* $a \in \mathfrak{G}$ *определено взаимно однозначное отображение* $x \rightleftarrows xa$ S *на себя с такими свойствами*:

(i) *если* $T \subset S$ *и* T_a — *образ* T *относительно отображения* $x \rightleftarrows xa$, *то* $\mu^*(T) = \mu^*(T_a)$. (*Отсюда следует, что измеримость* T *эквивалентна измеримости* T_a .);

(ii) $(xa)b = x(ab)$. (*Отсюда следует, что* $x \cdot 1 = x$ *и что отображение* $x \rightleftarrows xa^{-1}$ *обратно к* $x \rightleftarrows xa$.);

(iii) *если* $a \neq 1$, *то* $xa = x$ *может выполняться только на множествах меры* 0.

Группа $\mathfrak{G}$ *эргодична на* S, *если, помимо* (i)—(iii), *имеем*

(iv) *если измеримое множество* $T \subset S$ *отличается от каждого из множеств* T_a, $a \in \mathfrak{G}$, *только на множество меры* 0 (*но зависящее от* a, *иными словами*, $\mu((T \dotplus T_a) - (T \cdot T_a)) = 0$), *то или* $\mu(T) = 0$, *или* $\mu(S - T) = 0$.

Отметим, что (iv) отличается от обычного определения эргодичности в двух аспектах: во-первых, $\mathfrak{G}$ не обязательно является просто группой трансляций, она даже не обязательно абелева; во-вторых, (что важно в случае $\mu(S) = \infty$) мы не ограничиваем требование (iv) лишь на множества T с конечной мерой $\mu(T)$.

12.2. Сейчас мы введем и исследуем некоторые операторы в $\mathfrak{H}_S$.

Лемма 12.2.1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — т-группа в S. Определим операторы*

(i) $U_a f(x) = f(xa)$ *для любого* $a \in \mathfrak{G}$;

(ii) $L_{\varphi(x)} f(x) = \varphi(x) f(x)$ *для любой ограниченной, измеримой комплексно-значной функции* $\varphi(x)$, *определенной для всех* $x \in S$.

Эти операторы ограничены, а U_a *даже унитарен.*

Доказательство. Имеем $\int |U_a(f(x))|^2 dx = \int |f(xa)|^2 dx = \int |f(x)|^2 dx$, так что U_a ограничен и $\|U_a f\| = \|f\|$. Очевидно, $U_{a^{-1}} U_a = U_a U_{a^{-1}} = 1$, так что U_a обладает обратным, а значит, унитарен (см. [16. с. 71]).

Если $|\varphi(x)| \leqslant C$ для всех $x \in S$, то $\int_S |L_{\varphi(x)} f(x)|^2 dx = \int |\varphi(x)|^2 |f(x)|^2 dx \leqslant \leqslant C^2 \int_S |f(x)|^2 dx$, $\|L_{\varphi(x)} f\| \leqslant C \|f\|$.

Значит, $L_{\varphi(x)}$ тоже ограничен.

Лемма 12.2.2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — т-группа в S. Обозначим через* $\mathbf{L}$ *множество всех операторов* $L_{\varphi(x)}$ *из леммы* 12.2.1. *Тогда* $\mathbf{L}$ *является кольцом, причем* $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{L}'$ обязательно является кольцом, достаточно доказать, что $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$, Так как

$$(L_{\varphi(x)})^* = L_{\overline{\varphi}(x)}, \qquad L_{\varphi(x)} \cdot L_{\psi(x)} = L_{\varphi(x)\psi(x)},$$

то каждый $L_{\psi(x)}$ коммутирует с каждым $L_{\varphi(x)}$ и $(L_{\varphi(x)})^*$, значит, $L_{\psi(x)} \in \mathbf{L}$ и потому $\mathbf{L} \subset \mathbf{L}'$. Нам осталось доказать лишь, что $\mathbf{L}' \subset \mathbf{L}$.

Предположим для этого, что $A \in \mathbf{L}'$. Тогда A коммутирует с любым $L_{\varphi(x)}$, т. е. $AL_{\varphi(x)} = L_{\varphi(x)} A$. Иными словами,

$$A(\varphi(x) f(x)) = \varphi(x) A f(x). \qquad (\#)$$

Предположения таковы: $\varphi(x)$, $f(x)$ измеримы, $\varphi(x)$ ограничена, $\int_S |f(x)|^2 dx$ конечен, а равенство справедливо всюду, за исключением множества меры 0. Между прочим, такие исключения допускаются во всех уравнениях, которые мы будем выводить.

Пусть $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ — множества из определения 12.1.2,(iv) ; предположим (следуя замечанию перед леммой 12.1.1), что $T^{(1)} \dotplus T^{(2)} \dotplus \ldots = S$. Положим по определению

$$e_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{для } x \in T^{(1)} \dotplus \ldots \dotplus T^{(i)}, \\ 0, & \text{для } x \notin T^{(1)} \dotplus \ldots \dotplus T^{(i)}. \end{cases}$$

Применим теперь $(\#)$ к $f = e_i$. Получаем $A(e_i(x)\varphi(x)) = A(e_i(x))\varphi(x)$. Для $i \geqslant j$ $e_i(x) e_j(x) = e_j(x)$, так что $\varphi = e_j$ дает $Ae_j(x) = (Ae_i(x)) e_j(x)$. Поэтому, если $x \in T^{(1)} \dotplus \ldots \dotplus T^{(j)}$, то $Ae_j(x) = Ae_i(x)$, иными словами, для $x \in T^{(1)} \dotplus \ldots \dotplus T^{(j)}$ все $Ae_i(x)$, $i \geqslant j$, совпадают. Поэтому для любого x все $Ae_i(x)$ с достаточно большими i имеют одинаковое значение. Обозначим его через $\psi(x)$, поскольку $\psi(x) = \lim_{i \to \infty} Ae_i(x)$ — это измеримая функция. Теперь мы имеем $Ae_j(x) = \psi(x) e_j(x)$. При этом наше исходное равенство превращается в $Ae_j(x)\varphi(x) = \psi(x) e_j(x) \varphi(x)$. Это означает, что

$Af(x) = \psi(x) f(x)$, где $f(x) = e_i(x) \varphi(x)$. Таким образом, равенство доказано, если $f(x)$ ограничено и равно 0 для всех $x \notin T^{(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} T^{(i)}$ с некоторым $i = 1, 2, \ldots$

Оператор A ограничен, скажем $\| Af \| \leqslant c \|f\|$; поэтому для таких f

$$\int_S |\psi(x)|^2 |f(x)|^2 dx \leqslant C^2 \int_S |f(x)|^2 dx.$$

Положим теперь

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\psi(x)| \geqslant C+1, \quad x \in T^{(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} T^{(i)}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим множество всех x, для которых $|\psi(x)| \geqslant C + 1$, через T_0. Тогда приведенное неравенство дает

$$(C+1)^2 \mu(T_0(T^{(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} T^{(i)})) \leqslant C^2 \mu(T_0(T^{(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} T^{(i)})),$$

$$\mu(T_0(T^{(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} T^{(i)})) = 0$$

и, переходя к пределу при $i \to \infty$, $\mu(T_0) = 0$. Поэтому мы имеем всюду $|\psi(x)| \leqslant C + 1$ (поскольку T_0 не играет роли), т. е. $\psi(x)$ ограничена. Таким образом, для $f(x)$, описанных выше, мы можем написать $Af = L_\psi f$.

Но такие f образуют множество, всюду плотное в $\mathfrak{H}_S$. Для произвольного заданного $f \in \mathfrak{H}_S$ положим для $i = 1, 2, \ldots$

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| < i, \quad x \in T^{(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} T^{(i)}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

тогда каждая функция $f_i(x)$ удовлетворяет нашим требованиям и f_i при $i \to \infty$ сходятся к $f(x)$ (в $\mathfrak{H}_S$). Поскольку операторы A, L_ψ оба ограничены, мы имеем $Af = L_\psi f$ для всех f, это означает, что $A = L_\psi \in \mathbf{L}$. Таким образом, мы установили включение $\mathbf{L}' \subset \mathbf{L}$, завершив тем самым доказательство.

Лемма 12.2.3. *Пусть $\mathfrak{G}$ — m-группа в S. Равенство $L_{\varphi(x)} = L_{\psi(x)} U_a$ верно, если и только если $a = 1$, $\varphi(x) = \psi(x)$ (кроме множества меры 0) или $a \neq 1$, $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ (кроме множества меры 0).*

Доказательство. Достаточность этих условий очевидна, поэтому нам остается проверить их необходимость. Предположим для этого, что $L_{\varphi(x)} = L_{\psi(x)} U_a$. Тогда имеем $\varphi(x) f(x) = \psi(x) f(ax)$, как только $\int |f(x)|^2 dx$ конечен. Это равенство, как и все, которые мы получим далее, справедливо всюду, за исключением множества меры 0. Используем e_i из доказательства леммы 12.2.2, тогда получим $e_i(x) \varphi(x) = e_i(xa) \psi(x)$, т. е. $\varphi(x) = \psi(x)$, если x и $xa \in T^{(1)} \dot{+} \ldots \dot{+} T^{(i)}$. Собирая эти равенства для всех $i = 1, 2, \ldots$, получим, что $\varphi(x) = \psi(x)$ при любом $x \in S$. Это разрешает вопрос для случая $a = 1$. Предположим теперь, что $a \neq 1$. Подстановка $\varphi(x) = \psi(x)$ в наше исходное равенство дает

$\varphi(x) f(x) = \varphi(x) f(xa)$, а потому $\int_S |\varphi(x)|^2 |f(x)|^2 dx = 0$. Положим теперь

$$e_i'(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in T_i, \\ 0 & \text{для } x \notin T_i, \end{cases}$$

тогда $e_i' \in \mathfrak{H}_S$ и мы можем взять $f = e_i'$. При этом $|f(x) - f(xa)|^2 = 1$ для

$$x \in (T^{(i)} \dot{+} T^{(i)}_{a-1}) - T^{(i)} T^{(i)}_{a-1}$$

и наша формула с интегралом превращается в

$$\int_{S_i} |\varphi(x)|^2 dx = 0, \qquad S_i = (T^{(i)} \dot{+} T^{(i)}_{a-1}) - T^{(i)} T^{(i)}_{a-1}.$$

Положим теперь $S' = \sum_{i=1}^{\infty} ((T^{(i)} \dot{+} T^{(i)}_{a-1}) - T^{(i)} T^{(i)}_{a-1})$. Поскольку подынтегральная функция $|\varphi(x)|^2 \geqslant 0$, сложение полученных равенств по всем $i = 1, 2, \ldots$ даст $\int_{S'} |\varphi(x)|^2 dx = 0$.

Далее, $x \in S - S'$ означает, что $x \notin (T^{(i)} \dot{+} T^{(i)}_{a-1}) - T^{(i)} T^{(i)}_{a-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots$; поэтому $x \in$ или $x \notin$ одновременно $T^{(i)}$ и $T^{(i)}_{a-1}$, т. е. одновременно x и $xa \in T^{(i)}$ или $\notin T^{(i)}$. Согласно определению 12.1.2, (iv) отсюда следует, что $x = xa$. Поскольку $a \neq 1$, из определения 12.1.5 (iii) следует, что $\mu(S - S') = 0$. Но тогда также $\int_S |\varphi(x)|^2 dx = 0$, значит, $\varphi(x) = 0$ (кроме множества меры 0). Это завершает доказательство.

Лемма 12.2.4. *Пусть* $\mathfrak{G}$ *эргодична в* S. *Пусть* $\mathbf{L}$ *такое же, как в лемме 12.2.2, а* $\mathbf{U}$ — *множество всех* U_a, $a \in \mathfrak{G}$. *Тогда* $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}' = (\alpha \cdot 1)$.

Доказательство. Оператор $\alpha \cdot 1$, очевидно, принадлежит к $\mathbf{U}'$ а поскольку $\alpha \cdot 1 = L_\alpha$, $\alpha \cdot 1 \in \mathbf{L}$, то $\alpha \cdot 1 \in \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}'$, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}' \supset (\alpha \cdot 1)$. Нам осталось доказать, что $\mathbf{L}\mathbf{U}' \subset (\alpha \cdot 1)$. Предположим, что $A \in \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}'$. Тогда $A = L_{\varphi(x)}$, и поскольку $A \in \mathbf{U}'$, то $U_a A = A U_a$, $A = U_a^{-1} A U_a$, $L_{\varphi(x)} = L_{\varphi(xa^{-1})}$ для всех $a \in \mathfrak{G}$. Согласно лемме 12.2.3 это означает, что $\varphi(x) = \varphi(xa^{-1})$ всюду, кроме множества меры 0 (зависящего от $a \in \mathfrak{G}$).

Положим $T_\alpha = (x;\ \mathfrak{R}(\varphi(x)) < \alpha)$. Полученное выше соотношение доказывает, что $x \in T_\alpha$ всюду, кроме множества меры 0, эквивалентно $xa^{-1} \in T_\alpha$; откуда

$$\mu((T_\alpha \dot{+} T_{\alpha a}) - (T_\alpha T_{\alpha a})) = 0.$$

Поэтому из определения 12.1.5, (iv) (эргодичности) следует, что

$$\mu(T_\alpha) = 0 \text{ или } \mu(S - T_\alpha) = 0.$$

Обозначим множество всех (вещественных) α с $\mu(T_\alpha) = 0$ через N. Если $\alpha \leqslant \beta$, то $T_\alpha \subset T_\beta$, так что из $\beta \in N$ следует, что $\alpha \in N$. Значит, если α_0 — точная верхняя грань N, $-\infty \leqslant \alpha_0 \leqslant \infty$, то из $\alpha < \alpha_0$ следует, что $\alpha \in N$, т. е. $\mu(T_\alpha) = 0$, а из $\alpha > \alpha_0$ следует, что $\alpha \notin N$, т. е. $\mu(S - T_\alpha) = 0$.

Таким образом, для любого рационального $\alpha < \alpha_0$ $\mu((x;\ \mathfrak{R}(\varphi(x)) < \alpha)) = 0$, и, суммируя по α, получаем $\mu((x;\ \mathfrak{R}(\varphi(x)) < \alpha_0)) = 0$. Для каждого ра-

ционального $\alpha > \alpha_0$ $\mu((x;\ \Re(\varphi(x)) \geqslant \alpha)) = 0$, и суммирование по ним дает $\mu((x;\ \Re(\varphi(x)) > \alpha_0)) = 0$. Вместе получается, что $\mu((x;\ \Re(\varphi(x)) \neq \alpha_0)) = 0$. Аналогичным образом можно найти, что $\mu((x;\ \Im(\varphi(x)) \neq \beta_0)) = 0$ для подходящего β_0, и если положить $\alpha_1 = \alpha_0 + i\beta_0$ и сложить последние два равенства, то получим

$$\mu((x;\ \varphi(x) \neq \alpha_1)) = 0.$$

Итак, мы имеем $\varphi(x) = \alpha_1$ всюду, кроме множества меры 0; значит, $A = L_{\varphi(x)} = \alpha_1 \cdot 1$, $A \in (\alpha \cdot 1)$. Поэтому $\mathbf{LU}' \subset (\alpha \cdot 1)$, что и завершает доказательство.

12.3. Теперь мы переходим к $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$.

Лемма 12.3.1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — m-группа в S. Определим операторы:*

(i) $\overline{U}_{a_0}F(x, a) = F(xa_0, aa_0)$,
(ii) $\overline{V}_{a_0}F(x, a) = F(x, a_0^{-1}a)$ } *для любого* $a_0 \in \mathfrak{G}$;
(iii) $\overline{W}F(x, a) = F(xa^{-1}, a^{-1})$,
(iv) $\overline{L}_{\varphi(x)}F(x, a) = \varphi(x)F(x, a)$,
(v) $\overline{M}_{\varphi(x)}F(x, a) = \varphi(xa^{-1})F(x, a)$ } *для любой измеримой ограниченной комплекснозначной* $\varphi(x)$, *определенной на всех* $x \in S$.

Эти операторы ограничены, а $\overline{U}_{a_0}$, $\overline{V}_{a_0}$, $\overline{W}$ даже унитарны. Более того, $\overline{W} = \overline{W}^{-1}$ и

$$\overline{W}\,\overline{U}_{a_0}\overline{W} = \overline{V}_{a_0}; \qquad \overline{W}\,\overline{L}_{\varphi(x)}\overline{W} = \overline{M}_{\varphi(x)},$$

другими словами, $F \to \overline{W}F$ является инволютивным пространственным изоморфизмом $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$, который переставляет $\overline{U}_{a_0}$, $\overline{L}_{\varphi(x)}$ с $\overline{V}_{a_0}$, $\overline{M}_{\varphi(x)}$.

Доказательство. Ограниченность и унитарность проверяются так же, как и при доказательстве леммы 12.2.1. Равенство $\overline{W}^2 = 1$ следует из прямого вычисления и влечет за собой $\overline{W} = \overline{W}^{-1}$; последние два равенства также получаются прямым вычислением.

Лемма 12.3.2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — m-группа в S. Пусть $\mathbf{I}$ — множество всех $\overline{U}_{a_0}$ и всех $\overline{L}_{\varphi(x)}$, а $\mathbf{J}$ — множество всех $\overline{V}_{a_0}$ и всех $\overline{M}_{\varphi(x)}$ (см. лемму 12.3.1). Для каждого ограниченного оператора $\overline{A}$ в $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ ($\overline{A} \in \mathbf{B}_{S\mathfrak{G}}$) построим разложение из определения 2.4.2 $\overline{A} \sim \langle A_{ab}\rangle_{a,b\in\mathfrak{G}}$, где каждый $A_{a,b} \in \mathbf{B}_S$. (Ср. разложение $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} \otimes \mathfrak{H}_S$ из леммы 12.1.1. Мы заменяем, как там описано, индексы $t, s = 1, 2, \ldots$ на индексы $a, b \in \mathfrak{G}$, ибо так уже была заиндексирована полная нормированная ортогональная система φ_{a_0}, $a_0 \in \mathfrak{G}$ в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$.)*

Тогда $\overline{A} \in \mathbf{I}'$, если и только если $A_{a,b}$ имеют вид $A_{a,b} = L_{\chi_{ab^{-1}}(xb^{-1})}$, и $\overline{A} \in \mathbf{J}'$, если и только если $A_{a,b}$ имеют вид $A_{a,b} = L_{\chi_{a^{-1}b}(x)}U_{b^{-1}a}$. Здесь $\chi_c(x)$ — функция x, которая должна быть ограниченной и измеримой для каждого $c \in \mathfrak{G}$. (Мы не выясняем, для каких систем $\chi_c(x)$, $c \in \mathfrak{G}$, ограниченный $\overline{A}$, которому соответствовала бы данная система $\chi_c(x)$, действительно существует.)

Доказательство. Напомним определение $A_{a,b}$ (определение в наших теперешних обозначениях): $\overline{A}\langle f(x)\varphi_{a'}(a);\ a\in\mathfrak{G}\rangle=\langle A_{a'b}f(x);\ b\in\mathfrak{G}\rangle$, т. е. (если мы заменим a', a на a, b, так что теперь $x\in S$ и $b\in\mathfrak{G}$ — переменные, а $a\in\mathfrak{G}$ — параметр) $\overline{A}f(x)\varphi_a(b)=A_{a,b}f(x)$. Тогда определения $\overline{U}_{a_0}$, $\overline{L}_{\varphi(x)}$ и $\overline{W}$ дают, что если $\overline{A}=\langle A_{ab}\rangle_{a,b\in\mathfrak{G}}$, то

$$\overline{U}_{a_0}^{-1}\overline{A}\overline{U}_{a_0}=\langle U_{a_0}^{-1}A_{aa_0^{-1},ba_0^{-1}}U_{a_0}\rangle_{a,b\in\mathfrak{G}},$$

$$\overline{W}\overline{A}\overline{W}=\langle U_b^{-1}A_{a^{-1},b^{-1}}U_a\rangle_{a,b\in\mathfrak{G}},$$

$$\overline{L}_{\varphi(x)}\overline{A}=\langle L_{\varphi(x)}A_{a,b}\rangle_{a,b\in\mathfrak{G}},$$

$$\overline{A}\overline{L}_{\varphi(x)}=\langle A_{a,b}L_{\varphi(x)}\rangle_{a,b\in\mathfrak{G}}.$$

Далее $\overline{A}\in\mathbf{I}'$ означает, что $\overline{A}$ коммутирует со всеми $\overline{L}_{\varphi(x)}$, $((L_{\varphi(x)})^*=L_{\overline{\varphi(x)}})$ и всеми $\overline{U}_{a_0}$, $((U_{a_0})^*=(\overline{U}_{a_0})^{-1}=\overline{U}_{a_0^{-1}})$. Это, в свою очередь, означает, что $A_{a,b}\in\mathbf{L}'$, т. е. $A_{a,b}\in\mathbf{L}$ (по лемме 12.2.1), и $U_{a_0}^{-1}A_{aa_0^{-1},ba_0^{-1}}U_{a_0}=A_{a,b}$. Из первого утверждения следует, что $A_{a,b}=L_{\omega_{a,b}(x)}$, где $\omega_{a,b}(x)$ — ограниченная измеримая функция x при любых $a,b\in\mathfrak{G}$. Затем, $U_{a_0}^{-1}A_{aa_0^{-1},ba_0^{-1}}U_{a_0}=U_{a_0}^{-1}L_{\omega_{aa_0^{-1},ba_0^{-1}}(x)}U_{a_0}=L_{\omega_{aa_0^{-1},ba_0^{-1}}(xa_0^{-1})}$, так что остающееся требование сводится к $\omega_{aa_0^{-1},ba_0^{-1}}(xa_0^{-1})=\omega_{ab}(x)$. Это равенство, как и последующие, справедливо вне множества меры 0.

Положив $a_0=b$ и $\chi_c(x)=\omega_{c,1}(x)$, мы получим $\omega_{a,}(x)=\chi_{ab^{-1}}(xb^{-1})$. Обратно, если это равенство выполнено для системы ограниченных измеримых функций $\chi_c(x)$, то такими же являются и $\omega_{a,b}(x)$, причем $\omega_{aa_0^{-1},ba_0^{-1}}(xa_0^{-1})=\omega_{a,b}(x)$. Таким образом, характеризация $\overline{A}\in\mathbf{I}'$ дается соотношениями $A_{ab}=L\chi_{ab^{-1}(xb^{-1})}$. Это доказывает наше утверждение относительно $\mathbf{I}'$.

Поскольку пространственный изоморфизм $F\to\overline{W}F$ в $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ переводит $\mathbf{I}$ в $\mathbf{J}$, он же переводит $\mathbf{I}'$ в $\mathbf{J}'$. Поэтому $\overline{B}\in\mathbf{J}'$ означает, что $\overline{B}=\overline{W}\overline{A}\overline{W}$ для некоторого $\overline{A}\in\mathbf{I}$. Полученный выше результат относительно $\overline{A}\in\mathbf{I}'$ вместе с нашей формулой для $\overline{W}\overline{A}\overline{W}$ дает при этом, что $B_{a,b}=U_b^{-1}A_{a^{-1},b^{-1}}U_a=U_b^{-1}L_{\chi_{a^{-1}b}(xb)}U_a=$ $=L_{\chi_{a^{-1}b}(x)}U_b^{-1}U_a=L_{\chi_{a^{-1}b}(x)}U_{ba}^{-1}$.

Это доказывает наше утверждение относительно $\mathbf{J}'$.

Лемма 12.3.3. *Пусть $\mathfrak{G}$ — m-группа в S, а $\mathbf{I}$ и $\mathfrak{G}$ те же, что и прежде. Тогда* $\mathbf{R}(\mathbf{I})=\mathbf{J}',\mathbf{R}(\mathbf{J})=\mathbf{I}'$.

Доказательство. Для $\overline{A}=\overline{V}_{a_0}$ $A_{a,b}=\delta_{a_0ab^{-1}}\cdot\mathbf{1}$, а для $\overline{A}=\overline{M}_{\varphi(x)}$ $A_{ab}=\delta_{ab^{-1}}L_{\varphi(xb^{-1})}$ $\left(\text{мы определяем } \delta_c=\begin{cases}1 & \text{для } c=1,\\ 0 & \text{для } c\neq 1\end{cases}\right)$. Значит, $\overline{V}_{a_0}$, $\overline{M}_{\varphi(x)}\in\mathbf{I}'$

($c\,\chi_c(x)=\delta_{a_0c}$ и соответственно $\delta_c\varphi(x)$), т. е. $\mathbf{J}\subset\mathbf{I}'$. Поскольку $\mathbf{I}'$ — кольцо, отсюда следует, что $\mathbf{R}(\mathbf{J})\subset\mathbf{I}'$.

Если $\bar{A}\in\mathbf{I}'$, $\bar{B}\in\mathbf{J}'$, то $A_{a,b}=L_{\chi_{ab^{-1}}(xb^{-1})}$, $B_{a,b}=L_{\xi_{a^{-1}b}(x)}U_{b^{-1}a}$. Положим теперь $\bar{C}=\bar{A}\bar{B}$, $\bar{D}=\bar{B}\bar{A}$, тогда формула (iv) из леммы 2.4.3 дает

$$C_{a,b}=\sum_c A_{c,b}B_{a,c}=\sum_c L_{\chi_{cb^{-1}}(xb^{-1})\xi_{a^{-1}c}(x)}U_{c^{-1}a}=\sum_c L_{\chi_{ac^{-1}b^{-1}}(xb^{-1})\xi_{c^{-1}}(x)}U_c$$

(мы заменили индекс суммирования c на ac^{-1}) и

$$D_{a,b}=\sum_c B_{c,b}A_{a,c}=\sum_c L_{\xi_{c^{-1}b}(x)}U_{b^{-1}c}L_{\chi_{ac^{-1}}(xc^{-1})}=\sum_c L_{\xi_{c^{-1}b}(x)\chi_{ac^{-1}}(xb^{-1})}U_{b^{-1}c}=$$
$$=\sum_c L_{\chi_{ac^{-1}b^{-1}}(xb^{-1})\xi_{c^{-1}}(x)}U_c$$

(мы заменили индекс суммирования c на bc; напомним, что порядок суммирования в $\sum_c$ не играет роли, см. лемму 2.4.3, (iv)). Таким образом, имеем $\bar{C}=\bar{D}$ и $\bar{A}\bar{B}=\bar{B}\bar{A}$. Поскольку из $B\in\mathbf{J}'$ следует, что $\bar{B}^*\subset\mathbf{J}'$, это означает, что $\bar{A}\in\mathbf{J}''$; а ввиду того, что в качестве A был выбран произвольный элемент $\mathbf{I}'$, мы имеем $\mathbf{I}'\subset\mathbf{J}''$. Так как $1\in\mathbf{J}$, то $\mathbf{J}''=\mathbf{R}(\mathbf{J})$ (см. [18, с. 397]), значит, $\mathbf{I}'\subset\mathbf{R}(\mathbf{J})$.

Итак, мы доказали, что $\mathbf{R}(\mathbf{J})=\mathbf{I}'$. Изоморфизм $F\to\bar{W}F$ пространства $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ переставляет $\mathbf{I}$ с $\mathbf{J}$, поэтому мы доказали также и $\mathbf{R}(\mathbf{I})=\mathbf{J}'$. Таким образом, доказательство закончено.

Лемма 12.3.4. *Пусть $\mathfrak{G}$ — m-группа в S. Положим $\mathbf{M}=\mathbf{R}(\mathbf{I})=\mathbf{J}'$, тогда $\mathbf{M}'=\mathbf{R}(\mathbf{J})=\mathbf{I}'$. Если $\mathfrak{G}$ эргодична в S, то $\mathbf{M}$ является фактором.*

Доказательство. Ясно, что $\mathbf{M}'=(\mathbf{R}(\mathbf{I}))'=\mathbf{I}'$. Если $A\in\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}'$, то согласно лемме 12.3.2 мы имеем $A_{ab}=L_{\chi_{ab^{-1}}(xb^{-1})}=L_{\xi_{a^{-1}b}(x)}U_{b^{-1}a}$. Тогда для $a\neq b$, т. е. $b^{-1}a\neq 1$ и $c\neq 1$, лемма 12.2.3 дает $\chi_{ab^{-1}}(xb^{-1})=\xi_{a^{-1}b}(x)=0$. Иначе говоря, $\chi_c(x)=\xi_c(x)=0$, если $c\neq 1$. Подобным образом для $a=b$, т. е. $b^{-1}a=1$, получается $\chi_1(xb^{-1})=\xi_1(x)$. Это дает для $b=1$ $\chi_1(x)=\xi_1(x)$, а затем и вообще $\chi_1(xb^{-1})=\chi_1(x)$. Другими словами, $U_b^{-1}L_{\chi_1(x)}U_b=L_{\chi_1(x)}$. Итак, мы установили, что $\chi_c(x)=\xi_c(x)$ для всех $c\in\mathfrak{G}$, а если $c\neq 1$, то даже равно 0; если $c=1$, то $L_{\chi_1(x)}\in\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}'$.

Если теперь $\mathfrak{G}$ эргодична в S, то лемма 12.2.4 дает $\mathbf{L}\cdot\mathbf{U}'=(\alpha\cdot\mathbf{1})$, так что мы имеем $L_{\chi_1(x)}=\alpha\cdot\mathbf{1}$, $\chi_1(x)=\alpha$. Это означает, что $\chi_c(x)=\xi_c(x)=\alpha\delta_c$, т. е. $\bar{A}=\alpha\cdot\mathbf{1}$. Таким образом, мы доказали, что $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}'=(\alpha\cdot\mathbf{1})$, т. е. что $\mathbf{M}$ — фактор.

12.4. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $\mathfrak{G}$ эргодична в S.

Лемма 12.4.1. *Напишем для $\bar{A}\in\mathbf{M}$ или $\mathbf{M}'$, что $\bar{A}\approx[[\chi_c(x)]]_{x\in S,c\in\mathfrak{G}}$, если $A\sim\langle A_{a,b}\rangle_{a,b\in\mathfrak{G}}$ и $A_{a,b}=L_{\chi_{a^{-1}b}(x)}U_{b^{-1}a}$ или $L_{\chi_{ab^{-1}}(xb^{-1})}$ соответственно (ср. лемму* 12.3.2). *Если теперь $\bar{A}\approx[[\chi_c(x)]]_{x\in S,c\in\mathfrak{G}}$, $\bar{B}\approx[[\xi_c(x)]]_{x\in S,c\in\mathfrak{G}}$, $\bar{C}\approx[[\eta_c(x)]]_{x\in S,c\in\mathfrak{G}}$, то справедливы следующие правила вычисления:*

(i) *если $\bar{C}=\alpha\bar{A}$, то $\eta_c(x)=\alpha\chi_c(x)$,*

(ii) *если $\bar{C}=\bar{A}^*$, то $\eta_c(x)=\overline{\chi_{c^{-1}}(xc^{-1})}$;*

(iii) *если* $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$, *то* $\eta_c(x) = \chi_c(x) + \xi_c(x)$;

(iv) *если* $C = \bar{A}\bar{B}$, *то* $\eta_c(x) = \sum_a \chi_a(x)\, \xi_{ca^{-1}}(xa^{-1})$.

Сумма Σ_a *сходится «по мере»* (*см. точное описание этого понятия в конце доказательства*) *независимо от порядка, в котором пробегаются* $a \in \mathfrak{G}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала $\bar{A} \in \mathbf{M}$. Условия (i), (iii) следуют немедленно из леммы 2.4.3, (i), (iii), условие (ii) вытекает из леммы 2.4.3, (ii) при помощи следующих рассуждений:

$$\bar{C}_{a,b} = L_{\eta_{ab^{-1}}}(xb^{-1}), \qquad \bar{C}_{a,b} = A^*_{b,a} = L_{\overline{\chi_{ba^{-1}}(xa^{-1})}},$$

$$\eta_{ab^{-1}}(xb^{-1}) = \overline{\chi_{ba^{-1}}(xa^{-1})}, \qquad \eta_c(x) = \overline{\chi_{c^{-1}}(xc^{-1})}.$$

Наконец, (iv) следует из леммы 2.4.3, (iv):

$$C_{a,b} = L_{\eta_{ab^{-1}}(xb^{-1})},$$

$$C_{a,b} = \sum_c A_{c,b} \cdot B_{a,c} = \sum_c L_{\chi_{cb^{-1}}(xb^{-1})} L_{\xi_{ac^{-1}}(xc^{-1})} = \sum_c L_{\chi_{cb^{-1}}(xb^{-1})\xi_{ac^{-1}}(xc^{-1})},$$

$$L_{\eta_{ab^{-1}}(xb^{-1})} = \sum_c L_{\chi_{cb^{-1}}(xb^{-1})\xi_{ac^{-1}}(xc^{-1})},$$

полагая $b = 1$ и меняя местами c и a, получаем, что сумма $L_{\eta_c(x)} = \sum_a L_{\chi_a(x)\xi_{ca^{-1}}(xa^{-1})}$ сильно сходится и не зависит от порядка суммирования по $a \in \mathfrak{G}$.

Пусть теперь $T \subset S$ — измеримое множество с конечной мерой, положим

$$e_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in T, \\ 0 & \text{для } x \notin T, \end{cases}$$

так что $e_T \in \mathfrak{H}_S$. Тогда, если $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ — нумерация элементов $\mathfrak{G}$, мы имеем

$$\left\| L_{\eta_c(x)} e_T - \sum_{j=1}^{i} L_{\chi_{\bar{a}_j}(x)\xi_{c\bar{a}_j^{-1}}(x\bar{a}_j^{-1})} e_T \right\| \to 0$$

при $i \to \infty$, а потому

$$\int_S \left| \eta_c(x)\, e_T(x) - \sum_{j=1}^{i} \chi_{\bar{a}_j}(x)\, \xi_{c\bar{a}_j^{-1}}(x\bar{a}_j^{-1})\, e_T(x) \right|^2 dx \to 0,$$

$$\int_T \left| \eta_c(x) - \sum_1^{i} \chi_{\bar{a}_j}(x)\, \xi_{c\bar{a}_j^{-1}}(x\bar{a}_j^{-1}) \right| dx \to 0.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ $\mu\left((x; |\eta_c(x) - \sum_{j=1}^{i} \chi_{\bar{a}_j}(x)\, \xi_{c\bar{a}_j^{-1}}(x\bar{a}_j^{-1})| \geqslant \varepsilon) \times T\right) \to 0$ при $i \to \infty$. Иначе говоря, $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{\bar{a}_j}(x)\, \xi_{c\bar{a}_j^{-1}}(x\bar{a}_j^{-1})$ сходится «по мере» к $\eta_c(x)$. Поскольку нумерация $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$ элементов $\mathfrak{G}$ была выбрана произвольно,

это доказывает (iv). (Разумеется, если группа $\mathfrak{G}$ конечна, рассуждения о сходимости излишни, а сумма $\sum_a$ просто равна $\eta_c(x)$.)

Рассмотрим теперь $\bar{A} \in \mathbf{M}$. Пространственный изоморфизм $F \to \bar{W}F$ в $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ переводит $\mathbf{I}$ в $\mathbf{J}$ и тем самым $\mathbf{M}'$ в $\mathbf{M}$. Поэтому мы имеем $\bar{A} = \bar{W}\bar{B}\bar{W}$, $\bar{B} \in \mathbf{M}'$. Здесь $B \approx [[\chi_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$. Теперь вычисления, проведенные в конце доказательства леммы 12.3.2, показывают, что $A \approx [[\chi_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$ с теми же $\chi_c(x)$. Таким образом, правила вычислений, установленные для $\mathbf{M}'$, немедленно переносятся и на $\mathbf{M}$.

После этих приготовлений мы готовы к тому, чтобы сделать решающий шаг.

Определение 12.4.1. *Предположим, что* $\bar{A} \in \mathbf{M}$ *или* $\mathbf{M}'$. *Образуем систему функций* $\chi_c(x)$ *с* $\bar{A} \approx [[\chi_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$ (*см. лемму* 12.4.1). *Рассмотрим два следующих случая*:

(α) $\mu(S)$ *конечна. Тогда, поскольку* $\chi_1(x)$ *ограничена и измерима, существует* $\int_S \chi_1(x)\,dx$, *равный конечному комплексному числу*;

(β) $\chi_1(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in S$. *Тогда* $\int_S \chi_1(x)\,dx$ *снова существует и равен вещественному числу* $\geqslant 0$, $\leqslant \infty$. *В обоих случаях определим* $t(\bar{A}) = \int_A \chi_1(x)\,dx$.

Ограничимся пока случаем (β), случай (α) понадобится нам для дальнейших приложений (см. п. 15.4).

Лемма 12.4.2. *Предположим, что* $\bar{A}$, $\bar{B} \in \mathbf{M}$ *или* $\mathbf{M}'$. *Тогда мы имеем*:

(i) $t(\alpha\bar{A}) = \alpha t(\bar{A})$;

(ii) $t(\bar{A}^*) = \overline{t(\bar{A})}$;

(iii) $t(\bar{A} + \bar{B}) = t(\bar{A}) + t(\bar{B})$.

Эти равенства следует понимать в том смысле, что, когда случай (α) *или* (β) *имеет место для правой стороны, он же имеет место и для левой* (*отметим, что для* (i) *в случае* (β) *требуется еще* $\alpha \geqslant 0$) *и они равны. Наконец, мы имеем* (*автоматически со случаем* (β) *с обеих сторон*):

(iv) $t(\bar{A}^*A) = t(\bar{A}\bar{A}^*) \geqslant 0$.

Доказательсгво. Утверждения (i)—(iii) прямо следуют из леммы 12.4.1, (i)—(iii) соответственно. Чтобы доказать (iv), положим

$$\bar{A}^*\bar{A} \approx [[\omega_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}, \qquad \bar{A}\bar{A}^* = [[\nu_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}.$$

Так как $\bar{A} \approx [[\chi_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$, мы имеем $\bar{A}^* \approx [[\overline{\chi_{c^{-1}}(xc^{-1})}]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$ и $\omega_c(x) = \sum_a \chi_{ca^{-1}}(xa^{-1})\,\overline{\chi_{a^{-1}}(xa^{-1})} = \sum_a \chi_{ca}(xa)\,\overline{\chi_a(xa)}$, $\nu_c(x) = \sum_a \chi_a(x)\,\overline{\chi_{ac^{-1}}(xc^{-1})}$. (Используя лемму 12.4.1, (ii) и (iv). Суммы сходятся «по мере» вне зависимости от порядка суммирования.) Таким образом, $\omega_1(x) = \sum_a |\chi_a(xa)|^2$, $\nu_1(x) = \sum_a |\chi_a(x)|^2$. Для обеих мы имеем случай (β) и

$$t(\bar{A}^*\bar{A}) = \int_S \omega_1(x)\,dx = \sum_a \int_S |\chi_a(xa)|^2\,dx = \sum_a \int_S |\chi_a(x)|^2\,dx,$$

$$t(\overline{A}\overline{A}^*) = \int_S \nu_1(x)\,dx = \sum_a \int_S |\chi_a(x)|^2\,dx,$$

что и доказывает наши утверждения.

Лемма 12.4.3. *Для $\overline{E}$, пробегающего все проекторы в* **M** *или в* **M′**, *всегда определено $t(E)$ (имеет место случай (β)), причем оно является функцией относительной размерности в* **M** *или в* **M′** *соответственно. В этой нормировке C из теоремы X равно 1.*

Если $T \subset S$ измеримо, определим

$$e_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in T, \\ 0 & \text{для } x \notin T. \end{cases}$$

Тогда в **M** *и в* **M′** *существует проектор $\overline{E} \approx [[\delta_c e_T(x)]]_{x\in S, c\in\mathfrak{G}}$, причем $t(\overline{E}) = \mu(T)$.*

Доказательство. Поскольку $\overline{E}^*\overline{E} = \overline{E}^2 = \overline{E}$ для любого проектора $\overline{E}$, лемма 12.4.2, (iv) гарантирует для $\overline{E}$ случай (β) и неравенства $\infty \geqslant t(\overline{E}) \geqslant 0$. Если $T \subset S$ измеримо, то $\overline{L}_{e_T(x)} \sim \langle \delta_{ab^{-1}} L_{e_T(x)} \rangle_{a,b\in\mathfrak{G}} = \langle L_{\delta_{ab^{-1}} e_T(x)} U_{b^{-1}a} \rangle_{a,b\in\mathfrak{G}} \approx [[\delta_c e_T(x)]]_{x\in S, c\in\mathfrak{G}}$ в **M** и $\overline{M}_{e_T(x)} \sim \langle \delta_{ab^{-1}} L_{e_T(xa^{-1})} \rangle_{a,b\in\mathfrak{G}} = \langle L_{\delta_{ab^{-1}} e_T(xb^{-1})} \rangle_{a,b\in\mathfrak{G}} \approx [[\delta_c e_T(x)]]_{x\in S, c\in\mathfrak{G}}$ в **M′**. Таким образом, $\overline{E}$, требуемые в конце нашей леммы, существуют; очевидно, $\overline{E}^* = \overline{E}$, $\overline{E}^2 = \overline{E}$, так что $\overline{E}$ является проектором и $t(\overline{E}) = \int_S e_T\,dx = \int_T 1\,dx = \mu(T)$. Поэтому последнее утверждение леммы справедливо.

Как мы отметили при доказательстве леммы 12.1.1, существует по крайней мере один элемент из последовательности $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ определения 12.1.2, (iv), для которого $\infty > \mu(T^{(i)}) > 0$. Для соответствующего ему E (см. выше) мы имеем $\infty > t(\overline{E}) > 0$.

Если теперь нам удастся установить для $t(\overline{E})$ условия (ii), (iii) определения 8.2.1, из леммы 8.3.5 будет следовать, что $t(\overline{E})$ является функцией относительной размерности для **M** и соответственно для **M′**. Условие (iii) следует немедленно из леммы 12.4.2, (iii), ибо при этих предположениях $P_{[\overline{\mathfrak{M}},\overline{\mathfrak{N}}]} = P_{\overline{\mathfrak{M}}} + P_{\overline{\mathfrak{N}}}$. Условие (ii) вытекает из леммы 12.4.2, (iv), потому что $\overline{E} \sim \overline{F}$ ((...**M**) и соответственно (...M')) влечет за собой существование U ($\in$ **M** и соответственно $\in$ **M′**), для которого $\overline{U}^*\overline{U} = \overline{E}$, $\overline{U}\overline{U}^* = \overline{F}$ (см. лемму 4.3.1).

Нам осталось определить C из теоремы X. Если $E \in$ **M**, $E \approx [[\chi_c(x)]]_{x\in S, c\in\mathfrak{G}}$, то, как мы видели в конце доказательства леммы 12.4,1, $\overline{W}\overline{E}\overline{W} \in$ **M′**, $\overline{W}\overline{E}\overline{W} \approx [[\chi_c(x)]]_{x\in S, c\in\mathfrak{G}}$. Тогда $t(E) = t(\overline{W}\overline{E}\overline{W})$. Далее, благодаря характеру пространственного изоморфизма $F \to \overline{W}F$, который переводит каждое $\mathfrak{M}_F^{\mathbf{M}}$ в соответствующее $\mathfrak{M}_{\overline{W}F}^{\mathbf{M}}$, имеем $\overline{W}\overline{E}_F^{\mathbf{M}}\overline{W} = \overline{E}_{\overline{W}F}^{\mathbf{M}}$. Это доказывает, что $t(\overline{E}_F^{\mathbf{M}'}) = t(\overline{E}_{\overline{W}F}^{\mathbf{M}})$, а потому если $\overline{W}F = \pm F$, то $t(\overline{E}_F^{\mathbf{M}'}) = t(\overline{E}_F^{\mathbf{M}})$.

Если к тому же $F \neq 0$, то $\overline{E}_F^{\mathbf{M}} \neq 0$ и (поскольку $t(\overline{E})$ — функция относительной размерности для **M**) $t(\overline{E}_F^{\mathbf{M}'}) > 0$. Таким образом, с учетом $t(\overline{E}_F^{\mathbf{M}}) = Ct(\overline{E}_F^{\mathbf{M}'})$

из приведенных выше соотношений следует, что $C=1$. Нам остается лишь найти $F \neq 0$ с $\overline{W}F = \pm F$. Выберем любое $G \neq 0$; поскольку $\overline{W}^2 = 1$, мы имеем $\overline{W}(G \pm \overline{W}G) = \pm (G \pm \overline{W}G)$, а так как $G = {}^1/_2((G+\overline{W}G)+(G-\overline{W}G))$, то оба $G \pm \overline{W}G$ не могут равняться 0. Значит, $F = G + \overline{W}G$ или $F = G - \overline{W}G$ удовлетворяет нашим требованиям.

Таким образом, мы доказали обе части леммы.

Сформулируем полученные до сих пор результаты.

Теорема XI. *Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная или счетная группа (определение 12.1.1), S — пространство с лебеговой внешней мерой (определения 12.1.2 и 12.1.3). Пусть $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{H}_S$, $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ — построенные с их помощью пространства (определение 12.1.4). Предположим, что $\mathfrak{G}$ эргодична на S (определение 12.1.5).*

Построим операторы $\overline{U}_{a_0}$, $\overline{V}_{a_0}$, $\overline{W}$, $\overline{L}_{\varphi(x)}$, $\overline{M}_{\varphi(x)}$ в $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$ (см. лемму 12.3.1) и с их помощью — кольца **M**, **M′** *(см. лемму 12.3.4).*

Отображение $F \to \overline{W}F$ является инволютивным изоморфизмом $\mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}}$, переставляющим **M** *с* **M′**. *Существуют некоторые системы ограниченных измеримых функций $\chi_c(x)$, $c \in \mathfrak{G}$, находящихся во взаимно однозначном соответствии со всеми $\overline{A} \in$* **M** *и одновременно со всеми $\overline{A} \in$* **M′**. *Оба эти соответствия мы обозначим через $\overline{A} \approx [[\chi_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$ (см. лемму 12.4.1). Используя эти соответствия, правила вычисления в* **M** *и равным образом в* **M′** *можно выразить в терминах $\chi_c(x)$; в обоих случаях правила получаются одинаковыми (см. лемму 12.4.1, (i)—(iv)). Факторы* **M**, **M′** *являются парными. Функции относительной размерности $D_{\mathbf{M}}(\overline{E})$, $D_{\mathbf{M}'}(\overline{E})$ в* **M** *и* **M′** *соответственно ($\overline{E}$ — проектор $\in$* **M** *и $\in$* **M′** *соответственно) могут быть определены следующим образом: запишем $\overline{E} \approx [[\chi_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$, тогда $D_{\mathbf{M}}(\overline{E})$ и соответственно $D_{\mathbf{M}'}(\overline{E}) = \int_S \chi_1(x)\,dx$ (для всех $x \in S$ мы имеем $\chi_1(x) \geqslant \geqslant 0$, поэтому интеграл справа всегда определен и представляет собой вещественное число $\geqslant 0$, $\leqslant \infty$).*

В этой нормировке C из теоремы X равно 1.

Если $T \subset S$ измеримо и

$$e_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in T, \\ 0 & \text{для } x \notin T, \end{cases}$$

то для обоих проекторов $\overline{E} = \overline{L}_{e_T(x)} \in$ **M** *и $\overline{E}' = \overline{M}_{e_T(x)} \in$* **M′** *имеем $D_{\mathbf{M}}(\overline{E})$ и $D_{\mathbf{M}'}(\overline{E}) = \mu(T)$ соответственно.*

Глава XIII

СВОЙСТВА M, M′

13.1. Характеризация **M**, **M′** при помощи теоремы XI делает простым определение их типов. Оно и послужит предметом последующих рассуждений. Если бы мы хотели использовать **M** и **M′** только для того, чтобы получить пример случая (II), их можно было бы значительно сократить: примеры (α)—(γ) после

леммы 13.2.1 можно было бы получить в несколько строк вместе с леммой 13.1.2 для этого специального случая, в то время как лемма 13.1.1 вообще стала бы ненужной. Но, учитывая тот общий интерес, который представляют эти **M** и **M′**, мы предпочитаем провести исчерпывающее исследование.

В дальнейшем всюду будем использовать обозначения и предположения теоремы XI.

Лемма 13.1.1. *Случай* (I) *для* **M** *и* **M′** *имеет место, если и только если существует точка* $x \in S$ *с* $\mu^*((x)) > 0$. *В этом случае, если выбросить подмножество меры* 0 (*которое не играет роли*), S *может быть описано следующим образом.*

Каждое одноточечное множество (x) *из* S $(x \in S)$ *измеримо, и значение* $\mu((x))$ *не зависит от* x: $\mu((x)) = \varepsilon > 0, < \infty$, $\mathfrak{G}$ *просто транзитивна на* S, *т. е. если* x_0 — *произвольный элемент* S, *то* $a \rightleftarrows x_0 a$ *является взаимно однозначным отображением* $\mathfrak{G}$ *на* S.

Если $\mathfrak{G}$ *и* S *оба имеют по* $n = 1, 2, \ldots, \infty$ *элементов, то* **M** *и* **M′** *оба принадлежат типу* (I_n). $D_{\mathbf{M}}(E)$ *и* $D_{\mathbf{M}'}(E)$ *из теоремы XI получают стандартную нормировку, если их умножить на* $1/\varepsilon$.

Доказательство. Предположим сначала, что имеет место случай (I). Тогда все значения $D_{\mathbf{M}}(\bar{E})$ являются целыми кратными $\varepsilon_0 > 0$, а значит, и все $\mu(T)$ с измеримыми $T \subset S$ кратны ε_0. Далее, существует T с $\infty > \mu(T) > 0$ (см. начало доказательства леммы 12.4.3), поэтому для одного из этих $T \subset S$ $\mu(T)$ принимает минимальное значение. Обозначим его через T_0. При этом благодаря $0 \leqslant \mu(T_0) \leqslant \mu(T)$ для любого измеримого $T \subset T_0$ мы имеем или $\mu(T_0) = \mu(T)$, или $\mu(T) = 0$.

Рассмотрим теперь $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ из определения 12.1.2, (iv), предполагая, что $T^{(1)} + T^{(2)} + \ldots = S$ (см. замечание перед леммой 12.1.1) и что 0 является одним из них (оно может быть добавлено к системе без изменения ее свойств). Рассмотрим $x \in S$. Обозначим те n, для которых $x \in T^{(n)}$, через $m_1, m_2, \ldots$, а те, для которых $x \notin T^{(n)}$, — через $n_1, n_2, \ldots$ Согласно определению 12.1.2, (iv) мы имеем $(x) = T^{(m_1)}T^{(m_2)} \ldots (S - T^{(n_1)})(S - T^{(n_2)})$. Поскольку $x \in T^{(1)} \dotplus T^{(2)} \dotplus \ldots$ последовательность $m_1, m_2, \ldots$ не пуста и 0 равно какому-то $T^{(n)}$, последовательность $n_1, n_2, \ldots$ тоже не пуста; допуская повторение m_i и n_i бесконечно много раз, мы можем обеспечить бесконечность обеих последовательностей. Итак, для любой точки $x \in S$ существуют две такие бесконечные последовательности $m_1, m_2, \ldots$ и $n_1, n_2 \ldots$, что $(x) = \prod_{i=1}^{\infty} T^{(m_i)}(S - T^{(n_i)})$.

Предположим теперь, что $x \in T_0$ и $\mu^*((x)) = 0$. Положим $U_j = T_0 \prod_1^j T^{(m_i)}(S - T^{(n_i)})$, тогда мы имеем $T_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots, (x) = U_1 U_2 \ldots$ Далее, $\lim_{j\to\infty}\mu(U_j) = \mu((x)) = 0$ (все U_j измеримы вместе с T_0 и $T^{(n)}$), а потому существует j с $\mu(U_j) < \mu(T_0)$ (напомним, что $\mu(T_0) > 0$). Согласно нашим предположениям относительно T_0 отсюда следует, что $\mu(U_j) = 0$.

Рассмотрим теперь все множества U вида $U = T_0 \prod_{i=1}^{j} T^{(m_i)}(S - T_i^{(n_i)})$, $j = 1, 2, \ldots, m_1, m_2, \ldots, m_j, n_1, \ldots, n_j = 1, 2, \ldots$, для которых $\mu(U) = 0$. Их множество счетно: $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots$ Отсюда $\mu(U^{(1)} \dotplus U^{(2)} \dotplus \ldots) = 0$. Значит, существует

такое $x \in T_0$, что $x \notin U^{(1)} \dot{+} U^{(2)} \dot{+} \ldots$ Доказанные выше факты исключают возможность $\mu^*((x)) = 0$. Следовательно, существует $x \in S$ с $\mu^*((x)) > 0$.

Обратно, предположим теперь существование $x \in S$ с $\mu^*((x)) > 0$. Поскольку $(x) = \prod_1^\infty T^{(m_i)}(S - T^{(n_i)})$ (см. выше), (x) измеримо и $\mu((x)) > 0$. Кроме того, $(x) \subset T^{(m_1)}$, $\mu((x)) \leqslant \mu(T^{(m_i)}) < \infty$. Положим $\varepsilon = \mu((x)) > 0$, $< \infty$, тогда $\mu((xa)) = \mu((x))$ для каждого $a \in \mathfrak{G}$. Построим теперь $S_1 = (xa;\ a \in \mathfrak{G})$, S_1 инвариантно относительно всех преобразований $x \to xb$, $b \in \mathfrak{G}$. Тогда из эргодичности $\mathfrak{G}$ в S (см. определение 12.1.5, (iv)) следует, что $\mu(S_1) = 0$ или $\mu(S - S_1) = 0$. Но $\mu(S_1) \geqslant \mu((x)) = \varepsilon > 0$, значит, $\mu(S - S_1) = 0$. Выбросим теперь из S множество $S - S_1$, тогда мы получим $S_1 = S$, т. е. $S = (xa;\ a \in \mathfrak{G})$. При этом мы получим для каждого $x_0 \in S$, что $\mu((x_0)) = \varepsilon$. Согласно определению 12.1.5, (iii) из $a \neq 1$ следует, что $x_0 \neq x_0 a$, так что если $a \neq b$, то $x_0 a \neq x_0 b$. Таким образом, все утверждения второй части нашей леммы для этого случая доказаны.

Выберем $x_0 \in S$ и определим $e_{(x_0)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x = x_0, \\ 0 & \text{для } x \neq x_0. \end{cases}$

Тогда $\overline{L}_{e_{(x_0)}(x)} \in \mathbf{M}$ — это проектор и $D_{\mathbf{M}}(\overline{L}_{e_{(x_0)}(x)}) = \mu((x_0)) = \varepsilon$ Мы утверждаем, что проектор $\overline{L}_{e_{(x_0)}(x)}$ минимален в $\mathbf{M}$. Это так, если для каждой функции $F(x,a)$ с $\overline{L}_{e_{(x_0)}} F = F \neq 0$ $E_F^{\mathbf{M}} = \overline{L}_{e_{(x_0)}(x)}$ (см. лемму 5.1.2; очевидно, $\overline{L}_{e_{(x_0)}(x)} \neq 0$). Далее, $\overline{L}_{e_{(x_0)}(x)} F = F$ означает, что $e_{x_0}(x) F(x,a) = F(x,a)$, т. е. $F(x,a) = 0$ при $x \neq x_0$. Нам нужно доказать, что одна такая F, скажем F_0, если она не равна нулю, порождает при помощи применения $\overline{A} \in \mathbf{M}'$ все остальные. Поскольку $F_0 \neq 0$, но $F_0(x,a) = 0$ для $x \neq x_0$, существует $a_0 \in \mathfrak{G}$ с $F_0(x_0, a_0) \neq 0$. Далее, оператор $\frac{1}{F_0(x_0, a_0)} \overline{M}_{e_{(x_0 a_1)}(x)} \overline{V}_{a_1 a_0^{-1}} \in \mathbf{M}'$, и он преобразует $F_0(x,a)$ в

$$F'_{a_1}(x,a) = \begin{cases} 1 & \text{для } x = x_0,\ a = a_1, \\ 0 & \text{для остальных } x, a, \end{cases}$$

а все остальные необходимые $F(x,a)$ являются линейными комбинациями таких.

Таким образом, $\overline{L}_{e_{(x_0)}(x)}$ минимален в $\mathbf{M}$ и для $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ имеет место случай (I) (см. теорему IV). Итак, необходимость и достаточность нашего условия установлены.

Поскольку вторая часть нашей леммы уже проверена, нам осталось рассмотреть только последнюю ее часть. Так как $\overline{L}_{e_{(x_0)}(x)}$ минимален в $\mathbf{M}$ и $D_{\mathbf{M}'}(\overline{L}_{e_{(x_0)}(x)}) = \varepsilon$, стандартная нормировка $D_{\mathbf{M}'}(\overline{E}')$ получается путем умножения ее на $1/\varepsilon$. Поскольку пространственный изоморфизм $F \to \overline{W} F$ переставляет $\mathbf{M}, D_{\mathbf{M}}(\overline{E})$ с $\mathbf{M}', D_{\mathbf{M}'}(\overline{E})$, то же самое верно и для $D_{\mathbf{M}'}(E)$.

Наконец, если S (вместе с $\mathfrak{G}$) имеет $n = 1, 2, \ldots, \infty$ элементов, скажем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (если $n = \infty$, нужно опустить x_n), то

$$L_{\mathbf{M}'}(1) = D_{\mathbf{M}'}(\overline{I}_1) = D_{\mathbf{M}}(\overline{L}_{e_{(x_1)}(x) + \ldots + e_{(x_n)}(x)}) = D_{\mathbf{M}'}(\overline{L}_{e_{(x_1)}(x)} + \ldots + \overline{L}_{e_{(x_n)}(x)}) =$$
$$= D_{\mathbf{M}'}(\overline{L}_{e_{(x_1)}(x)}) + \ldots + D_{\mathbf{M}'}(\overline{L}_{e_{(x_n)}(x)}) = n\varepsilon.$$

В стандартной нормировке это дает n, так что для $\mathbf{M}'$ мы имеем случай (I_n). Пространственный изоморфизм $\overline{W}$ дает то же самое для $\mathbf{M}$.

Лемма 13.1.2. *Случай* (II) *для* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\mu^*((x)) = 0$ *для каждого* $x \in S$. *Если* $\mu(S)$ *конечна, то для* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ *имеет место случай* (II_1), *и* $D_{\mathbf{M}}(E)$ *и* $D_{\mathbf{M}'}(E)$ *из теоремы* XI *оказываются стандартно нормированными, если их умножить на* $1/\mu(S)$. *Если* $\mu(S) = \infty$, *то для обоих колец* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{M}'$ *имеет место случай* (II_∞).

Доказательство. Поскольку существует $E' \in \mathbf{M}'$ с $\infty > D_{\mathbf{M}'}(\overline{E}') > 0$ (см. начало доказательства леммы 12.4.3), случай (III) исключается. Значит, имеет место или случай (I), или случай (II), а потому лемма 13.1.1 обеспечивает необходимость и достаточность нашего теперешнего условия для случая (II).

Так как $D_{\mathbf{M}}(1) = D_{\mathbf{M}}(\overline{M}_1) = D_{\mathbf{M}}(\overline{M}_{e_{S(x)}}) = \mu(S)$ и $D_{\mathbf{M}'}(1) = D_{\mathbf{M}'}(\overline{L}_1) = D_{\mathbf{M}'}(\overline{L}_{e_{S(x)}}) = \mu(S)$, остальные утверждения нашей леммы очевидны.

Две предшествующие леммы полностью характеризуют $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$. Мы видим, что (пользуясь терминологией теоремы VIII) $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, построенные в теореме XI, всегда принадлежат одному классу, этот класс конечен или бесконечен, если $\mu(S)$ конечна и соответственно бесконечна; он дискретен или непрерывен, если мера $\mu(T)$, $T \subset S$ дискретна и соответственно непрерывна (т. е. если $x \in S$ с $\mu^*((x)) > 0$ существует и соответственно не существует); он никогда не является вполне бесконечным. Разница между дискретным и непрерывным случаями соответствует разнице между эффективной транзитивностью $\mathfrak{G}$ на S и эргодичностью без такой транзитивности.

13.2. Примеры типа (I), основанные на лемме 13.1.1, настолько очевидны, что нам нет нужды задерживаться на них. (Благодаря взаимно однозначному соответствию между $\mathfrak{G}$ и S мы можем даже без ущерба для общности положить $S = \mathfrak{G}$. Тогда можно сделать $\varepsilon = 1$ и $\mu^*(T)$, $T \subset S$, превращается в $\mu^*(T) =$ (числу элементов в T).) Мы хотим, однако, привести эффективные примеры типа (II), основанные на лемме 13.1.2. Эти примеры будут принадлежать очень узкому классу, ибо мы будем рассматривать только абелевы группы $\mathfrak{G}$, и то весьма специальные.

Лемма 13.2.1. *Пусть* S *будет множеством* S_∞ *всех вещественных чисел или множеством* S_1 *всех вещественных чисел* $\geqslant 0$, < 1, *которое может* (*а в дальнейшем и будет*) *рассматриваться как множество всех вещественных чисел* (mod 1), S_1. *Мы используем обычную лебегову меру на* S. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *модуль вещественных чисел, т. е. конечное или счетное их множество со следующими свойствами:* $0 \in \mathfrak{G}$; a, $b \in \mathfrak{G}$ *влечет за собой* $a + b \in \mathfrak{G}$, $-a \in \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ *становится группой, если мы положим по определению: единица* $= 0$, $a^{-1} = -a$, $ab = a + b$.

$\mathfrak{G}$ — *т-группа в* S, *если мы положим* $xa = x + a$. *Для* $S = S_1$ *мы требуем еще, чтобы* $1 \in \mathfrak{G}$.

За исключением $\mathfrak{G} = 0$ *и* $\mathfrak{G} = (\ldots, -2\alpha_0, -\alpha_0, 0, \alpha_0, 2\alpha_0, \ldots)$ (*для фиксированного* $\alpha_0 > 0$, *а если* $S = S_1$, *то обязательно* $\alpha_0 = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$), $\mathfrak{G}$ *эргодична в* S.

Доказательство. Группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет, очевидно, определению 12.1.1; S удовлетворяет определению 12.1.2, ибо это просто частный случай при-

мера $\mathfrak{b}$, приведенного после него; несложно проверить и определение 12.1.5, (i)—(iii) для $\mathfrak{G}$ и S, т. е. что $\mathfrak{G}$ — m-группа на S. Нам остается разобраться с условием (iv) определения 12.1.5, т. е. с эргодичностью.

Любое $T \subset S$ инвариантно относительно $\mathfrak{G} = (0)$, а множество

$$T = (x;\ pa_0 \leqslant x < (p + 1/2)\, a_0,\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \subset S$$

(для $S = S_1$ нужно брать его (mod 1)) инвариантно относительно

$$\mathfrak{G} = (\ldots, -2a_0, -a_0, 0, a_0, 2a_0, \ldots).$$

Поэтому такие $\mathfrak{G}$ не эргодичны.

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ имеет другой вид. Если $S = S_\infty$ и найдется $a_0 \neq 0$ с $a_0 \in \mathfrak{G}$, мы можем преобразовать S_∞ и $\mathfrak{G}$ взаимно однозначным соответствием $x \rightleftarrows (1/a_0)\, x$, $a \rightleftarrows (1/a_0) a$. Это изоморфизм относительно всего, что для нас сейчас существенно, и он переводит a_0 в 1. Поэтому мы можем полагать, что $1 \in \mathfrak{G}$ с самого начала. Если $1 \in \mathfrak{G}$, то все множества T, инвариантные относительно $\mathfrak{G}$, могут быть рассматриваемы (mod 1); значит, мы можем сделать это и с $S = S_\infty$, получая $S = S_1$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь $S = S_1$.

Теперь $\mu(S) = \mu(S_1)$ конечна, так что для каждой функции

$$e_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in T, \\ 0 & \text{для } x \notin T \end{cases}$$

имеем $e_T(x) \in \mathfrak{H}_S$. Эргодичность означает, что если $U_a(e_T) = e_T$ для всех $a \in \mathfrak{G}$, то $e_T = 0$ или 1; или, в более общем случае, из того, что для $f \in \mathfrak{H}_S$ $U_a f = f$ со всеми $a \in \mathfrak{G}$, следует, что $f = \text{const}$.

Функции $\varphi_n(x) = e^{2\pi i n x}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, образуют полную ортогональную нормированную систему в $\mathfrak{H}_S$ $U_a \varphi_n = e^{2\pi i n a} \varphi_n$. Положим $f = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \varphi_n$ $\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2\right.$ конечна; это ортогональное разложение в пространстве $\mathfrak{H}_S$ является численно «в среднем» сходящимся рядом Фурье функции $\left. f\right)$, тогда $U_a f = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n a} \alpha_n \varphi_n$, $U_a f = f$ означает, что $\alpha_n = e^{2\pi i n a} \alpha_n$, т. е. $\alpha_n = 0$, если только na не является целым числом для всех $a \in \mathfrak{G}$. Если это происходит для всех $n \neq 0$, то это верно и для $|n| > 0$, т. е. мы можем считать, что $n = 1, 2, \ldots$

Обозначим через $\mathfrak{G}'$ множество всех na, $a \in \mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{G}'$ состоит из целых чисел; $0 \in \mathfrak{G}'$ и $p, q \in \mathfrak{G}$ влечет за собой $-p, p + q \in \mathfrak{G}'$. Поэтому $\mathfrak{G}'$ состоит из всех кратных фиксированного числа $q = 1, 2, \ldots$ Так как $1 \in \mathfrak{G}$, $n \in \mathfrak{G}'$, то q — делитель n, скажем $qm = n$. Поэтому

$$\mathfrak{G} = \left(\ldots, -\frac{2q}{n}, -\frac{q}{n}, 0, \frac{q}{n}, \frac{2q}{n}, \ldots\right) = \left(\ldots, -\frac{2}{m}, -\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots\right),$$

что противоречит нашему предположению относительно $\mathfrak{G}$.

Значит, $\alpha_n = 0$ как только $n \neq 0$, а потому $f = \alpha_0 \varphi_0 = \alpha_0 = \text{const}$. Доказательство закончено.

Теперь, поскольку $\mu(S_\infty) = \infty$ и $\mu(S_1) = 1$, мы видим, что согласно лемме 13.1.2 любая эргодичная $\mathfrak{G}$ дает примеры $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ классов (II_∞) и (II_1) соответ-

ственно. Вот некоторые простые примеры групп $\mathfrak{G}$, которые очевидным образом (по лемме 13.2.1) эргодичны:

(α) $\mathfrak{G}$ — множество $\mathfrak{G}_\theta$ всех $m + n\theta$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; θ — любое фиксированное иррациональное число;

(β) $\mathfrak{G}$ — множество $\mathfrak{G}_{rat}$ всех рациональных чисел;

(γ) $\mathfrak{G}$ — множество $\mathfrak{G}_{rat,p}$ всех рациональных чисел вида m/p^n, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$, где p — любое фиксированное число 2, 3 ... (необязательно простое!).

13.3. Приведенные выше примеры (с $S = S_\infty$) показывают, что факторизации $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ типов (II_∞), (II_∞) действительно существуют Теперь лемма 11.4.3, (ii) и замечания, следующие за ней, показывают, что комбинации случаев (II_1), (II_∞); (II_∞), (II_1); (II_1), (II_1) тоже существуют и в последнем случае число C из теоремы X может быть задано заранее произвольным образом. Существование всех комбинаций случаев (I_m), (I_n), с m, n = 1, 2, ... было отмечено еще в конце п. 8.6. Все остальные комбинации, за исключением (III_∞), (III_∞), запрещаются теоремой X. Согласно той же теореме (III_∞), (III_∞) существует, если вообще существуют факторы типа III. Итак, нами получена

Теорема XII. *Существуют факторизации* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, *принадлежащие следующим типам:* (I_m), (I_n), m, n = 1, 2, ..., ∞; (II_m), (II_n), m, n = 1, ∞, *а в случае* m, n = 1 *даже число* C *из теоремы* X *может быть произвольным*; (III_∞), (III_∞) *существует, если существуют факторы типа* III, *что до сих пор представляет нерешенную проблему. Все остальные комбинации типов не существуют.*

Это дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный в проблеме 2 (с учетом леммы 8.6.1), и решает проблемы 3 и 4 настолько полно, насколько это возможно при современном уровне знаний.

13.4. Мы можем использовать наши $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ для построения факторизации, в которой $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ непарны ($\mathbf{M} \neq \mathbf{N}'$), и тем самым ответить отрицательно на вопрос проблемы 1. Это ведет также к частичному решению проблемы 10, обсуждавшейся в п. 11.2.

В дальнейшем мы используем обозначения и предположения теоремы XI.

Лемма 13.4.1. *Пусть* $\mathfrak{G}^0$ — *собственная подгруппа группы* $\mathfrak{G}$, *эргодическая в* S. *Любой* $\bar{A} \in \mathbf{M}'$ равен $\bar{A} \approx [[\chi_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$; *рассмотрим те из них, для которых* $\chi_c(x) = 0$ *как только* $c \notin \mathfrak{G}^0$. *Обозначим их множество через* $\mathbf{N}$. *Тогда* $\mathbf{N}$ — *кольцо,* $\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{M}'$, $\mathbf{M}' \cdot \mathbf{N}' = (\alpha \cdot \mathbf{1})$.

Доказательство. Включение $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}'$ очевидно. Так как $\bar{V}_{a_0} \in \mathbf{M}'$, $\bar{V}_{a_0} \approx [[\delta_{ca_0^{-1}}]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$, то $\bar{V}_{a_0} \in \mathbf{N}$, если и только если $a_0 \in \mathfrak{G}^0$, так что из $\mathfrak{G}^0 \subsetneqq \mathfrak{G}$ следует, что $\mathbf{N} \neq \mathbf{M}'$.

Правила вычислений из леммы 12.4. 1 показывают, что из $A, B \in \mathbf{N}$ следует αA, A^*, $A + B$, $AB \in \mathbf{N}$. Таким образом, для доказательства того, что $\mathbf{N}$ — кольцо, нам осталось проверить, что оно слабо замкнуто. Так как $\mathbf{M}'$ слабо замкнуто (как кольцо), достаточно даже относительной слабой замкнутости $\mathbf{N}$ в $\mathbf{M}'$.

Далее, $\bar{A} \in \mathbf{M}'$ лежит в $\mathbf{N}$ тогда и только тогда, когда из $a_0 \notin \mathfrak{G}^0$ следует, что $\chi_{a_0}(x) = 0$ для $\bar{A} \approx [[\chi_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$, т. е. если из $ab^{-1} \notin \mathfrak{G}^0$ вытекает, что $A_{a,b} = 0$ для $\bar{A} \sim \langle A_{a,b} \rangle_{a,b \in \mathfrak{G}}$. Итак, нам достаточно доказать, что для данных $a, b \in \mathfrak{G}$ мно-

жество всех $\bar{A} \sim \langle A_{a',b'} \rangle_{a',b' \in \mathfrak{G}}$ с $A_{a,b} = 0$ слабо замкнуто. Но $(A_{a,b}f, g) = (\bar{A}f^{[a]}, g^{[b]})$, где $h^{[c]}(x) = \delta_c h(x)$ $(h \in \mathfrak{H}_S,\ h^{[c]} \in \mathfrak{H}_{S\mathfrak{G}})$, так что наше условие сводится к $(\bar{A}f^{[a]}, g^{[b]}) = 0$ для любой пары $f, g \in \mathfrak{H}_S$. Это, очевидно, слабо замкнутое множество.

Следовательно, $\mathbf{N}$ — кольцо и $\subsetneqq \mathbf{M}'$.

Предположим теперь, что $\bar{A} \in \mathbf{M}', \mathbf{N}'$. Поскольку $\overline{M}_{\chi(x)} \in \mathbf{M}'$, $\overline{M}_{\chi(x)} \approx [[\delta_c \chi(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$ и так как $c \in \mathfrak{G}^0$ влечет $c \neq 1$, то $\delta_c = 0$, так что $\overline{M}_{\chi(x)} \in \mathbf{N}$. Значит, $\bar{A}$ должен коммутировать с каждым $\overline{M}_{\chi(x)}$ (см. выше) и каждым $\bar{V}_{a_0}$, $a_0 \in \mathfrak{G}^0$. Теперь $\bar{A} \in \mathbf{M}'$, $A \approx [[\xi_c(x)]]_{x \in S, c \in \mathfrak{G}}$, так что нам нужно, чтобы $\xi_c(x)\chi(xc^{-1}) = \xi_c(x)\chi(x)$ (см. лемму 2.3.4, (iv)) и $\xi_{a_0^{-1}ca_0}(xa_0) = \xi_c(x)$.

Первое равенство означает, что $\bar{L}_{\xi_c(x)}\chi = L_{\xi_c(x)} U_{c^{-1}}\alpha$ для всех ограниченных $\chi \in \mathfrak{H}_S$. Следовательно, это верно и для

$$\chi(x) = e_T(x) = \begin{cases} 1, & x \in T, \\ 0, & x \notin T \end{cases}$$

$(T \subset S, \mu(T)$ конечна), их линейных комбинаций и пределов, т. е. для всех $\chi \in \mathfrak{H}_S$ (см. вторую часть доказательства леммы 12.1.1). Значит, $L_{\xi_c(x)} = L_{\xi_c(x)} U_{c^{-1}}$, что согласно лемме 12.2.3 дает $\xi_c(x) = 0$ при $c \neq 1$ (тем самым и $c^{-1} \neq 1$).

Второе равенство означает, что $U_{a_0}^{-1} L_{\xi_1(x)} U_{a_0} = L_{\xi_1(x)}$. Обозначим множество всех U_{a_0}, $a \in \mathfrak{G}^0$, через U^0. Тогда мы имеем $L_{\xi_1(x)} \in \mathbf{L} \cdot U^0$. Поскольку $\mathfrak{G}^0$ эргодична в S, лемма 12.2.4 дает $L_{\xi_1(x)} = \alpha \cdot \mathbf{1} = L_\alpha$, $\xi_1(x) = \alpha$. Значит, $\xi_c(x) = \delta_c \alpha$ и $\bar{A} = \alpha \cdot \mathbf{1}$. Это завершает доказательство равенства $\mathbf{M}' \cdot \mathbf{N}' = (\alpha \cdot \mathbf{1})$.

Лемма 13.4.2. *Пусть* $\mathfrak{G}^0$, $\mathbf{N}$ *те же, что и выше. Тогда* $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, *факторизация, но* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *— не парные факторы.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}'$ и $\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = (\mathbf{R}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))'' = (\mathbf{M}' \cdot \mathbf{N}')' = (\alpha \cdot \mathbf{1})' = \mathbf{B}$, то $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ образуют факторизацию. Так как $\mathbf{N} \neq \mathbf{M}'$, они не являются парными.

Несложно дать примеры групп $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^0$, требуемых в леммах 13.4.1 и 13.4.2: мы используем примеры (α) — (γ) в конце п. 13.1. Так, если $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0$, то нас устроит $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{G}_{k\theta}$, где θ иррационально, $k = 2, 3, \ldots$; или $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{rat}$, $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{G}_{rat,q}$, $q = 2, 3, \ldots$; или $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{rat,p}$, $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{G}_{rat,q}$, $p, q = 2, 3, \ldots, q$ — такой делитель p, никакая степень которого не делится на p (т. е. q не содержит всех простых сомножителей p, например $p = 6$, $q = 2$).

Таким образом, лемма 11.1.2 означает, что $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ из теоремы XI не являются нормальными для $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\theta, \mathfrak{G}_{rat}, \mathfrak{G}_{rat,p}$, если p не является степенью простого числа. (Для $\mathbf{M}'$ это получается непосредственно, для $\mathbf{M}$ следует затем из пространственного изоморфизма $F \to \overline{W}F$ в $\mathfrak{H}_{S,\mathfrak{G}}$, переставляющего $\mathbf{M}$ с $\mathbf{M}'$). Итак, мы получили желаемые примеры не нормальных факторов типа (II). Вопрос о том, являются ли все факторы типа II не нормальными, остается тем не менее открытым: мы не можем решить, являются ли $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ с $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{rat,p}$, где p — степень простого числа, нормальными (см. также замечание в конце статьи).

Это все, что мы можем сказать относительно решения проблемы 10.

Часть V
КОНЕЧНЫЕ СЛУЧАИ

Глава XIV
ОБОБЩЕННАЯ АДДИТИВНОСТЬ $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$

14.1. Предметом последующих глав является исследование конечных случаев (см. теорему VIII), т. е. всех факторов $\mathbf{M}$, принадлежащих классам (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, или (II_1). Замечательным фактом является то, что они ведут себя весьма сходным образом. Это неожиданно, ибо в случае (I_n) $\mathbf{M}$ изоморфно кольцу всех (ограниченных) операторов в n-мерном евклидовом пространстве $\mathfrak{H}_n$, а значит, вполне элементарно, в то время как $\mathbf{M}$ типа (II_1) действует в гильбертовом пространстве, неограниченные операторы могут быть $\eta\mathbf{M}$, операторы из $\mathbf{M}$ могут иметь непрерывный спектр и т. д.

Все наши результаты будут справедливы для всех конечных случаев, т. е. (I_n) и (II_1). По-настоящему интересно, конечно, то, что относится к (II_1), и большинство наших результатов исчезает, становится тривиальным или хорошо известным фактом, когда их прилагают к (I_n). Причиной, побудившей нас включить (I_n) во все наши утверждения, является только желание подчеркнуть аналогию между (I_n) и (II_1) и представить каждый результат, относящийся к (II_1), в правильном свете, показывая, что он должен означать для (I_n).

Мы используем такие обозначения: $\mathfrak{H}$ — пространство; $\mathbf{M}$ — фактор в $\mathfrak{H}$, принадлежащий конечному классу (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, или (II_1); $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ — относительная размерность в $\mathbf{M}$ с нормировкой $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = 1$. Для (I_n) — это стандартная нормировка, умноженная на $1/n$, для (II_1) — просто стандартная нормировка.

В следующем пункте (и только в нем) эти предположения, однако, не будут использованы, тип $\mathbf{M}$ и нормировка $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})$ предполагаются произвольными.

14.2. Обсудим поведение $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ для $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, которые не обязаны быть ни ортогональными, ни сравнимыми ($\mathfrak{M} \subseteq\supseteq \mathfrak{N}$), обобщая, таким образом, утверждения определения 8.2.1.

Лемма 14.2.1. *Предположим, что* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$. *Тогда*

$$D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] - \mathfrak{N}) \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}).$$

Доказательство. Это немедленно следует из леммы 7.3.4.

Лемма 14.2.2. *Пусть* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$ *и* $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) > D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$. *Тогда* $\mathfrak{M}(\mathfrak{H} - \mathfrak{N}) \neq (0)$.

Доказательство. Используя лемму 14.2.1, имеем

$$D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{N}, \mathfrak{H} - \mathfrak{M}]\,\mathfrak{M}) = D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{N}, \mathfrak{H} - \mathfrak{M}] - (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})) \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}) < D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}).$$

Значит, $[\mathfrak{N}, \mathfrak{H} - \mathfrak{M}]\,\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}$. Но $[\mathfrak{N}, \mathfrak{H} - \mathfrak{M}]\,\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, так что $\mathfrak{M} - [\mathfrak{N}, \mathfrak{H} - \mathfrak{M}] \times \mathfrak{M} \neq 0$. Теперь $\mathfrak{M} - [\mathfrak{N}, \mathfrak{H} - \mathfrak{M}]\,\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{H} - [\mathfrak{N}, \mathfrak{H} - \mathfrak{M}]) = \mathfrak{M}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M})(\mathfrak{H} - (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})) = \mathfrak{M}(\mathfrak{H} - \mathfrak{N})\,\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{H} - \mathfrak{N})$. Таким образом, мы доказали, что $\mathfrak{M}(\mathfrak{H} - \mathfrak{N}) \neq (0)$.

Лемма 14.2.3. *Предположим, что* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$. *Тогда* $D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]) \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$ *и равенство выполняется, если* $\mathfrak{M}\mathfrak{N} = (0)$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{M}' = [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] - \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{M}'\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ортогональны, $[\mathfrak{M}', \mathfrak{N}] = [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ и согласно определению 8.2.1, (iii) $D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]) =$

$= D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}', \mathfrak{N}]) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}') + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}) \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$, учитывая, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}') \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ согласно лемме 14.2.1.

Мы видим, что равенство получается, когда $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}') = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$. В противном случае $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}') < D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ и по лемме 14.2.2 $\mathfrak{M}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}') \neq (0)$. Тогда $f \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}')$ означает, что $f \in \mathfrak{M}$ и что f ортогонален $\mathfrak{M}' = [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] - \mathfrak{N}$. Но так как $f \in \mathfrak{M} \subset [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$, второе утверждение означает $f \in [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] - (([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]) - \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$. Значит, $f \in \mathfrak{M}\mathfrak{N}$ и предыдущий результат дает $\mathfrak{M}\mathfrak{N} \neq (0)$.

Это завершает доказательство.

Лемма 14.2.4. *Пусть* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \eta \mathbf{M}$. *Тогда*

$$D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}\mathfrak{N}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}).$$

Доказательство. Положим $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ ортогональны, $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}\mathfrak{N}] = \mathfrak{M}$, значит, согласно определению 8.2.1, (iii) $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_1) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Кроме того, $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}] = [\mathfrak{M}_1, [\mathfrak{N}, \mathfrak{M} - \mathfrak{N}]] = [[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}\mathfrak{N}], \mathfrak{N}] = [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$, и если $f \in \mathfrak{M}_1\mathfrak{N}$, то $f \in \mathfrak{M}$, $f \in \mathfrak{N}$, $f \in \mathfrak{M}\mathfrak{N}$, но $f \in \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} - \mathfrak{N} \subset \mathfrak{H} - \mathfrak{M}\mathfrak{N}$, следовательно, $f = 0$, что доказывает равенство $\mathfrak{M}_1\mathfrak{N} = (0)$. При этом лемма 14.2.3 дает

$$D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]) = D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}]) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_1) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}).$$

Прибавляя к обеим частям $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}\mathfrak{N})$ и учитывая предыдущие равенства, получаем желаемую формулу:

$$D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}\mathfrak{N}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}).$$

Лемма 14.2.5. *Пусть* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ — (*конечная или бесконечная*) *последовательность и все* $\mathfrak{M}_i \eta \mathbf{M}$. *Тогда* $D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) \leqslant \sum_i D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_i)$. *Равенство имеет место в том и только том случае, когда выполнено одно из двух условий*:

(i) $D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots])$ *бесконечна*;

(ii) $D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots])$ *конечна и* $[\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}]\mathfrak{M}_i = (0)$ *для* $i = 2, 3 \ldots$

В случае (*ii*) *имеем даже* $[\mathfrak{M}_{m_1}, \mathfrak{M}_{m_2}, \ldots][\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2} \ldots] = (0)$, *если* $m_1, m_2, \ldots$ *и* $n_1, n_2, \ldots$ — *последовательности без общих элементов.*

Доказательство. Мы вправе считать, что последовательность $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ бесконечна, иначе мы добавили бы бесконечно много элементов $\mathfrak{M}_i = (0)$.

Лемма 8.3.3 приложима к $\mathfrak{M}_1 \subset [\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2] \subset [\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3] \subset \ldots$ и дает $D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots]) = \lim_{i \to \infty} D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_i])$. Теперь можно применить лемму 14.2.3 к $[\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{i-1}], \mathfrak{M}_i$ и получить $D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_i]) \leqslant D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \ldots \mathfrak{M}_{i-1}]) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_i)$ с равенством, если выполнено (ii); поэтому $D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_j]) \leqslant \sum_{i=1}^{j} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_i)$ и, переходя к пределу,

$$D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_i)$$

опять-таки с равенством, если выполнено (ii). Таким образом, мы доказали в общем случае соотношения с $\leqslant$ и достаточность (ii) для равенства. Из (i) также следует равенство, ибо если $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots])$ бесконечна, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_i) \geqslant D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots])$$

тоже бесконечна.

Необходимость (i) или (ii) означает, что если $D_M([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) = \sum_1^\infty D_M(\mathfrak{M}_i)$ конечна, то имеет место (ii). Докажем, что в этом случае

$$[\mathfrak{M}_{m_1}, \mathfrak{M}_{m_2}, \ldots][\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2}, \ldots] = (0),$$

если $m_1, m_2, \ldots$ и $n_1, n_2, \ldots$ не имеют общих элементов; это одновременно доказывает (ii) (положим $m_1 = 1, \ldots, m_{i-1} = i-1$ и $n_1 = i$) и удостоверяет последнее утверждение нашей леммы. Поскольку мы можем добавить к последовательности $n, n_2, \ldots$ все i, отличные от $m_1, m_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots$, можно считать, что $n_1, n_2, \ldots$ является дополнением к $m_1, m_2, \ldots$ в $1, 2, \ldots$

Тогда имеем

$$D_M([\mathfrak{M}_{m_1}, \mathfrak{M}_{m_2}, \ldots]) \leqslant \sum_j D_M(\mathfrak{M}_{m_j}), \quad D_M([\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2}, \ldots]) \leqslant \sum_j D_M(\mathfrak{M}_{n_j}),$$

а потому согласно лемме 14.2.4

$$D_M([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]) + D_M([\mathfrak{M}_{m_1}, \mathfrak{M}_{m_2}, \ldots][\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2}, \ldots]) =$$
$$= D_M([[\mathfrak{M}_{m_1}, \mathfrak{M}_{m_2}, \ldots], [\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2}, \ldots]]) + D_M([\mathfrak{M}_{m_1}, \mathfrak{M}_{m_2}, \ldots][\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2}, \ldots]) =$$
$$= D_M([\mathfrak{M}_{m_1}, \mathfrak{M}_{m_2}, \ldots]) + D_M([\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2}, \ldots]) \leqslant \sum_j D_M(\mathfrak{M}_{m_j}) + \sum_j D_M(\mathfrak{M}_{n_j}) =$$
$$= \sum_1^\infty D_M(\mathfrak{M}_i) = D_M([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots]).$$

Поскольку $D_M([\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots])$ по предположению конечна, отсюда следует, что

$$D_M([\mathfrak{M}_{m_1}, \mathfrak{M}_{m_2}, \ldots][\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2}, \ldots]) \leqslant 0,$$

а значит, равна 0, откуда $[\mathfrak{M}_{m_1}, \mathfrak{M}_{m_2}, \ldots][\mathfrak{M}_{n_1}, \mathfrak{M}_{n_2}, \ldots] = (0)$.

Это завершает доказательство.

Глава XV

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ СЛЕД

15.1. Начиная с этого места, мы считаем выполненными предположения п. 14.1: **M** — фактор конечного типа $((\mathrm{I}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, или $(\mathrm{II}_1))$ и $D_M(\mathfrak{M})$ нормирована равенством $D_M(\mathfrak{H}) = 1$.

Ниже определим аналог следа в обычной (конечномерной) теории матриц, точнее говоря, введем понятие, обладающее главными его свойствами и совпадающее с ним в дискретных случаях (I_n), $n = 1, 2, \ldots$ Важность этого понятия обусловливается, конечно, его приложимостью в непрерывном случае (II_1).

Определение 15.1.1. *Пусть $A \in M$ — эрмитов оператор. Построим его разложение единицы $E(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$ (см.* [16, с. 92]. *Поскольку A ограничен, оно совпадает с гильбертовой спектральной формой. Описание, которым мы будем пользоваться, содержится в* [18, с. 389—390, сноска 42, и с. 418]). *Оно характеризуется и однозначно определяется следующими свойствами* (*loc. cit.*):

(α) *$E(\lambda)$ — проектор, определенный для всех $-\infty < \lambda < \infty$,*

(β) *$\lambda \leqslant \mu$ влечет за собой, что $E(\lambda)$ — часть $E(\mu)$;*

(γ) *$\lambda \leqslant \lambda_0$, $\lambda \to \lambda_0$ влечет $E(\lambda) \to E(\lambda_0)$ в сильной топологии;*

(δ) *существует* C, *для которого* $E(\lambda) = 1$, *если* $\lambda \geqslant C$, *и* $E(\lambda) = 0$, *если* $\lambda \leqslant -C$;

(ε) *для всех* $f, g \in \mathfrak{H}$

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda) f, g)$$

(*последнее выражение есть числовой интеграл Стилтьеса, конечно сходящийся, ибо мы можем заменить* $\int_{-\infty}^{\infty}$ *на* $\int_{-C}^{C}$ *согласно* (δ), *а* $(E(\lambda) f, g)$ *имеет ограниченную вариацию благодаря* (β); *см.* [16, с. 83]).

Это равенство можно символически записать как

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda). \qquad (*)$$

Поскольку $1 \in \mathbf{M}$, *то из* $A \in \mathbf{M}$ *следует, что все* $E(\lambda) \in \mathbf{M}$ (*см.* [18, с. 380]). *Поэтому все* $D_{\mathbf{M}}(E(\lambda))$ *определены и можно построить числовой интеграл Стилтьеса*

$$T_{\mathbf{M}}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dD_{\mathbf{M}}(E(\lambda)). \qquad (**)$$

(*Этот интеграл сходится, ибо мы можем заменить* $\int_{-\infty}^{\infty}$ *на* $\int_{-C}^{C}$ *благодаря* (δ), *так как* $D_{\mathbf{M}}(E(\lambda)) = 0$ *и* 1 *при* $\lambda < -C$ *и* $\lambda \geqslant C$ *соответственно и* $D_{\mathbf{M}}(E(\lambda))$ *монотонна в силу* (β).)

Назовем величину $T_{\mathbf{M}}(A)$, *определенную для всех* $A \in \mathbf{M}$, *относительным следом* A.

Понятно, как символическое равенство (∗) приводит к определению (∗∗). В п. 15.2 после леммы 15.2.2 мы увидим, что в дискретных случаях (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, наше $T_{\mathbf{M}}(A)$ представляет собой просто $1/n$, умноженную на след A в обычном смысле для матриц порядка n

15.2. Другие определения следа можно получить, обобщая «принцип минимакса» (см. [5, с. 26—29]). Вот это обобщение:

Лемма 15.2.1. *Пусть* $A \in \mathbf{M}$ — *эрмитов оператор и* $E(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, — *его разложение единицы. Образуем величину*

$$\varepsilon(\alpha) = \inf_{\left[\substack{\mathfrak{M}\eta\mathbf{M} \\ D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) \geqslant \alpha}\right]} \{\sup_{\left[\substack{f \in \mathfrak{M} \\ \|f\|=1}\right]} (Af, f)\} \qquad \binom{+}{+}$$

для всех $1 \geqslant \alpha > 0$. *В то же время мы имеем*

$$\varepsilon(\alpha) = \inf_{[D_{\mathbf{M}}(E(\lambda)) \geqslant \alpha]} \lambda. \qquad (\#)$$

Доказательство. Рассмотрим множество всех λ с $D_{\mathbf{M}}(E(\lambda)) \geqslant \alpha$. Оно не пусто, поскольку содержит $\lambda = C$, и не является множеством всех вещественных чисел, ибо не содержит $\lambda = -C$; согласно определению 15.1.1, (β) это множество вместе с λ содержит и любое $\lambda' > \lambda$, оно также содержит свою точную нижнюю грань λ_0 в соответствии с определением 15.1.1, (γ). Поэтому это есть просто множество всех $\lambda \geqslant \lambda_0$. Значит, нам нужно доказать, что $\varepsilon(\alpha) = \lambda_0$.

Определим $\mathfrak{M}_0$ равенством $P_{\mathfrak{M}_0} = E(\lambda_0)$, $\mathfrak{M}_0 \eta \mathbf{M}$, ибо $E(\lambda_0) \in \mathbf{M}$ и $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_0) = D_{\mathbf{M}}(E(\lambda_0)) \geqslant \alpha$. Для $f \in \mathfrak{M}_0$ имеем $E(\lambda_0) f = f$, а значит, $E(\lambda) f = f$, если

$\lambda \geqslant \lambda_0$. Поэтому

$$(Af, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda (dE(\lambda) f, f) = \int_{-C}^{C} \lambda d(E(\lambda) f, f) \leqslant \int_{-C}^{\lambda_0} \lambda d(E(\lambda) f, f) =$$
$$= \lambda_0 ((E(\lambda_0) f, f) - (E(-C) f, f)) = \lambda_0 (f, f) = \lambda_0 \| f \|^2,$$

откуда $\sup_{\left[\substack{f \in \mathfrak{M}_0 \\ \|f\|=1}\right]} (Af, f) \leqslant \lambda_0$. Поскольку $\mathfrak{M}_0 \eta M$, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_0) \geqslant \alpha$, это доказывает, что $\varepsilon(\alpha) \leqslant \lambda_0$.

Предположим теперь, что $\varepsilon(\alpha) < \lambda_0$. Тогда согласно $\left(\substack{+\\+}\right)$ должно существовать $\mathfrak{M} \eta \mathbf{M}$, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) \geqslant \alpha$ с $\sup_{\left[\substack{f \in \mathfrak{M} \\ \|f\|=1}\right]} < \alpha$. Выберем $\lambda_0 > \lambda' > \sup_{\left[\substack{f \in \mathfrak{M} \\ \|f\|=1}\right]} (Af, f)$. Согласно определению λ_0 из соотношения $\lambda' < \lambda_0$ следует, что $D_{\mathbf{M}}(E(\lambda')) < \alpha$. Определим $\mathfrak{M}'$ равенством $P_{\mathfrak{M}'} = E(\lambda')$, тогда $\mathfrak{M}' \eta \mathbf{M}$, ибо $E(\lambda') \in \mathbf{M}$. Имеем

$$D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}') = D_{\mathbf{M}}(E(\lambda')) < \alpha \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}),$$

и по лемме 14.2.2 $\mathfrak{M}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}') \neq 0$. Значит, существует $f_0 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}')$ с $f_0 \neq 0$.

Далее, поскольку $f_0 \in \mathfrak{H} - \mathfrak{M}'$, мы имеем $E(\lambda') f_0 = 0$, и поэтому $E(\lambda) f_0 = 0$, если $\lambda \leqslant \lambda'$. Таким образом,

$$(Af_0, f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda) f_0, f_0) = \int_{\lambda'}^{C} \lambda d(E(\lambda) f_0, f_0) \geqslant \int_{\lambda'}^{C} \lambda' d(E(\lambda) f_0, f_0) =$$
$$= \lambda' ((E(C) f_0, f_0) - (E(\lambda') f_0, f_0)) = \lambda' (f_0, f_0) = \lambda' \| f_0 \|^2.$$

Домножив f_0 на $1/\| f_0 \|$, можно считать, что $\| f_0 \| = 1$. Но в то же время $f_0 \in \mathfrak{M}$, значит, мы имеем $\sup_{\left[\substack{f \in \mathfrak{M} \\ \|f\|=1}\right]} (Af, f) \geqslant \lambda'$, что противоречит исходному предположению относительно λ'.

Поэтому должно быть $\varepsilon(\alpha) = \lambda_0$, и доказательство закончено.

Лемма 15.2.2. *Пусть* $A \in \mathbf{M}$ *эрмитов и* $\varepsilon(\alpha)$, *как и в лемме* 15.1.1. *Тогда*

$$T_{\mathbf{M}}(A) = \int_0^1 \varepsilon(\alpha) \, d\alpha.$$

Доказательство. Имеем $T_{\mathbf{M}}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(D_{\mathbf{M}}(E(\lambda)))$.

Достаточно вспомнить определение интеграла Римана — Стилтьеса, чтобы увидеть, что это совпадает с интегралом Римана $\int_0^1 (\inf_{[D_{\mathbf{M}}(E(\lambda)) \geqslant \alpha]} \lambda) \, d\alpha$ (см. [19, с. 198]).

Поэтому согласно формуле ($\#$) из леммы 15.2.1 он равен $\int_0^1 \varepsilon(\alpha) \, d\alpha$.

Отметим, что в случае (I_n) $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ не принимает никаких значений, кроме 0, $1/n$, $2/n$, ..., $(n-1)/n$, 1, так что $\varepsilon(\alpha)$ постоянна на каждом интервале $(p - 1)/n < \alpha \leqslant p/n$, $p = 1, \ldots, n$. Поэтому лемма 15.2.2 дает

$$T_{\mathbf{M}}(A) = \int_0^1 \varepsilon(\alpha) \, d\alpha = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \varepsilon\left(\frac{p}{n}\right)$$

и, как легко проверить, $\varepsilon(p/n)$ является собственным значением A с номером p (снизу). Таким образом, $T_{\mathbf{M}}(A)$ равен $1/n$ части следа A. Более прямое доказательство приведено в п. 15.4 после теоремы XIII. В случае (II_1) $\int_0^1 \varepsilon(\alpha) \, d\alpha$

превращается в интеграл по действительно непрерывной области. Благодаря аналогии со случаем (I_n) кажется естественным ввести такую терминологию.

Определение 15.2.1. *Пусть* $A \in \mathbf{M}$ — *эрмитов оператор и* $\varepsilon(\alpha)$ *определено как в лемме 15.2.1. Назовем* $\varepsilon(\alpha)$ *собственным значением* A *с номером* α *(снизу) в непрерывной шкале* $0 < \alpha \leqslant 1$.

Немедленным приложением нашего нового определения является

Лемма 15.2.3. *Пусть самосопряженные операторы* A, $B \in \mathbf{M}$ *и* $A - B$ *(полу)определен. Тогда* $T_{\mathbf{M}}(A) \geqslant T_{\mathbf{M}}(B)$.

Доказательство. Образуем $\varepsilon(\alpha)$ из леммы 15.2.1 для A и B, обозначая их через $\varepsilon(\alpha)$ и $\eta(\alpha)$ соответственно. Поскольку положительность $A - B$ означает, что $((A - B)f, f) \geqslant 0$, $(Af, f) \geqslant (Bf, f)$ для любого f, формула ($\ddagger$) из леммы 15.2.1 дает $\varepsilon(\alpha) \geqslant \eta(\alpha)$. Теперь из леммы 15.2.2 следует $T_{\mathbf{M}}(A) \geqslant T_{\mathbf{M}}(B)$.

Отметим, что $T_{\mathbf{M}}(A) \geqslant 0$ для положительного A (очевидно) и что отсюда немедленно последовала бы наша лемма, если бы мы знали, что $T_{\mathbf{M}}(A - B) = T_{\mathbf{M}}(A) - T_{\mathbf{M}}(B)$. Но к настоящему моменту это соотношение установлено только для коммутирующих A и B (см. лемму 15.3.4 и замечания после нее), что делает указанные упрощения неприменимыми.

15.3. Теперь установим новые формальные свойства $T_{\mathbf{M}}(A)$.

Лемма 15.3.1. *Пусть* $E \in M$ — *проектор. Тогда* $T_{\mathbf{M}}(E) = D_{\mathbf{M}}(E)$.

Доказательство. Семейство проекторов

$$E(\lambda) = \begin{cases} E & \text{для } \lambda \geqslant 1, \\ 0 & \text{для } \lambda < 1 \end{cases}$$

является разложением единицы для E, поскольку для него легко проверить условия (α) — (ε) определения 15.1.1. Значит,

$$D_{\mathbf{M}}(E(\lambda)) = \begin{cases} D_{\mathbf{M}}(E) & \text{для } \lambda \geqslant 1, \\ 0 & \text{для } \lambda < 1, \end{cases}$$

а поэтому

$$T_{\mathbf{M}}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d D_{\mathbf{M}}(E(\lambda)) = 1 \cdot D_{\mathbf{M}}(E) = D_{\mathbf{M}}(E).$$

Лемма 15.3.2. *Пусть эрмитов* $A \in \mathbf{M}$, a *и* b — *вещественные числа. Тогда*

$$T_{\mathbf{M}}(aA + b \cdot 1) = aT_{\mathbf{M}}(A) + b.$$

Доказательство. Сначала докажем, что $T_{\mathbf{M}}(-A) = -T_{\mathbf{M}}(A)$, что позволит нам ограничиться случаем $a \geqslant 0$.

Пусть $E(\lambda)$ — разложение единицы для A. Тогда $1 - E(-\lambda)$ удовлетворяет для $-A$ всем условиям (α) — (ε) определения 15.1.1, кроме (γ). Проектор $E_1(\lambda) = \lim\limits_{\substack{\lambda' > \lambda \\ \lambda' \to \lambda}} (1 - E(-\lambda))$, как показывают простые рассуждения, удовлетворяет всем условиям, значит, $E_1(\lambda)$ — разложение единицы для $-A$. Теперь $E_1(\lambda) \neq 1 - E(-\lambda)$ только в точках разрыва $E(-\lambda)$, т. е. в тех точках $-\lambda$, в которых λ проходит через дискретное собственное значение A. Это счетное множество. A fortiori $D_{\mathbf{M}}(E_1(\lambda)) \neq D_{\mathbf{M}}(1 - E(-\lambda))$ только на счетном множестве. Поэтому согласно определению интеграла Римана — Стилтьеса можно заменить

$d(D_M(E_1(\lambda)))$ на $d(D_M(1-E(-\lambda)))$ в любом интеграле Римана—Стилтьеса, где этот дифференциал появляется. Значит,

$$T_M(-A)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dD_M(E_1(\lambda))=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dD_M(1-E(-\lambda))=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(-\lambda)\,dD_M(E(-\lambda))=\int_{\infty}^{-\infty}\lambda dD_M(E(\lambda))=-\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dD_M(E(\lambda))=-T_M(A).$$

Предположим теперь, что $a\geqslant 0$. Обозначим $\varepsilon(\alpha)$ для A и для $aA+b\cdot 1$ через $\varepsilon(\alpha)$ и $\eta(\alpha)$ соответственно. При $\|f\|=1$ $((aA+b\cdot 1)f,f)=a(Af,f)+B(f,f)=$ $=a(Af,f)+b$, и, так как $a>0$, это выражение может быть использовано при вычислении супремумов и инфинумов. Поэтому формула (‡) из леммы 15.2.1 дает $\eta(\alpha)=a\varepsilon(\alpha)+b$, а затем из леммы 15.2.2 следует $T_M(aA+b\cdot 1)=$ $=aT_M(A)+b$. Это завершает доказательство.

Лемма 15.3.3. *$T_M(A)$ является непрерывной функцией от A в равномерной операторной топологии* (*см.* [18, с, 384]).

Доказательство. Покажем, что если $\|(A-B)f\|\leqslant\varepsilon\|f\|$ для любого $f\in\mathfrak{H}$, то

$$|T_M(A)-T_M(B)|\leqslant\varepsilon.$$

В сделанных предположениях мы имеем

$$|((A-B)f,f)|\leqslant\|(A-B)f\|\,\|f\|\leqslant\varepsilon\|f\|^2,$$

$$(Af,f)\leqslant(Bff)+\varepsilon\|f\|^2=((B+\varepsilon\cdot 1)f,f).$$

Поэтому $(B+\varepsilon\cdot 1)-A$ полуопределен и по лемме 15.3.3 $T_M(B+\varepsilon\cdot 1)\geqslant T_M A$. Но согласно лемме 15.3.2 $T_M(B+\varepsilon 1)=T_M(B)+\varepsilon$, так что мы имеем $T_M(A)-$ $-T_M(B)\leqslant\varepsilon$. Переставляя A и B (предположения симметричны относительно A и B), мы получим $T_M(A)-T_M(B)\geqslant-\varepsilon$. Таким образом, $|T_M(A)-$ $-T_M(B)|\leqslant\varepsilon$, что и завершает доказательство.

В другом месте мы докажем более сильные утверждения относительно непрерывности $T_M(A)$ (см. замечания в конце этой статьи).

Лемма 15.3.4. *Пусть A, $B\in\mathbf{M}$ эрмитовы и коммутируют между собой. Тогда*

$$T_M(A+B)=T_M(A)+T_M(B).$$

Доказательство. Пусть $E(\lambda)$ и $F(\lambda)$ — разложения единицы A и B соответственно. Согласно [18, с. 390—391, в частности, сноска 43], A и B являются пределами равномерно сходящихся последовательностей линейных комбинаций $E(\lambda)$ и $F(\lambda)$ соответственно. Поэтому благодаря лемме 15.3.3 достаточно доказать, что

$$T_M\left(\sum_1^m a_iE(\lambda_i)+\sum_1^n b_jF(\mu_j)\right)=T_M\left(\sum_1^m a_iE(\lambda_i)\right)+T_M\left(\sum_1^n b_jF(\mu_j)\right).$$

Отметим, что если A и B коммутируют, то и все $E(\lambda)$, $F(\mu)$ коммутируют между собой (см. [16, с. 115]).

Поэтому достаточно доказать, что

$$T_{\mathbf{M}}\left(\sum_1^p (c_p + d_p) E_p\right) = T_{\mathbf{M}}\left(\sum_1^p c_p E_p\right) + T_{\mathbf{M}}\left(\sum_1^p d_p E_p\right),$$

где $E_1, \dots, E_p$ — коммутирующие проекторы. (Подставить $m+n$, $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_m)$, $F(\mu_1), \dots, F(\mu_n)$, $a_1, \dots a_m$, $0, \dots, 0$; $0, \dots, 0$, $b_1, \dots, b_n$ вместо P, $E_1, \dots, E_p$, $c_1, \dots$ $\dots, c_p$, $d_1, \dots, d_p$.)

Это немедленно следует из

$$T_{\mathbf{M}}\left(\sum_1^p c_p E_p\right) = \sum_1^p c_p T_{\mathbf{M}}(E_p) \qquad (\#)$$

(для любого выбора $c_1, \dots, c_p$ в предположении, что $E_1, \dots, E_p$ коммутируют). Рассмотрим 2^p слагаемых, возникающих при вычислении

$$(E_1 + (1 - E_1)) \dots (E_p + (1 - E_p)).$$

Они являются произведениями коммутирующих проекторов $\in \mathbf{M}$, а значит, проекторами $\in \mathbf{M}$, их сумма равна 1, а сумма всех операторов, возникающих из слагаемого E_p в сомножителе $E_p + (1 - E_p)$, равна E_p. Обозначим их через $E_1', \dots$ $\dots, E_q'$, $q = 2^p$. Поскольку

$$E_1' + \dots + E_q' = 1,$$

они взаимно ортогональны. Запишем $E_\rho = E'_{\pi_{\rho,1}} + \dots + E'_{\pi_{\rho,s}}$. Мы утверждаем, что если (#) верно для $E_1', \dots, E_q'$ (со всеми $c_1, \dots, c_q$), то оно верно и для $E_1, \dots, E_p$. В самом деле,

$$T_{\mathbf{M}}\left(\sum_1^p c_\rho E_\rho\right) = T_{\mathbf{M}}\left(\sum_{\rho=1}^p c_\rho \left(\sum_{\sigma=1}^s E'_{\pi_{\rho,\sigma}}\right)\right) =$$

$$= T_{\mathbf{M}}\left(\sum_{\tau=1}^q \left(\sum_{\rho,\sigma,\pi_{\rho,\sigma}=\tau} c_\rho\right) E_\tau'\right) = \sum_{\tau=1}^q \left(\sum_{\rho,\sigma,\pi_{\rho,\sigma}=\tau} c_\rho\right) D_{\mathbf{M}}(E_\tau') =$$

$$= \sum_{\rho=1}^p c_\rho \left(\sum_{\sigma=1}^\rho D_{\mathbf{M}}(E'_{\pi_{\rho,\sigma}})\right) = \sum_1^p c_\rho D_{\mathbf{M}}(E_\rho).$$

Иными словами, мы можем считать, что в (#) $E_1, \dots, E_p$ взаимно ортогональны и $E_1 + \dots + E_p = 1$.

Далее, если два коэффициента c_ρ в (#) равны, скажем $c_\rho = c_\sigma$ для некоторых $\rho \neq \sigma$, то E_ρ и E_σ можно объединить в $E_\rho + E_\sigma$ в обеих частях (#). Поэтому можно считать, что все c_ρ различны. Поскольку перестановки не играют роли, можно считать также, что $c_1 < c_2 < \dots < c_p$.

Определим теперь

$$G(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{для } \lambda < c_1, \\ E_1 + \dots + E_\rho & \text{для } c_{\rho+1} > \lambda \geqslant c_\rho \text{ при } \rho = 1, \dots, p-1, \\ 1 & \text{для } \lambda \geqslant c_p. \end{cases}$$

Для этих $G(\lambda)$ и $\sum_1^p c_\rho E_\rho$ легко проверить условия (α)—(ε) определения 15.1.1,

значит, это разложение единицы для $\sum_1^p c_\rho E_\rho$. Теперь определение 15.1.1 дает

$$T_{\mathbf{M}}\left(\sum_1^p c_\rho E_\rho\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\left(D_{\mathbf{M}}\left(G(\lambda)\right)\right) =$$
$$= \sum_1^p c_\rho \left(D_{\mathbf{M}}(E_1 + \ldots + E_\rho) - D_{\mathbf{M}}(E_1 + \ldots + E_{\rho-1})\right) = \sum_1^p c_\rho D_{\mathbf{M}}(E_\rho).$$

Это завершает доказательство.

Отметим, что по аналогии со следом конечномерных матриц следует ожидать, что аддитивность $T_{\mathbf{M}}(A)$, выраженная в лемме 15.3.4, справедлива и без предположения о коммутативности A с B. Мы вернемся к этому вопросу в конце п. 15.4, в проблеме 11.

15.4. Благодаря тому, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = 1$, соотношение $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ можно выразить иначе.

Лемма 15.4.1. $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots \mathbf{M})$ *эквивалентно тому, что* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ *и существует унитарный оператор* $V \in \mathbf{M}$, *переводящий* $\mathfrak{M}$ *в* $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ и такой оператор V существует, то $U = VP_{\mathfrak{M}} \in \mathbf{M}$ частично изометричен и имеет своим начальным множеством $\mathfrak{M}$, а конечным — $\mathfrak{N}$, значит, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots \mathbf{M})$.

Обратно, если $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots \mathbf{M})$, то $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) - D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) - D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{N})$ (этот шаг возможен благодаря тому, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = 1$ конечна), $\mathfrak{H} - \mathfrak{M} \sim \mathfrak{H} - \mathfrak{N}$. Пусть U_1, $U_2 \in \mathbf{M}$ — частично изометрические операторы с начальными $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ и конечными $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ множествами соответственно. Легко проверить, что $V = U_1 + U_2 \in \mathbf{M}$ унитарен и отображает $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$. Очевидно, $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$.

Это доказательство было основано на конечности $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})$, т. е. $\mathfrak{H}$ (относительно $\mathbf{M}$). На самом деле конечность $\mathfrak{H}$ необходима и достаточна для справедливости леммы: если $\mathfrak{H}$ бесконечно, то $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{M}(\ldots \mathbf{M})$ с $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{H}$, но никакой унитарный U не переводит $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{H}$.

Сформулируем теперь основные свойства инвариантности $T_{\mathbf{M}}(A)$.

Лемма 15.4.2. *Пусть* $A \in \mathbf{M}$ *эрмитов и* $U \in \mathbf{M}$ *унитарен. Тогда*

$$T_{\mathbf{M}}(U^{-1}AU) = T_{\mathbf{M}}(A).$$

Доказательство. Если A имеет разложение единицы $E(\lambda)$, то для $U^{-1}AU$ таковым, очевидно, будет $U^{-1}E(\lambda)U$. Положим $E(\lambda) = P_{\mathfrak{M}(\lambda)}$, $U^{-1}E(\lambda)U = P_{\mathfrak{N}(\lambda)}$, тогда $\mathfrak{N}(\lambda)$ является образом $\mathfrak{M}(\lambda)$ при отображении U^{-1}. Значит,

$$\mathfrak{M}(\lambda) \sim \mathfrak{N}(\lambda)(\ldots \mathbf{M}), \quad D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}(\lambda)) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}(\lambda)), \quad D_{\mathbf{M}}(E(\lambda)) = D_{\mathbf{M}}(U^{-1}E(\lambda)U).$$

Теперь определение 15.1.1 дает $T_{\mathbf{M}}(A) = T_{\mathbf{M}}(U^{-1}AU)$.

Наконец, мы в состоянии охарактеризовать относительный след его внутренними свойствами.

Лемма 15.4.3. *Предположим, что (вещественнозначная и ограниченная) функция* $T'(A)$ *определена на всех эрмитовых* $A \in \mathbf{M}$ *и обладает следующими свойствами:*

(i) $T'(1) = 1$;
(ii) $T'(aA) = aT'(A)$, *если a вещественно;*
(iii) $T'(A + B) = T'(A) + T'(B)$, *если A и B коммутируют;*
(iv) $T'(A) \geqslant 0$, *если A (полу)определен;*
(v) $T'(U^{-1}AU) = T(A)$, *если* $U \in \mathbf{M}$ *унитарен.*

Это может иметь место, если и только если $T'(A)$ *совпадает с относительным следом* $T'(A) = T_{\mathbf{M}}(A)$ *для всех эрмитовых* $A \in \mathbf{M}$.

Доказательство. Согласно леммам 15.3.2, 15.3.4, 15.2.3 и 15.4.2 $T_{\mathbf{M}}(A)$ обладает свойствами (i)—(v). Поэтому остается только обратная задача: определить $T'(A)$, удовлетворяющую свойствам (i)—(v). Предположим для этого, что нам дана такая функция $T'(A)$.

Если E — проектор $\in \mathbf{M}$, то, поскольку E полуопределен, имеем согласно (iv) $T'(E) \geqslant 0$. Если $E \sim F$ (...$\mathbf{M}$), то по лемме 15.4.1 существует унитарный оператор $U \in \mathbf{M}$, для которого $F = U^{-1}EU$, значит, по условию (v) $T'(E) = T'(F)$. Если E и F ортогональны, т. е. если $EF = FE = 0$, то они коммутируют, значит, $T'(E + F) = T'(E) + T'(F)$. Таким образом, условия (ii), (iii) определения 8.2.1 выполнены, и поскольку $\infty > T'(1) = 1 > 0$, то по лемме 8.3.5 $T'(E)$ является функцией относительной размерности (относительно $\mathbf{M}$). Значит, $T'(E) = cD_{\mathbf{M}}(E)$ с подходящей константой c, но так как $T'(1) = D_{\mathbf{M}}(1) = 1$ согласно (i), то $c = 1$ и $T'(E) = D_{\mathbf{M}}(E)$.

Далее, если $E_1, \ldots, E_p$—взаимно ортогональные проекторы с $E_1 + \ldots + E_p = 1$ и $c_1 < c_2 < \ldots < c_p$, то мы имеем: при $\rho \neq \sigma$ всегда $E_\rho E_\sigma = E_\sigma E_\rho = 0$, т. е. E_ρ и E_σ коммутируют, а значит, по (ii), (iii) $T'\left(\sum_1^p c_\rho E_\rho\right) = \sum_1^p c_\rho T'(E_\rho)$, а то согласно рассуждениям, проведенным в конце доказательства леммы 15.3.4, равно $T_{\mathbf{M}}\left(\sum_1^p c_\rho E_\rho\right)$. Итак, желаемое равенство $T'(A) = T_{\mathbf{M}}(A)$ установлено для всех A, имеющих вид $\sum_1^p c_\rho E_\rho$.

Из (i)—(iii) следует, что всегда $T'(aA + b\cdot 1) = aT'(A) + b$. Из (iii), (iv) вытекает, что $T'(A) \geqslant T'(B)$, если $A - B$ (полу)ограничен, а A и B коммутируют. Поэтому доказательство леммы 15.3.3 применимо и к $T'(A)$, если ограничиться коммутирующим набором операторов; тогда $T'(A)$ является непрерывной функцией A в равномерной топологии операторов. Как мы знаем из леммы 15.3.3, это верно и для $T_{\mathbf{M}}(A)$.

Построим теперь операторы, упоминаемые в [18, с. 390—391, в частности, сноска 43]. Они обозначаются $A^{K_\varepsilon} = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu (E(\lambda_\nu) - E(\lambda_{\nu-1}))$. Как мы там указывали, они равномерно сходятся к пределу A, а поскольку все $E(\lambda)$ коммутируют между собой и с A, то же верно и для A^{K_ε}. Поэтому $T'(A) = T_{\mathbf{M}}(A)$ получится, если мы докажем, что $T'(A^{K_\varepsilon}) = T_{\mathbf{M}}(A^{K_\varepsilon})$. Но это равенство справедливо, ибо A^{K_ε} имеют вид, обсуждавшийся выше с $p = n$, $c_\nu = \lambda_\nu$, $E_\nu = E(\lambda_\nu) - E(\lambda_{\nu-1})$.

Таким образом, доказательство закончено.

Перечислим еще раз полученные до сих пор результаты.

Теорема XIII. *Пусть* $\mathbf{M}$ *— фактор конечного типа* ((I_n) *или* (II_1)). *Тогда существует одна и только одна (вещественнозначная и ограниченная) чис-*

ловая функция $T'(A)$, определенная на всех эрмитовых операторах $A \in \mathbf{M}$ и обладающая следующими свойствами:

(i) $T'(1) = 1$;

(ii) $T'(aA) = aT'(A)$, *если a вещественно*;

(iii) $T'(A + B) = T'(A) + T'(B)$, *если A коммутирует с B*;

(iv) $T'(A) \geqslant 0$, *если A (полу)определен*;

(v) $T'(U^{-1}AU) = T'(A)$, *если $U \in \mathbf{M}$ унитарен.*

Эта единственная $T'(A)$ совпадает с относительным следом A, $T_{\mathbf{M}}(A)$. Прочие важнейшие свойства $T'(A)$ приведены в леммах 15.2.3, 15.3.1 *и* 15.3.3. *Эквивалентное ее определение содержится в определении* 15.1.1 *и лемме* 15.2.2.

В частности, имеем (это следует из леммы 15.3.1, *а также из* (i)—(v)):

(vi) *для проектора $E \in \mathbf{M}$ из $T'(E) = 0$ следует $E = 0$.*

В случае (I_n) при помощи этой теоремы единственности мы получаем простое определение следа $T_{\mathbf{M}}(A)$: если $\mathbf{M}$ — фактор типа (I_n), то $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, $\mathbf{M} = \mathbf{B}_1^{(1)}$, $\mathfrak{H}_1$ имеет размерность n. Тогда лемма 2.4.6 показывает, что в обозначениях $A^0 \sim \langle A_{t,s}\rangle_{t,s=1,\ldots,n}$ из определения 2.4.2 $A^0 \in \mathbf{M}$ характеризуются свойством $A^0 \sim \langle \alpha_{t,s}1\rangle_{t,s=1,\ldots,n}$, что соответствует числовой матрице $\{\alpha_{t,s}\}_{t,s=1,\ldots,n}$. Теперь $T'(A) = \left(\sum_{t=1}^{n} \alpha_{tt}\right)/n$, как легко проверить, удовлетворяет (i) — (v), значит $T_{\mathbf{M}}(A^0) = \left(\sum_{t=1}^{n} \alpha_{t,t}\right)/n$.

Примеры случая (II_1), приведенные в теореме XI, тоже можно явно описать, если принять во внимание лемму 13.1.3. Если $\overline{A} \in \mathbf{M}$ или $\overline{A} \in \mathbf{M}'$, напишем $\overline{\overline{A}} \simeq \|\chi_c(x)\|_{x\in S, c\in\mathfrak{S}}$ и образуем $t(\overline{A}) = \int_S \chi_1(x)\,dx$ (см. там же и лемму 12.4.2). Тогда $T'(A) = (1/\mu(S))\,t(A)$ удовлетворяет (i) — (iii), как легко проверить с помощью леммы 12.4.2, (i) — (iii).

Относительно (iv) заметим, что любой положительный оператор $\bar{A}$ имеет вид $\overline{B}^2$, где $\overline{B} = \alpha(\overline{A})$, $\alpha(x) = |x|^{1/2}$. Поэтому $\overline{B}$ принадлежит нашему кольцу ($\mathbf{M}$ и соответственно $\mathbf{M}'$) и эрмитов. A fortiori $\overline{A} = \bar{B}^*\overline{B}$ и теперь $t(\bar{A}) = t(\bar{B}^*\overline{B}) \geqslant 0$, $t'(A) \geqslant 0$ следует из леммы 12.4.2, (iv).

Условие (v) доказывается следующим образом: поскольку $A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$, достаточно рассмотреть эрмитовы операторы A, а так как

$$A = (^1/_2(A + 1))^2 - (^1/_2(A - 1))^2,$$

можно считать, что $A = B^2$ и B эрмитов. Итак, мы должны доказать, что

$$T'(U^{-1}B^2U) = T'(B^2),$$

т. е. $t(U^{-1}B^2U) = t(B^2)$. Это совпадает с леммой 12.4.2, (iv), если положить там $A = BU$.

Во всех этих случаях (iii), т. е. $T_{\mathbf{M}}(A + B) = T_{\mathbf{M}}(A) + T_{\mathbf{M}}(B)$, имеет место даже без предположения о коммутативности A и B. Это ставит новую проблему.

Проблема 11. *Верно ли в общем случае, что $T_{\mathbf{M}}(A + B) = T_{\mathbf{M}}(A) + T_{\mathbf{M}}(B)$ без ограничений на A и B?*

Ответ, конечно, положительный в случае (I_n) и во всех известных примерах случая (II_1) (см. также замечания в конце этой статьи).

15.5. Утверждения теоремы XIII относительно единственности $T'(A)$ с перечисленными в ней свойствами могут быть сформулированы и обсуждены, даже если предполагать, что $\mathbf{M}$ — не фактор, а лишь кольцо с $\mathbf{1} \in \mathbf{M}$.

Так, если $\mathbf{M}$ — кольцо с $\mathbf{1} \in \mathbf{M}$, можно задать вопрос: когда условия (i)—(vi) теоремы XIII имеют единственное решение? Это верно, если $\mathbf{M}$ — фактор, причем конечнюго типа. Рассмотрим обратную задачу: предположим, что $\mathbf{M}$ — кольцо с $\mathbf{1} \in \mathbf{M}$ и что (i)—(vi) имеют единственное решение, скажем $T^0(A)$.

Рассмотрим $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}'$. Это кольцо, следовательно, оно порождено всеми проекторами $E \in \mathbf{M}\cdot\mathbf{M}'$ (см. [18, с. 392]). Рассмотрим проектор $E \in \mathbf{M}\cdot\mathbf{M}'$. Если $A \in \mathbf{M}$, то A коммутирует с E, ибо $E \in \mathbf{M}'$, а значит, $AE = AEE = EAE$. Поэтому, если A — эрмитов (полу)определенный оператор, то и AE такой же оператор. Кроме того, $A, E \in \mathbf{M}$, значит, $AE \in \mathbf{M}$. Возьмем теперь две константы a_1 и $a_2 > 0$ и положим

$$T'(A) = a_1 T^0(A) + a_2 T^0(AE).$$

Тогда $T'(A)$ ведет себя относительно условий (i)—(vi) теоремы XIII так:

(i) верно, если $a_1 + a_2 T^0(E) = 1$; (ii) верно всегда; (iii) верно, ибо $E \in \mathbf{M}'$ коммутирует с $A, B \in \mathbf{M}$. таким образом, если эти A и B коммутируют, то и AE и BE коммутируют; (iv) верно, так как AE (полу)определены вместе с A; (v) верно, ибо $E \in \mathbf{M}'$ коммутирует с $U \in \mathbf{M}$, так что $(U^{-1}AU)E = U^{-1}(AE)U$; (vi) верно, потому что если F — проектор, а значит, (полу)определен, то и FE такой же, следовательно, $T^0(F) \geqslant 0$, $T^0(FE) \geqslant 0$ и $T'(F) = 0$ влечет за собой $T^0(F) = 0$, $F = 0$.

В этих условиях наше предположение требует $T'(A) = T^0(A)$ для любого эрмитова A. В частности, $T'(E) = T^0(E)$, но, по определению, $T'(E) = (a_1 + a_2)T^0(E)$. Поэтому $(a_1 + a_2 - 1)T^0(E) = 0$. Итак, мы доказали, что из $a_1, a_2 > 0$, $a_1 + a_2 T^0(E) = 1$ следует $(a_1 + a_2 - 1)T^0(E) = 0$. Это, очевидно, не так, если $T^0(E) \neq 1, 0$, значит, мы имеем или $T^0(E) = 0$, $E = 0$ (из (vi)), или $T^0(E) = 1$, $T^0(\mathbf{1} - E) = 1 - T^0(E) = 0$, $\mathbf{1} - E = 0$, $E = \mathbf{1}$ (из (i), (iii), (iv)).

Таким образом, $\mathbf{MM}' = \mathbf{R}(0, \mathbf{1}) = (\alpha\cdot\mathbf{1})$, а значит, $\mathbf{M}$ — фактор.

Теперь аргументы, приведенные в начале доказательства леммы 15.4.3, показывают, если вспомнить еще лемму 8.3.5, что $T^0(E)$ — относительная размерность относительно $\mathbf{M}$ (E пробегает проекторы $E \in \mathbf{M}$), $T^0(\mathbf{1}) = 1$ (из (i)) конечна, значит, оператор $\mathbf{1}$ конечен относительно $\mathbf{M}$ и конечно пространство $\mathfrak{H}$. Поэтому $\mathbf{M}$ принадлежит одному из конечных типов: (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, или (II_1).

Следовательно, нами доказана такая

Теорема XIV. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *кольцо и* $\mathbf{1} \in \mathbf{M}$. *Условия* (i) — (vi) *теоремы* XIII *допускают единственное решение, если и только если* $\mathbf{M}$ — *фактор конечного типа*: (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, *или* (II_1).

Отметим, что, хотя (i)—(v) влекут за собой (vi) при условии, что $\mathbf{M}$ — фактор, это может быть не так, если $\mathbf{M}$ — просто кольцо с $\mathbf{1} \in \mathbf{M}$, а поэтому единственность решения не может гарантировать того, что $\mathbf{M}$ — фактор. Вот почему (i)—(v) оказались достаточными для теоремы XIII, но в теореме XIV понадобились все условия (i)—(vi). Действительно, существуют кольца $\mathbf{M}$ с $\mathbf{1} \in \mathbf{M}$, для

которых (i)—(v) имеют единственное решение и которые тем не менее не являются факторами. Простые соображения, которые мы здесь не будем уточнять, показывают, что кольцо $\mathbf{M} = (P_{[\varphi]})'$ ($\mathfrak{H}$ — любое бесконечномерное пространство, $\varphi \in \mathfrak{H}$, $\|\varphi\| = 1$) таково; единственным решением (i)—(v) является $T^0(A) = (A\varphi, \varphi)$, а $\mathbf{M}$ — не фактор, ибо $P_{[\varphi]} \in \mathbf{M}\cdot\mathbf{M}'$.

В этой главе мы не пытались построить полную теорию следа. Нашей целью был краткий обзор наиболее характерных ее черт.

Множество других проблем можно было бы рассмотреть нашими настоящими методами. Например, лемма 15.3.3 может быть усилена так, чтобы быть применимой даже к сильной операторной топологии (см. [18, с. 381]); можно установить связи между $T_{\mathbf{M}}(A)$ и (Af, f) и т. д. Мы предполагаем вернуться к этим вопросам и проблеме 11 в дальнейших статьях.

Глава XVI

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

16.1. Всюду в этой главе мы предполагаем, что $\mathbf{M}$ — фактор конечного типа $((\mathrm{I}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, или $(\mathrm{II}_1))$ и $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ нормировано условием $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = 1$.

Следующая лемма является следствием леммы 6.2.1 и справедлива лишь в конечных случаях.

Лемма 16.1.1. *Если X — линейный замкнутый оператор со всюду плотной областью определения и $X\eta\mathbf{M}$, то $(f;\ Xf = 0)$ и $(f;\ X^*f = 0)$ являются линейными замкнутыми множествами $\eta\mathbf{M}$ и*

$$D_{\mathbf{M}}((f; Xf = 0)) = D_{\mathbf{M}}((f; X^*f = 0)).$$

Доказательство. Равенство $X^*f = 0$ означает, что $(X^*f, g) = (f, Xg) = 0$ для всех g, принадлежащих области определения X, т. е. f ортогонален образу X. Значит, $(f;\ X^*f = 0) = \mathfrak{H} - [\text{Range}\, X]$, откуда $(f;\ X^*g = 0)\,\eta\mathbf{M}$; $D_{\mathbf{M}}((f,\ X^*f = 0)) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) - D_{\mathbf{M}}([\text{Range}\ X]) = 1 - D_{\mathbf{M}}([\text{Range}\ X])$. Заменяя X на X^*, мы видим, что $(f;\ Xf = 0)\,\eta\mathbf{M}$, $D_{\mathbf{M}}((f;\ Xf = 0)) = 1 - D_{\mathbf{M}}([\text{Range}\ X^*])$. Далее, лемма 6.2.1 устанавливает равенство $D_{\mathbf{M}}([\text{Range}\ X]) = D_{\mathbf{M}}([\text{Range}\ X^*])$, значит, $D_{\mathbf{M}}((f;\ Xf = 0)) = D_{\mathbf{M}}((f;\ X^*f = 0))$.

В случаях (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, это сводится просто к утверждению о том, что число линейно независимых решений линейного уравнения $Xf = 0$ равно числу таких решений сопряженного уравнения $X^*f = 0$. Мы видим теперь, что благодаря нашему понятию относительной размерности утверждение верно и в случае (II_1). Отметим, что этим исчерпываются случаи, когда оно верно: $\mathfrak{H}$ в любом случае бесконечно, значит $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$, и если $U \in \mathbf{M}$ — частично изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M}$, то $(f;\ Uf = 0) = (0)$, $(f;\ U^*f = 0) = \mathfrak{H} - \mathfrak{M} \neq (0)$.

16.2. Ключом к последующим рассуждениям является такое

Определение 16.2.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное линейное множество в $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{A}$ необязательно замкнуто и необязательно $\eta\mathbf{M}$). Если существует последовательность $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ со следующими свойствами:*

(i) $\mathfrak{M}_i\eta\mathbf{M}$;

(ii) $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}$;

(iii) $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots] = \mathfrak{H}$,

то $\mathfrak{A}$ *называется в существенном плотным.*

Имеет место

Лемма 16.2.1. *Всякое в существенном плотное множество* $\mathfrak{A}$ *является всюду плотным.*

Доказательство. Поскольку все $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ — линейное множество, то $\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots\} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{H}$; $\mathfrak{H} = [\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots] \subset [\mathfrak{A}] \subset \mathfrak{H}$, $[\mathfrak{A}] = \mathfrak{H}$. Так как множество $\mathfrak{A}$ линейно, а $[\mathfrak{A}]$ состоит только из его точек конденсации, $\mathfrak{A}$ всюду плотно.

Лемма 16.2.2. *Если* $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... — *(конечная или бесконечная) последовательность в существенном плотных множеств, то* $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots$ *тоже в существенном плотно.*

Доказательство. Будем предполагать, что последовательность $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ бесконечна, поскольку в противном случае к ней можно добавить бесконечно много членов вида $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{H}$.

Для $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2 \ldots$, образуем последовательности $\mathfrak{M}_{i,1}, \mathfrak{M}_{i,2}, \ldots$ из определения 16.2.1. По лемме 8.3.3 $\lim_{\rho \to \infty} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_{i,\rho}) = D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{M}_{i,1}, \mathfrak{M}_{i,2}, \ldots]) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = 1$, значит, мы можем построить последовательность $\rho_{i,1} < \rho_{i,2} < \ldots$ с $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_{i,\rho_{i,\nu}}) > 1 - (1/2^{i+\nu})$, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}_{i,\rho_{i,\nu}}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) - D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_{i,\rho_{i,\nu}}) < 1/2^{i+\nu}$.

Построим $\overline{\mathfrak{M}}_\nu = \mathfrak{M}_{1,\rho_{1,\nu}} \mathfrak{M}_{2,\rho_{2,\nu}} \ldots$ Ясно, что $\overline{\mathfrak{M}}_\nu$ — замкнутое линейное множество и $\overline{\mathfrak{M}}_\nu \eta \mathbf{M}$. Поскольку $\rho_{i,\nu} < \rho_{i,\nu+1}$, то $\mathfrak{M}_{i,\rho_{i,\nu}} \subset \mathfrak{M}_{i,\rho_{i,\nu+1}}$ и поэтому $\overline{\mathfrak{M}}_\nu \subset \overline{\mathfrak{M}}_{\nu+1}$; а так как $\mathfrak{M}_{i,\rho_{i,\nu}} \subset \mathfrak{A}_i$, то и $\overline{\mathfrak{M}}_\nu \subset \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots$, так что в итоге мы получаем $\overline{\mathfrak{M}}_1 \subset \overline{\mathfrak{M}}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots$ Наконец, мы имеем $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{M}}_\nu) = D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{H} - \mathfrak{M}_{1,\rho_{1,\nu}}, \mathfrak{H} - \mathfrak{M}_{2,\rho_{2,\nu}}, \ldots])$ что согласно лемме 14.2.5 $\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}_{i,\rho_{i,\nu}}) < \sum_{i=1}^{\infty} 1/2^{i+\nu} = 1/2^\nu$, значит, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - [\overline{\mathfrak{M}}_1, \overline{\mathfrak{M}}_2, \ldots]) \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{M}}_\nu) < 1/2^\nu$. Это верно для всех $\nu = 1, 2, \ldots$, так что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - [\overline{\mathfrak{M}}_1, \overline{\mathfrak{M}}_2, \ldots]) = 0$, $\mathfrak{H} - [\overline{\mathfrak{M}}_1, \overline{\mathfrak{M}}_2, \ldots] = (0)$, $[\overline{\mathfrak{M}}_1, \overline{\mathfrak{M}}_2, \ldots] = \mathfrak{H}$.

Таким образом, последовательность $\overline{\mathfrak{M}}_1, \overline{\mathfrak{M}}_2$ удовлетворяет всем условиям определения 16.2.1 для линейного множества $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$, так, что $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots$ в существенном плотно.

Лемма 16.2.3. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *в существенном плотное множество,* X — *линейный замкнутый оператор со всюду плотной областью определения и* $X \eta \mathbf{M}$. *Тогда множество* $(f;\ f \in$ *области определения* X, $Xf \in \mathfrak{A})$ *в существенном плотно.*

Доказательство. Пусть W, B — каноническое разложение X: B — самосопряжен и знакоопределен, а W — частично изометричен, $W \in \mathbf{M}$, $B \eta \mathbf{M}$ и $X = WB$ (см. определение 4.4.1 и лемму 4.4.1).

Пусть $E(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$,— разложение единицы для B. Поскольку B необязательно ограничен, это означает, что $E(\lambda)$ удовлетворяет без изменений условиям (α) —(γ) из определения 15.1.1, а вместо (δ) — (ε) — таким их модификациям:

(δ') если $\lambda \to -\infty$ или $\to \infty$, то $E(\lambda) \to 0$ или соответственно $\to 1$ в смысле сильной сходимости операторов;

(ε') $f \in$ области определения B тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$ конечен, при этом $(Bf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)f, g)$ (см. [15, с. 92]).

(Полу)определенность B означает, что $E(\lambda) = 0$ для $\lambda < 0$ (см. [21, с. 302]). Положим $E(\lambda) = P_{\mathfrak{M}(\lambda)}$.

Поскольку $B\eta\mathbf{M}$, B инвариантен относительно всех унитарных преобразований $U' \in \mathbf{M}'$ и таковы же $E(\lambda)$, поэтому $E(\lambda) \in \mathbf{M}$, $\mathfrak{M}(\lambda)\eta\mathbf{M}$ и $E(\lambda)$, $\mathfrak{M}(\lambda)$, очевидно, приводят B. Если $f \in \mathfrak{M}(\lambda)$, то $E(\lambda)f = f$, так что

$$E(\lambda')f = \begin{cases} f & \text{при } \lambda' \geqslant \lambda, \\ 0 & \text{при } \lambda' < 0. \end{cases}$$

Поэтому (δ') показывает, что определен вектор Bf, а (ε') — что $0 \leqslant (Bf, f) \leqslant \lambda\|f\|^2$. Таким образом, часть B, лежащая в $\mathfrak{M}(\lambda)$, ограничена и определена всюду (в $\mathfrak{M}(\lambda)$) или $BE(\lambda)$ ограничен и определен всюду (в $\mathfrak{H}$).

Мы знаем, что $\mathfrak{M}(1) \subset \mathfrak{M}(2) \subset \ldots$, и так как $\lim_{i\to\infty} E(i) = 1$, мы имеем $[\mathfrak{M}(1), \mathfrak{M}(2), \ldots] = \mathfrak{H}$. Поэтому согласно лемме 8.3.3

$$\lim_{i\to\infty} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}(i)) = \lim_{i\to\infty} (D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) - D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}(i))) = 0.$$

Выберем далее для $\mathfrak{A}$ последовательность $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ из определения 16.2.1 Тогда $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}$, $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots] = \mathfrak{H}$, значит, как и выше $\lim_{i\to\infty} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}_i) = 0$.

Построим теперь множество $\mathfrak{M}^{(i)} = (f; f \in \mathfrak{M}(i), WB(i)f \in \mathfrak{M}_i)$. Так как $BE(i)$ всюду определен и ограничен, то $\mathfrak{M}^{(i)}$ линейно и замкнуто. Поскольку из $f \in \mathfrak{M}(i)$ следует, что $WBE(i)f = WBf = Xf$, мы имеем $\mathfrak{M}^{(i)} \subset (f, f \in$ области определения X, $Xf \in \mathfrak{M}_i) \subset (f, f \in$ области определения X, $Xf \subset \mathfrak{A})$. Наконец, $f \in \mathfrak{M}(i)$ влечет за собой $f \in \mathfrak{M}(i+1)$, $E(i+1)f = E(i)f$, и поэтому $\mathfrak{M}^{(i)} \subset \mathfrak{M}^{(i+1)}$. Таким образом, мы имеем $\mathfrak{M}^{(1)} \subset \mathfrak{M}^{(2)} \subset \ldots \subset (f; f \in$ области определения X, $Xf \in \mathfrak{A})$.

Определение $\mathfrak{M}^{(i)}$ делает очевидной инвариантность их относительно всех унитарных преобразований $U' \in \mathbf{M}'$, так что $\mathfrak{M}^{(i)}\eta\mathbf{M}$.

Теперь $\mathfrak{M}^{(i)} = (f, f \in \mathfrak{M}(i), \quad WBE(i)f \in \mathfrak{M}_i) = \mathfrak{M}(i) \cdot (f; \quad WBE(i)f \in \mathfrak{M}_i) = \mathfrak{M}(i)\ (f;\ P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} WBE(i)f = 0)$. По лемме 16.1.1

$$D_{\mathbf{M}}((f;\ P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} WBE(i)f = 0)) = D_{\mathbf{M}}((f;\ (P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} WBE(i))^* f = 0)) =$$
$$= D_{\mathbf{M}}((f;\ (BE(i))^* W^* P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} f = 0))$$

и

$$(f;\ (BE(i))^* W^* P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} f = 0) \supset (f;\ P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} f = 0) = \mathfrak{M}_i.$$

Таким образом,

$$D_{\mathbf{M}}((f;\ P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} WBE(i)f = 0)) \geqslant D(\mathfrak{M}_i),$$

$$D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - (f;\ P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} WBE(i) f = 0)) \leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}_i).$$

Теперь, используя лемму 14.2.3 или 14.2.5, мы получаем

$$D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}^{(i)}) = D_{\mathbf{M}}([\mathfrak{H} - \mathfrak{M}(i),\ \mathfrak{H} - (f;\ P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} WBE(i) f = 0)]) \leqslant$$
$$\leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}(i)) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - (f;\ P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_i} WBE(i) f = 0)) \leqslant$$
$$\leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}(i)) + D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}_i).$$

При этом

$$\lim_{i\to\infty} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}(i)) = 0, \qquad \lim_{i\to\infty} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}_i) = 0$$

дают

$$\lim_{i\to\infty}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}^{(i)}) = 0.$$

Согласно лемме 8.3.4

$$D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - [\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots]) = D_{\mathbf{M}}((\mathfrak{H} - \mathfrak{M}^{(1)})(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}^{(2)})(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}^{(3)}) \ldots) =$$
$$= \lim_{i\to\infty} D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{M}^{(i)}) = 0,$$

$$\mathfrak{H} - [\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots] = (0), \qquad [\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots] = \mathfrak{H}.$$

Итак, $\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots$ удовлетворяют условиям (i)—(iii) определения 16.2.1 для $(f;\ f \in$ области определения $X,\ Xf \in \mathfrak{A})$. Значит, это множество в существенном плотно, что и требовалось доказать.

Полагая $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}$, мы видим, что область определения сама по себе в существенном плотна. Это, конечно, можно было бы без труда доказать и непосредственно.

Рассуждения этого пункта являются некими вариантами обобщения понятия относительной размерности (которая ранее была определена для замкнутых линейных множеств $\eta\mathbf{M}$) на все линейные множества. В результате получается теория, весьма сходная с теорией внутренней меры Лебега. Здесь мы не вдаемся в детали этого предмета, а рассмотрим его в последующих статьях.

16.3. Леммы 16.2.1 и 16.2.3 имеют интересные приложения к неограниченным операторам.

Определение 16.3.1. *Пусть x_1, y_1, x_2, y_2 — (конечная или бесконечная) последовательность символических переменных. Под (некоммутативным) мономом мы подразумеваем выражение вида $z_1 \ldots z_n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, а каждое z_ν равно какому-либо из x_i или y_i. Для случая $n = 0$ используем символ 1. Порядок, в котором расположены в мономе сомножители $z_1, \ldots, z_n$, существен; число n— степень монома. Под (некоммутативным) полиномом мы понимаем конечную линейную комбинацию некоммутативных мономов, т. е. выражение вида*

$$p(x_1, y_1, \ldots) = \sum_1^p a_\rho z_1^{(\rho)} \ldots z_{m_\rho}^{(\rho)},$$

где $p = 0, 1, 2, \ldots, a_1, \ldots, a_p$— комплексные числа; каждое $z_\nu^{(\rho)}$ суть какое-либо из x_i или y_i. Если $p = 0$, мы используем символ 0. Мономиальные члены вида $0 \cdot z_1 \ldots$ $\ldots z_n$ не могут быть опущены, но два члена $a \cdot z_1 \ldots z_n$ и $b \cdot z_1 \ldots z_n$ могут быть сложены в один, причем порядок аддитивных членов роли не играет. Мы рассматриваем

мономы как частный случай полиномов. Если

$$p(x_1, y_1, \ldots) = \sum_1^p a_\rho z_1^{(\rho)} \ldots z_{n_\rho}^{(\rho)}$$

— полином, то $^{(r)}p(x_1, y_1, \ldots)$ *— редукция полинома* $p(x_1, y_1, \ldots)$ *— получается из последнего опусканием всех слагаемых с* $a_\rho = 0$ (*т. е. членов вида* $0 \cdot z_1 \ldots z_n$). *Если* $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, $q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ *— два полинома, то*

$$ap(x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots),\ p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) + q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots),$$

$$p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \cdot q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$$

получаются почленным применением указанных операций, но без редуцирования (*если, конечно, процесс* $^{(r)}$ *явно не указан*).

Символ $^+$ *определяется последовательно следующим образом:* $x_i^+ = y_i$, $y_i^+ = x_i$, $(z_1 \ldots z_n)^+ = z_n^+ \ldots z_1^+$;

$$\left(\sum_1^p a_\rho \left(z_1^{(\rho)} \ldots z_{n_\rho}^{(\rho)}\right)\right)^+ = \sum_1^p \bar{a}_\rho \left(z_1^{(\rho)} \ldots z_{n_\rho}^{(\rho)}\right)^+.$$

Очевидно, $(^{(r)}p(x_1, y_1, \ldots))^+ = {}^{(r)}(p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)^+)$.

Определение 16.3.2. *Пусть* $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ *— (конечная или бесконечная) последовательность символических переменных;* $X_1, X_2, \ldots$ *— соответствующая последовательность линейных замкнутых операторов, имеющих всюду плотные области определения, причем каждой паре переменных* $x_i y_i$ *соответствует один оператор* X_i. *Если* $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) = \sum_1^p a_\rho z_1^{(\rho)} \ldots z_{n_\rho}^{(\rho)}$ *— полином, мы будем понимать под* $p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)$ *оператор, возникающий при замене в* $\sum_{\rho=1}^p a_\rho z_1^{(\rho)} \ldots z_{n_\rho}^{(\rho)}$ *каждого* x_i *на* X_i, *а каждого* y_i *— на* X_i^*. *Область определения и область значений* $p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)$ *должны здесь определяться при помощи следующих правил* (*см.* [18, с. 404]):

$0 \cdot f$ *и* $1 \cdot f$ *определены всюду и имеют значения* 0 *и* f *соответственно;*

$(aX)f$ *определен, если и только если определен* Xf (*даже в случае* $a = 0$), *а его значение равно* $a(Xf)$; $(X + Y)f$ *определен, если и только если определены* Xf *и* Yf, *а его значение равно* $Xf + Yf$; $(XY)f$ *определен, если и только если определены* Yf *и* $X(Yf)$, *его значение равно* $X(Yf)$.

Переменные x_i, y_i и соответствующие им операторы X_i, X_i^*, которые не присутствуют в выражении $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) = \sum_1^p a_\rho z_1^{(\rho)} \ldots z_{n_\rho}^{(\rho)}$, могут быть опущены в $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ и $p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)$ соответственно. (Таким образом, мы можем писать $p(x_1)$ вместо $p(x_1, y_1) = x_1$, но не для $p(x_1, y_1) = x_1 + 0 \cdot y_1$.) $p(X_1, X_1^*, \ldots)$ и $^{(r)}p(X_1, X_1^*, \ldots)$, вообще говоря, не тождественны. Поэтому если $p(x_1) = 0 \cdot x_1$, $^{(r)}p(x_1) = 0$, то $p(X_1) = 0 \cdot X_1$, а $^{(r)}p(X_1) = 0$, но они различаются, ибо имеют разные области определения в случае, когда X_1 определен не всюду.

В этом конкретном случае, однако, мы можем получить равенство, образуя замыкание [ ] всех рассматриваемых операторов (см. [16, с. 70—71], где ~ используется для обозначения замыкания): поскольку X_1 имеет всюду плотную область определения, то $[0 \cdot X_1] = 0$ и $[p(X_1)] = [{}^{(r)}p(X_1)]$. В общем случае, одна-

ко, эта процедура не проходит: положим $p(x_1, x_2) = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2$, ${}^{(r)}p(x_1, x_2) = 0$ и выберем в качестве X_1 и X_2 такие два оператора, что (область определения X_1)·(область определения X_2) = (0) (см. [17, с. 230]) Тогда область определения $p(X_1, X_2) = (0)$, а значение там, конечно, равно 0. Следовательно, то же самое верно и для $[p(X_1, X_2)]$, в то время как ${}^{(r)}p(X_1, X_2) = 0$, $[{}^{(r)}p(X_1, X_2)] = 0$. Таким образом, область определения $[p(X_1, X_2)] = (0)$, в то время как область определения $[{}^{(r)}p(X_1, X_2)]$ равна $\mathfrak{H}$, так что эти операторы отличны один от другого.

Следующей патологической ситуацией является случай, когда $(X_1\cdot X_2)^*$ не равно $X_2^*\cdot X_1^*$. На самом деле может случиться так, что $X_1\cdot X_2$ вообще не имеет замыкания, а значит, и сопряженного оператора со всюду плотной областью определения (см. [21, с. 296 и 300]; наше утверждение означает, что $X_1\cdot X_2$ не является **-оператором, см. там же); или может оказаться, что $(X_1\cdot X_2)^*$ существует и является собственным расширением $X_2^*\cdot X_1^*$. Пока что мы не будем углубляться в тонкости этого вопроса.

Для $X_1, X_2, \ldots \eta\mathbf{M}$, где $\mathbf{M}$ — фактор одного из конечных типов ((I_n), $n = 1, 2, \ldots$, или (II_1)), как мы уже видели, ничего подобного не может произойти, и алгебра $[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$ работает превосходным образом. Это является главным результатом следующих рассмотрений. Для случаев (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, все эти вещи очевидны (там даже [ ] излишне, так как любой линейный оператор замкнут), и наши результаты по сути сводятся к тому, что в случае (II_1) дела обстоят таким же образом. При этом обычно изучаемый случай (I_∞) (который включает в себя $\mathbf{M} = \mathbf{B}$ для гильбертова пространства $\mathfrak{H}$) в высшей степени патологичен в этом отношении, а подходящим обобщением (I_n) оказывается (II_1).

16.4. Сначала докажем две леммы, которые и сами по себе представляют определенный интерес. В частности, первая утверждает, что «спектральная проблема» (существование «разложения единицы» для любого линейного замкнутого эрмитова оператора $X\eta\mathbf{M}$) всегда имеет решение (ср. [16, с. 92]; обратите внимание на контраст со случаем (I_∞)).

Лемма 16.4.1. *Любой линейный замкнутый эрмитов оператор* $X\eta\mathbf{M}$ *максимален и самосопряжен* (*см.* [16, с. 88]).

Доказательство. Пусть U — преобразование Кэли оператора X, а $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}$ — связанные с ним замкнутые линейные множества (см. [16, с. 80]). Тогда $U, \mathfrak{G}, \mathfrak{F}, E = P_{\mathfrak{G}}$ вместе с X инвариантны относительно любого унитарного $U' \in \mathbf{M}'$, так что все они $\eta\mathbf{M}$. Поэтому $UE\eta\mathbf{M}$ и, очевидно, является частично изометрическим оператором с начальным $\mathfrak{G}$ и конечным $\mathfrak{F}$ множествами, так что UE ограничен, а потому $UE \in \mathbf{M}$. Подобным же образом $E \in \mathbf{M}$.

Мы знаем, что $[\mathrm{Range}\,(U - 1)] = \mathfrak{H}$, и, поскольку Uf определен только при $f \in \mathfrak{G}$, можно равным образом написать $[\mathrm{Range}\,(UE - E)] = \mathfrak{H}$. Теперь $UE - E = (UE - E)E$, $(UE - E)^* = E(UE - E)^*$, так что $[\mathrm{Range}\,(UE - E)^*] \subset \subset \mathrm{Range}\,E] = \mathfrak{G}$. Таким образом, согласно лемме 6.2.1 $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{G}) \geqslant D_{\mathbf{M}}([\mathrm{Range}\,(UE - E)^*]) = D_{\mathbf{M}}([\mathrm{Range}\,(UE - E)]) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = 1$. Рассматривая свойства частично изометрического оператора UE, мы имеем далее $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{G}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{F})$. Поэтому $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H} - \mathfrak{G}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{G} - \mathfrak{F}) \leqslant 0$, т. е. равно 0, и тем самым $\mathfrak{H} - \mathfrak{G} = \mathfrak{H} - \mathfrak{F} = (0)$. Таким образом, X максимален и согласно [16, с. 88] самосопряжен.

Лемма 16.4.2. *Пусть X, Y — линейные замкнутые операторы со всюду плотными областями определения X, $Y\eta\mathbf{M}$. Если Y является расширением X (т. е. если только определен Xf, то определен и Yf, причем $Yf = Xf$, см.* [15, с. 70]), *то $X = Y$.*

Доказательство. Пусть W, B — каноническое разложение $Y : B$ самосопряжен и (полу)определен, W частично изометричен, $W\eta\mathbf{M}$, $B\eta\mathbf{M}$ и $Y = WB$ (см. определение 4.4.1 и лемму 4.4.1). В то же время $B = W^*Y$ (см. [21, с. 306]), так что $Y = WW^*Y$, а поскольку Y — продолжение X, то $X = WW^*X$.

Оператор $W^*Y = B$ самосопряжен, а значит, эрмитов, как и W^*X, кроме того, он линеен, замкнут и имеет всюду плотную область определения вместе с X. Поскольку $W^*X\eta\mathbf{M}$, применение леммы 16.4.1 дает максимальность W^*X. Но W^*Y является эрмитовым продолжением W^*X, так что $W^*X = W^*Y$, $WW^*X = WW^*Y$, $X = Y$. Доказательство закончено.

Теперь мы переходим к обсуждению (некоммутативных) полиномов от операторов.

Лемма 16.4.3. *Пусть X_1, X_2, ...— (конечная или бесконечная) последовательность линейных замкнутых операторов, каждый из которых имеет всюду плотную область определения. Предположим, что все $X_i\eta\mathbf{M}$. Пусть $\mathfrak{DP} = \mathfrak{DP}(X_1, X_2, \ldots)$ — общая часть областей определения операторов $p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)$, где $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ пробегает все (некоммутативные) полиномы от $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ Тогда $\mathfrak{DP}$ в существенном плотно и всюду плотно.*

Доказательство. Благодаря лемме 16.2.1 нам достаточно доказать лишь существенную плотность. Более того, достаточно, чтобы $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ пробегало только все мономы. Их можно занумеровать, скажем $p^{(\sigma)}(x_1, y_1, \ldots)$, $\sigma = 1, 2, \ldots$, так, что $\mathfrak{DP} = \Pi_{\sigma=1}^{\infty}$(область определения $p^{(\sigma)}(x_1, y_1, \ldots)$). Согласно лемме 16.2.2 нам достаточно доказать, что область определения каждого $p^{(\sigma)}(x_1, y_1, \ldots)$ в существенном плотна. Иными словами, что для каждого монома $p(x_1, y_1, \ldots) = z_1 \ldots z_n$ (см. определение 16.3.1). Область определения $p(X_1, X_1^*, \ldots)$ в существенном плотна.

Мы докажем это индукцией по степени n. Для $n = 0$ соответствующий оператор равен 1, его область определения равна $\mathfrak{H}$, и наше утверждение очевидно. Предположим, что оно уже доказано для $n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим n. Пусть $p(x_1, y_1, \ldots) = z_1 \ldots z_n$ — моном степени n. Положим $q(x_1, y_1, \ldots) = z_1 \ldots z_{n-1}$ и $p(X_1, X_1^*, \ldots) = A$, $q(X_1 X_1^*, \ldots) = B$. Если z_n —переменная x_i или y_i, положим $Y = X_i$ или X_i^* соответственно. Тогда $A = BY$, так что область определения $A \subset (f;\ f \in$ области определения Y, $Yf \in$ области определения B). Область определения B согласно нашему индуктивному предположению в существенном плотна (степень $q(x_1, y_1, \ldots) = z_1 \ldots z_{n-1}$ равна $n - 1$), Y линеен, замкнут и имеет всюду плотную область определения (для X_i это предполагается, а для X_i^* следует из [21, с. 301]). Поэтому применима лемма 16.2.3 и область определения A тоже в существенном плотна. Таким образом, доказательство закончено.

Лемма 16.4.4 *Пусть X_1, X_2, ... — (конечная или бесконечная) последовательность линейных замкнутых операторов, каждый из которых имеет всюду плотную область определения. Предположим, что все $X_i\eta\mathbf{M}$. Пусть $p(x_1, y_1,$*

$x_2, y_2, \ldots)$, $q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, $r(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ — (*некоммутативные*) *полиномы от символических переменных* x_i, y_i, *соответствующих* X_i, $i = 1, 2, \ldots$

Тогда:

(i) $[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$ *определен, линеен, замкнут, имеет всюду плотную область определения, а также* $\eta\mathbf{M}$;

(ii) *если* ${}^{(r)}p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) = {}^{(r)}q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, *то* $[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)] = [q(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$, *т. е.* $[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$ *зависит только от* ${}^{(r)}p(x_1, y_1, {}_2, y_2, \ldots)$;

(iii) *если* $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)^+ = q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, *то* $[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]^* = [q(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$;

(iv) *если* $ap(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) = q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, *то* $[a[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]] = [q(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$ (*если* $a \neq 0$, *то первые скобки* [ ], *очевидно, не нужны*);

(v) *если* $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) + q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) = r(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, *то* $[[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)] + [q(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]] = [r(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$;

(vi) *если* $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \cdot q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) = r(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$,

то $[[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)] \cdot [q(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]] = [r(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$.

Доказательство. Утверждение (i): $p(X_1, X_1^*, \ldots)$ и $p(X_1, X_1^*, \ldots)^+$ согласно лемме 16.4.3 имеют всюду плотные области определения. Легко проверить, что $(p(X_1, X_1^*, \ldots) f, g) = (f, p(X_1, X_1^*, \ldots)^+ g)$ для всех $f \in$ области определения $p(X_1, X_1^*, \ldots)$, $g \in$ области определения $(p(X_1, X_1^*, \ldots)^+$, так что $(p(X_1, X_1^*, \ldots))^*$ является расширением $p(X_1, X_1^*, \ldots)^+$. Поэтому $p(X_1, X_1^*, \ldots))$ имеет всюду плотную область определения, тем самым можно определить $[p(X_1, X_1^*, \ldots)]$ (см. [21, с. 300]). Оператор $[p(X_1, X_1^*, \ldots)]$ инвариантен относительно любого унитарного преобразования $U' \in \mathbf{M}'$ вместе с $X_1, X_2, \ldots$, так что он $\eta\mathbf{M}$.

Утверждение (ii): ${}^{(r)}p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)$, очевидно, является расширением $p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)$, так что $[{}^{(r)}p(X_1, X_1^*, \ldots)]$ — расширение $[p(X_1, X_1^*, \ldots)]$. Согласно (i) оба оператора линейны, замкнуты, имеют всюду плотные области определения и $\eta\mathbf{M}$. Из леммы 16.4.2 тогда следует, что $[{}^{(r)}p(X_1, X_1^*, \ldots)] = [p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$. Применяя это к $p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ и $q(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$, получим утверждение (ii).

Утверждение (iii): как мы видели при доказательстве (i), $(p(X_1, X_1^*, \ldots))^*$ является расширением $p(X_1, X_1^*, \ldots)^+$, т. е. $q(X_1, X_1^*, \ldots)$. Первый оператор, очевидно, равен $[p(X_1, X_1^*, \ldots)]^*$, а потому замкнут, линеен и даже должен быть расширением $[q(X_1, X_1^*, \ldots)]^*$. Поскольку оба они являются линейными замкнутыми операторами со всюду плотными областями определения, снова можно применить лемму 16.4.2, из которой следует, что они должны совпадать.

Утверждения (iv)—(vi): все эти утверждения доказываются совершенно аналогичным образом, поэтому достаточно провести доказательство одного из них, скажем, (vi).

Ясно, что $[[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)] \cdot [q(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]]$ является расширением $[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)] \cdot [q(X_1, X_1^*, X_2, X_2^* \ldots)]$, который, в свою очередь, является расширением $p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^* \ldots)\, q(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots) = r(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)$. Первый из упомянутых операторов линеен, замкнут, а потому является также расширением $[r(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$. Теперь из леммы 16.4.2 мы можем легко заключить, что

$$[[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)] \cdot [q(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]] = [r(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)],$$

завершив тем самым доказательство.

Конечно, для $a = 0$ (iv) тривиально и без [ ].

Сформулируем еще раз результаты этого пункта.

Теорема XV. *Пусть* **M** — *фактор конечного типа* $((\mathrm{I}_n),\ n = 1, 2, \ldots,$ *или* $(\mathrm{II}_1))$. *Обозначим через* $U(\mathbf{M})$ *множество всех тех линейных замкнутых операторов, имеющих всюду плотную область определения, которые* $\eta\mathbf{M}$. *Тогда для* $X, Y \in U(\mathbf{M})$ *операторы* $[aX]$ (*совпадающий с* aX *при* $a \neq 0$), $[X + Y]$, $[XY]$ *определены и тоже* $\in U(\mathbf{M})$. *Эти операторы удовлетворяют обычным законам алгебры матриц*:

$$[X + Y] = [Y + X],\quad [[X + Y] + Z] = [X + [Y + Z]];$$

$$[a[X + Y]] = [a[X] + a[Y]],\quad [(a + b)X] = [aX + bX];$$

$$[[XY]Z] = [X[YZ]],\quad [[aX]Y] = [a[XY]],\quad [a[bX]] = [(ab)X];$$

$$[[X + Y]Z] = [[XZ] + [YZ]],\quad [X[Y + Z]] = [[XY] + [XZ]];$$

$$[aX]^* = [aX^*],\qquad [X + Y]^* = [X^* + Y^*],\qquad [XY]^* = [Y^*X^*].$$

Вообще (*некоммутативные*) *полиномы* $[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$ (*см. определения* 16.3,1 *и* 16.3.2) *всегда* $\in U(\mathbf{M})$; $[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$ *зависит только от приведенной формы* ${}^{(r)}p(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ *и для* $[p(X_1, X_1^*, X_2, X_2^*, \ldots)]$ *справедливы законы алгебры матриц* (*см. лемму* 16.4.4, (iii) — (vi)).

Каждый эрмитов $X \in U(\mathbf{M})$ *максимален и самосопряжен, а потому обладает единственным разложением единицы.*

Для $X, Y \in U(\mathbf{M})$, *если только* Y *является расширением* X (*см.* [15, с. 70)], *то* $Y = X$; *иначе говоря, в* $U(\mathbf{M})$ *не существует собственных расширений.*

Добавления при корректуре, 29 января 1937 г. За истекшее время авторам удалось доказать следующие новые факты, относящиеся к конечным случаям:

(i) $T_{\mathbf{M}}(A + B) = T_{\mathbf{M}}(A) + T_{\mathbf{M}}(B)$ без всяких ограничений (см. проблему 11);

(ii) $T_{\mathbf{M}}(A)$ слабо непрерывен по A (ср. лемму 15.5.5);

(iii) если $C = 1$, то существует f, для которого тождественно $T'_{\mathbf{M}}(A) = (Af, f)$;

(iv) в этом случае имеются некоторые изоморфизмы между **M**, **M′** и $\mathfrak{H}$.

(v) некоторые из примеров случая (II), а именно (α)—(γ), на с. 105 пространственно изоморфны. (Это отвечает на вопрос в конце п. 13.4.) Доказательства будут опубликованы в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА *

1. *Birkhoff G.* On combinations of sub-algebras.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1933, vol. 29, p. 441—464.
2. *Bochner S.* Integration einer Funktion deren Werte elemente eines Vektorraumes sind.— Fund. math., 1933, t. 20, s. 262—276.
3. *Burnside W.* On the condition of reducibility of any group of linear substitutions.— Proc. London Math. Soc., 1905, vol. 3, p. 430—440.
4. *Carathéodory C.* Vorlesungen über reele Funktionen. Leipzig; Berlin: Teubner, 1918, 1927.
5. *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik. B.: Springer, 1931.
6. *Dirac P. A. M.* The principles of the quantum mechanics. Oxford: Clarendon press, 1930.
7. *Friedrichs K.* Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren.— Math. Ann., 1934, Bd. 109, S. 465—487.
8. *Frobenius G., Schur I.* Über die Äquivalenz der Gruppen Linearen Substitutionen.— Berlin. Ber., 1906, S. 209—217.
9. *Klein F.* Abstrakte Verknüpfungen.— Math. Ann., 1931, Bd. 105, S. 308—329.
10. *Lebesgue H.* Leçons sur l'integration et la recherche des functions primitives. P.: Gauthier-Villars, 1904, 1928.
11. *Löwig H.* Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionzahl.— Acta Szeged, 1934, k. 7, old. 1—33.
12. *Murray F. J.* A theory for x-operators analogous on the theory of reducibility for self-adjoined transformations in Hilbert space.— Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1933, vol. 19, p. 1057—1058.

12a. *Ore O.* On the foundation of abstract algebra.— Ann. Math., 1935, vol. 36, p. 406—437.

13. *Rellich F.* Spectral theorie in nichtseparablen Raumen.— Math. Ann., 1935, Bd. 110, S. 342—356.

13a. *Reisz F.* Zur Theorie des Hilbertschen Räumes.— Acta Szeged, 1934, k. 7, old.34—38.

14. *Schur I.* Neue Bergründung der Theorie der Gruppencharaktere.— Sitzungber. Preuss. Akad., Kl. Phys. Math., 1905, S. 406—432.
15. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space.— Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1932, vol. 15.
16. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.—Math. Ann., 1929, Bd. 102, N 1, S. 49—131.
17. *Neumann J. von.* Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen.— J. Math., 1929, Bd. 161, S. 208—236.
18. *Neumann J. von.* Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, N 3, S. 370—427.
19. *Neumann J. von.* Über Funktionen von Funktionaloperatoren. — Ann. Math., 1931, vol. 32, p. 191—226.
20. *Neumann J. von.* Mathematische Begründung der Quantenmechanik. B. : Springer, 1931.
21. *Neumann J. von.* Über adjungierte Funktionaloperatoren.— Ann. Math., 1932, vol. 33, p. 294—310.
22. *Neumann J. von.* On a certain topology for rings of operators.— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 111—115.

* Ссылки в тексте на работы [4, 10] даются по первому году издания.

О КОЛЬЦАХ ОПЕРАТОРОВ II*

ВВЕДЕНИЕ

Эта статья является продолжением нашей статьи «О кольцах операторов» (см. наст. кн.). Она содержит решение некоторых проблем, остававшихся там открытыми. Мы докажем общую аддитивность следа $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$, его слабую непрерывность и некоторые изоморфизмы между $\mathfrak{H}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ (см. замечания (i)—(iv) в конце цитированной выше статьи). Все эти исследования относятся к «случаю (II)» для $\mathbf{M}$ (см. теорему VIII там же).

Свойства $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ устанавливаются при помощи полученного для него представления

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = \sum_{i=1}^{m} (Ag_i, g_i)$$

(с фиксированным конечным $m = 1, 2, \ldots$ и фиксированными $g_1, \ldots, g_m \in \mathfrak{H}$). Это представление замечательно тем, что, очевидно, является близким аналогом представления $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ как следа, т. е. среднего арифметического диагональных матричных элементов A в случаях (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, когда $\mathbf{M}$ по существу является полным кольцом матриц n-(конечно)мерного евклидова пространства.

В некоторых случаях (с помощью которых затем разбираются остальные) мы получаем даже $m = 1$.

В части I упомянутое выше представление $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ получается приближенно. Читатель, интересующийся техникой, может найти небезынтересным замечание, что метод исчерпывания, который мы там используем (см. п. 1.2 и 1.3), аналогичен некоторым процедурам, которые с успехом применяются в теории меры и интегрирования. На этой основе мы устанавливаем основные свойства $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ в части II, а затем получаем точное представление $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}'}(A)$ в части III. Решающую роль здесь играют две проблемы максимума, называемые (A) и (B), которые представляют и независимый интерес.

Часть IV посвящена установлению изоморфизма между $\mathfrak{H}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$. Оказывается, что некоторое алгебро-топологическое расширение $Q(\mathbf{M})$ фактора $\mathbf{M}$ изоморфно $\mathfrak{H}$, причем $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ играют в нем роль правого и левого умножения. Это ведет к интересному и совершенно новому виду гиперкомплексных систем, которые в то же время являются гильбертовыми пространствами. Следующая статья будет посвящена их независимому изучению.

В приложении рассматривается возможность обращения с $\mathbf{M}$ (в случае (II_1)) как с системой матриц с непрерывными строками и столбцами.

Повсюду в этой статье мы будем использовать определения, обозначения и результаты нашей статьи «О кольцах операторов», упомянутой выше. При необходимости мы будем цитировать ее как К. О. Все остальные ссылки соответствуют библиографии К. О. (см. ссылки [1—22] к предыдущей статье).

---

* Amer. Math. Soc. Trans., 1937, vol. 41, p. 208—248.

Проблемы, связанные с изоморфизмом разных колец **M** типа (II_1) (см. замечание (v) в конце К. О.), здесь не обсуждаются. Им будет посвящена следующая публикация.

Со времени появления К. О. второй из авторов нашел новое представление для случая (II_1) в терминах бесконечных прямых произведений, что проливает новый свет на (II_1) как на предельный случай (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, и указывает путь для приложения нашей теории к квантовой механике. Эти вопросы также будут обсуждены в статьях, которые вскоре последуют.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.

Глава I. Приближенная форма для $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ (при $\alpha \geqslant 1$).

1.1. Нормировка.

1.2. Понятия $E \gg \lambda$, $E \ll \lambda$ и $E \gg {}_p\lambda$, $E \ll {}_p\lambda$.

1.3. Выбор приблизительно однородной части.

1.3. Свойства такой части.

1.5. Расширение приблизительно однородной части.

1.6. Свойства расширения.

1.7. Формулировка результатов. Теорема I.

Глава II. Непосредственные следствия.

2.1. Аддитивность и ограниченная слабая непрерывность $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$. Свойства I, II.

2.2. Определение $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ для всех (не обязательно эрмитовых) $A \in \mathbf{M}$. Единственность. Свойства III, IV.

Глава III. Точное выражение для $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ (при $\alpha \gg 1$).

3.1. Спектральная форма $\int_0^1 \varphi(\lambda)\, dE(\lambda)$ с $D_{\mathbf{M}}(E(\lambda)) = \lambda$.

3.2. Проблемы максимума (A) и (B).

3.3. Приводимость $g \in \mathfrak{H}$ посредством $E \in \mathbf{M}$.

3.4. Разложение g из теоремы I.

3.5. Построение точного g для $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$. Устранение условия $\alpha \gg 1$. Неограниченная слабая непрерывность $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$. Теоремы II, III, IV

Глава IV. Изоморфизм **M**, **M′** и $\mathfrak{H}$ (при $\alpha = 1$).

4.1. Установление изоморфизма $\mathfrak{H}$ и $Q(M)$ при помощи u. d. I.

4.2. Соответствия между $\mathfrak{H}$, $Q(\mathbf{M})$ и $Q(\mathbf{M}')$. Критерии u. d.. Эквивалентность u. d. для **M** и для **M′**. Поведение этих соответствий при изоморфизмах. Теоремы V, VI.

4.3. Исследование Q **M**), $Q(\mathbf{M}')$; $Q(\mathbf{M})$, $Q(\mathbf{M}')$ как гильбертовы пространства. Теоремы VII, VIII, IX.

4.4. Алгебраические свойства $Q(\mathbf{M})$. Значение **M**, **M′**. Свойства I^0, II^0, III^0, IV^0 V^0 Теорема X.

4.5. Алгебраический изоморфизм как следствие пространственного изоморфизма колец. Теорема XI.

4.6. Описание дальнейших результатов.

Приложение. Матричный аспект кольца **M** типа (II_1).

Глава I

ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМА ДЛЯ $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ (ПРИ $\alpha \geqslant 1$)

1.1. Пусть нам задан фактор **M** типа II_1. Нормируем $D_{\mathbf{M}}$ и $D_{\mathbf{M}'}$ так, чтобы $C = 1$ (см. К. О., с. 179—182)*. Это означает (см. К. О., там же), что для любого $f \in \mathfrak{H}$ $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}) = D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}})$ и что множеством значений $D_{\mathbf{M}}$ является интервал $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть множество значений $D_{\mathbf{M}'}$ совпадает с интервалом $0 \leqslant \leqslant x \leqslant \alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$. В этой части мы предполагаем, что $\alpha \geqslant 1$.

Согласно теореме X из К. О. **M′** является фактором типа II_1 или II_∞. В первом случае множество значений $D_{\mathbf{M}'}$ после нормировки (см. там же) совпадает с интервалом $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $C = 1/\alpha$ (так как $D_{\mathbf{M}'}$ в $1/\alpha$ раз больше его значения в предыдущем абзаце). Поскольку $C \leqslant 1$ в обоих случаях, как это следует из рассуждений на с. 182 К. О., мы имеем $\Delta_0 = \Delta$. Согласно определению 10.1.1 из К. О. отсюда следует существование такого вектора f, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}) = 1$. Поскольку мы можем перейти от нормировки этого абзаца к нормировке предыдущего путем умножения $D_{\mathbf{M}'}$ на α, оставляя неизменным $D_{\mathbf{M}}$, мы видим, что это выполнено даже в исходной нормировке.

Итак, у нас имеется такой вектор f, что $D_{\mathbf{M}}(E_f^{\mathbf{M}'}) = 1 = D_{\mathbf{M}}(1)$ или $D_{\mathbf{M}}(1 - E_f^{\mathbf{M}'}) = 0$, откуда следует, что $1 - E_f^{\mathbf{M}'} = 0$, т. е. $E_f^{\mathbf{M}'} = 1$. В последующих рассуждениях мы будем предполагать, что такой вектор f раз и навсегда выбран и зафиксирован.

1.2. По отношению к этому фиксированному f мы теперь определим некоторые отношения, касающиеся проекторов $E \in \mathbf{M}$.

Определение 1.2.1. *Пусть $E \neq 0$ — проектор, $\in \mathbf{M}$, а θ — вещественное число $\geqslant 0$. Говорят, что выполнено отношение $E > \theta$ ($E \geqslant \theta$, $E < \theta$, $E \leqslant \theta$), если $(Ef, f) > \theta D_{\mathbf{M}}(E)$ ($(Ef, f) \geqslant \theta D_{\mathbf{M}}(E)$, $(Ef, f) < D_{\mathbf{M}}(E)$, $(Ef, f) \leqslant \leqslant \theta D_{\mathbf{M}}(E)$ соответственно).*

Говорят, что для проектора $E \neq 0$ выполнено соотношение $E \geqslant_p \lambda$ ($E \leqslant_p \lambda$), если для любого $F \in \mathbf{M}$, такого, что $F \leqslant E$, $F \neq 0$, имеет место $F \geqslant \lambda$ ($F \leqslant \lambda$).

Лемма 1.2.1. *Пусть $\{E_i\}$ — последовательность проекторов (конечная или бесконечная) с $E_i \in \mathbf{M}$, $E_i E_j = \delta_j^i E_i$. Тогда если для всех i $E_i \leqslant \lambda$ ($E_i \geqslant \lambda$) и для какого-нибудь i, скажем i_0, $E_{i_0} < \lambda$ ($E_{i_0} > \lambda$), то мы имеем $\Sigma_i E_i < \lambda$ ($\Sigma_i E_i > \lambda$).*

Поскольку для каждого i $\lambda D(E_i) \leqslant (E_i f, f)$, то $\lambda \Sigma_{i \neq i_0} D(E_i) \leqslant \Sigma_{i \neq i_0}(E_i f, f)$ и $\lambda D(E_{i_0}) < (E_{i_0} f, f)$. Отсюда следует, что $\lambda \Sigma_i D(E_i) < \Sigma_i (E_i f, f)$ или $\lambda D(\Sigma_i E_i) < < (\Sigma_i E_i f, f)$, что и требовалось доказать.

Лемма 1.2.2 *Если $E \geqslant \lambda$ ($E \leqslant \lambda$), то существует такой F, что $E \geqslant F$ и $F \geqslant_p \lambda$ ($F \leqslant_p \lambda$).*

Согласно определению 1.2.1 мы имеем $E \neq 0$. Предположим, что искомого F не существует. Тогда должен существовать такой E_1, что $E \geqslant E_1$ и $E < \lambda$ (в противном случае в качестве F может быть выбран сам E). Пусть теперь Ω — первое порядковое число, принадлежащее кардиналу $\aleph > \aleph_0$. Пусть, далее, α — такое

---

* Здесь и далее страницы статьи «О кольцах операторов» (К. О.) даны по журналу Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 116—229 (первая публикация статьи).— *Примеч. ред.*

ординальное число, что $\alpha < \Omega$. Предположим, что для всех $\beta < \alpha$ определены такие операторы E_β, что $E_\beta \neq 0$, $E_\beta \leqslant E$, $E_\beta < \lambda$, $E_{\beta_1}E_{\beta_2} = \delta_{\beta_1,\beta_2}E_{\beta_1}$. Если теперь $E - \Sigma_{\beta<\alpha}E_\beta = 0$, оставим $E_{\alpha'}$ с $\alpha' \geqslant \alpha$ неопределенными. Если же, однако, $E - \Sigma_{\beta<\alpha}E_\beta \neq 0$, то согласно предположению $E - \Sigma_{\beta<\alpha}E_\beta$ не $\geqslant_p \lambda$, т. е. существует такой E_0, что $E_0 \neq 0$, $E - \Sigma_{\beta<\alpha}E_\beta \geqslant E_0$, $E_0 < \lambda$, $E \geqslant E - \Sigma_{\beta<\alpha}E_\beta \geqslant E_0$. Поэтому если мы положим $E_\alpha = E_0$, то получим, при условии $E - \Sigma_{\beta<\alpha}E_\beta \neq 0$, проектор E_α, ортогональный всем E_β и $E_\alpha < \lambda$.

Ясно, что $D(E) \geqslant \Sigma_{\beta<\alpha}D(E_\beta)$ для любого α. Поскольку $D(E_\beta) > 0$, отсюда следует, что существует не более чем счетное количество чисел $D(E_\beta)$. Значит, для какого-то $\alpha < \Omega$ $E - \Sigma_{\beta<\alpha} E_\beta = 0$. В пределах $\alpha < \Omega$ мы можем перенумеровать E_β в конечную или счетную бесконечную последовательность. Теперь $E_1 < \lambda$, $E_i \leqslant \lambda$, а поскольку $E = \Sigma_i E_i$, из леммы 1.2.1 следует, что $E < \lambda$ — в противоречии с условием.

Лемма 1.2.3. *Если $E \geqslant_p \lambda$ ($E \leqslant_p \lambda$), то из $E \geqslant F$, $F \neq 0$, $F \in \mathbf{M}$, следует, что $F \geqslant_p \lambda$ ($F \leqslant_p \lambda$).*

Если F_1 таково, что $F \geqslant F_1$, $F_1 \neq 0$, то $E \geqslant F \geqslant F_1$ и согласно определению 1.2.1 $F_1 \geqslant \lambda$. Но это утверждение и означает, что $F \geqslant_p \lambda$.

1.3. Очевидно, $(1f, f) = \|f\|^2 = \|f\|^2 D_\mathbf{M}(1)$. Пусть теперь $\theta_0 = \|f\|^2$, что, конечно, отлично от нуля, ибо $\mathfrak{M}_f^\mathbf{M} = \mathfrak{H}$, а это исключает возможность $f = 0$. Поэтому $1 \geqslant \theta_0$ (здесь 1 — проектор, а не число). По лемме 1.2.2 существует такой $E \in \mathbf{M}$, что $E \geqslant_p \theta_0$. Пусть теперь λ — наименьшая верхняя грань таких чисел θ, что $E \geqslant_p \theta$. λ должно быть меньше, чем $(Ef, f)/D_\mathbf{M}(E)$, а поскольку $D_\mathbf{M}(E) > 0$, оно должно быть конечным. Пусть ε — произвольное положительное число, E не $\geqslant_p \lambda + \varepsilon$. Значит, существует такой E_1, что $E \geqslant E_1$ и $E_1 \leqslant \lambda + \varepsilon$. Теперь из леммы 1.2.2 следует, что существует E_2, для которого $E_1 \geqslant E_2$ и $E_2 \leqslant_p \lambda + \varepsilon$.

Если F — такой проектор, что $E \geqslant F$, $F \neq 0$, $F \in \mathbf{M}$, мы имеем $F \geqslant \theta$ для всех $\theta < \lambda$, что, конечно, означает $F \geqslant \lambda$ и $E \geqslant_p \lambda$. Теперь, поскольку $E \geqslant E_1 \geqslant E_2$, из леммы 1.2.3 следует, что $E_2 \geqslant_p \lambda$. Поэтому существует фиксированное $\lambda > 0$, обладающее следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти такой ненулевой $E_2 \in \mathbf{M}$, что для всех $F \in \mathbf{M}$ с $E_2 \geqslant F$ будут выполнены неравенства

$$(\lambda + \varepsilon) D_\mathbf{M}(F) \geqslant (Ef, f) \geqslant \lambda D_\mathbf{M}(F).$$

Если мы теперь возьмем $\lambda^{1/2}f$ вместо f, $E_2 = E$ и $\varepsilon = \lambda(K - 1)$, то получим такую лемму:

Лемма 1.3.1. *Для любого $K > 1$ существуют такие f и $E \in \mathbf{M}$, $E \neq 0$, что для произвольного $F \in \mathbf{M}$ со свойством $E \geqslant F$*

$$K D_\mathbf{M}(F) \geqslant (Ff, f) \geqslant D_\mathbf{M}(F).$$

1.4. Теперь может быть доказана

Лемма 1.4.1. *Пусть K, f и E те же, что и в лемме 1.3.1. Пусть, далее, $A \in \mathbf{M}$ — положительно определенный самосопряженный оператор, причем $EA = AE = A$. Тогда*

$$K\,\mathrm{Tr}_\mathbf{M}(A) \geqslant (Af, f) \geqslant \mathrm{Tr}_\mathbf{M}(A).$$

Пусть c — норма A, а $E(\lambda)$ — разложение единицы, соответствующее A. Тогда согласно К. О. (с. 212—213)

$$\mathrm{Tr}_M(A) = \int_0^c \lambda dD(E(\lambda)); \qquad (Af, f) = \int_0^c \lambda d(E(\lambda) f, f).$$

Поскольку $AE = A$, $E(0) \geqslant 1 - E$, а так как A коммутирует с E, E, в свою очередь, коммутирует со всеми $E(\lambda)$ (см. [15, теорема 8.2]). Очевидно, $E(\lambda) = E(\lambda) E + E(\lambda)(1 - E)$. Так как $E(\lambda)$ и E коммутируют, $E(\lambda) E = F(\lambda)$ является проектором, и аналогичным образом $E(\lambda)(1 - E)$ — тоже проектор. Для $\lambda \geqslant 0$ мы имеем $E(\lambda)(1 - E) \leqslant 1 - E$, а также $E(\lambda)(1 - E) \geqslant E(0)(1 - E) \geqslant (1 - E)^2 = 1 - E$, значит, $E(\lambda)(1 - E) = 1 - E$. Таким образом, для $\lambda \geqslant 0$ $E(\lambda) = F(\lambda) + (1 - E)$. Далее, $F(\lambda)(1 - E) = E(\lambda) E(1 - E) = 0$, откуда по определению 8.2.1 из К. О. $D(E(\lambda)) = D(F(\lambda)) + D(1 - E)$. Поэтому мы имеем

$$\mathrm{Tr}_M(A) = \int_0^c \lambda dD(E(\lambda)) = \int_0^c \lambda dD(F(\lambda)) + \int_0^c \lambda dD(1 - E) = \int_0^c \lambda dD(F(\lambda))$$

и

$$(Af, f) = \int_0^c \lambda d(E(\lambda) f, f) = \int_0^c \lambda d(F(\lambda) f, f) + \int_0^c \lambda d((1 - E) f, f) = \int_0^c \lambda d(F(\lambda) f, f).$$

Но теперь из леммы 1.3.1 следует, что если $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant c$, то

$$KD_M(F(\beta) - F(\alpha)) \geqslant ((F(\beta) - F(\alpha)) f, f) \geqslant D_M(F(\beta) - F(\alpha)),$$

откуда по определению интеграла Римана—Стилтьеса следует

$$K\,\mathrm{Tr}_M(A) \geqslant (Af, f) \geqslant \mathrm{Tr}_M(A).$$

Лемма 1.4.2. *Для проектора $E \neq 0$ соотношение $E \geqslant_p \theta$ ($\leqslant_p \theta$) эквивалентно утверждению о том, что для всех положительно определенных $A \in \mathbf{M}$, для которых $EA = AE = A$, справедливо неравенство*

$$(Af, f) \geqslant \theta \mathrm{Tr}_M(A) \qquad (\leqslant \theta \mathrm{Tr}_M(A)).$$

Поскольку $\mathrm{Tr}_M(F) = D_M(F)$, когда F — проектор, из второго утверждения следует первое. Доказательство обратного утверждения аналогично доказательству леммы 1.4.1.

Лемма 1.4.3. *Пусть E, f и K те же, что и в лемме* 1.3.1, $A \in \mathbf{M}$ *и* $AE = EA = A$. *Тогда* $\| A^*f \|^2 \leqslant K \| Af \|^2$.

A^*A положительно определен и $\in \mathbf{M}$. Кроме того, из $AE = EA = A$ следует $EA^* = A^*E = A^*$, а потому и $EA^*A = A^*A = A^*AE$. Значит, лемма 1.4.1 применима к A^*A, и мы имеем

$$K\,\mathrm{Tr}_M(A^*A) \geqslant (A^*Af, f) \geqslant \mathrm{Tr}_M(A^*A). \qquad (\alpha)$$

Использовав каноническое разложение (см. К. О., определение 4.4.1) для A^*, мы получим $A^* = UB$, где U может быть выбран унитарным. (В конечных случаях мы знаем (см. К. О., лемма 16.1.1), что существует частично изометрический оператор V с начальным множеством $(f;\ A^*f = 0)$ и конечным $(f;\ Af = 0)$.) Если теперь W такой же, как в определении 4.4.1 из К. О. для $A = A^*$, положим $U = W + V$. B самосопряжен и равен $(A^*A)^{1/2}$. Теперь $A = BU^* = BU^{-1}$ и,

следовательно, $A^*A = UBBU^{-1} = UB^2U^{-1} = UAA^*U^{-1}$. Отсюда

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A^*A) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(UAA^*U^{-1}) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AA^*). \tag{β}$$

Подставляя A^* вместо A в наш предыдущий результат, мы имеем

$$K\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AA^*) \geqslant (AA^*f, f) \geqslant \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AA^*). \tag{γ}$$

Комбинируя (α), (β) и (γ), получаем

$$K(A^*Af, f) \geqslant K\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A^*A) = K\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AA^*) \geqslant (AA^*f, f).$$

Поскольку $(A^*Af, f) = (Af, Af) = \|Af\|^2$, $(AA^*f, f) = (A^*f, A^*f) = \|A^*f\|^2$, это неравенство совпадает с желаемым.

1.5. Если теперь E такой же, как в лемме 1.3.1, пусть n будет наименьшим из таких натуральных чисел, для которых $1/n \leqslant D_{\mathbf{M}}(E)$. Тогда, если $E^0 \leqslant E$ таков, что $D_{\mathbf{M}}(E^0) = 1/n$, будет справедлива лемма 1.3.1 с E^0 в качестве E. Напомним, что f был выбран таким образом, что $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} = \mathfrak{H}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{M}_{E^0f}^{\mathbf{M}'}$ является образом E^0, ибо, поскольку множество $(A'f;\ A' \in \mathbf{M}')$ плотно в $\mathfrak{H}$, множество $(E^0A'f;\ A' \in \mathbf{M}') = (A'E^0f,\ A' \in \mathbf{M}')$ должно быть плотно в образе E^0, или $E^0 = E_{E^0f}^{\mathbf{M}'}$. Поскольку $C = 1$, то $D_{\mathbf{M}'}(E_{E^0f}^{\mathbf{M}}) = D_{\mathbf{M}}(E_{E^0f}^{\mathbf{M}'}) = D_{\mathbf{M}}(E^0) = 1/n$.

Пусть теперь $E^0 = E_1$, $E_{E^0f}^{\mathbf{M}} = E_1'$. Поскольку $D_{\mathbf{M}}(E_1) = 1/n$, $D_{\mathbf{M}}(1) = 1$, мы можем найти n таких проекторов $\{E_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, первый из которых равен E_1, что $E_j \in \mathbf{M}$, $\sum_{j=1}^n E_j = 1$, $E_iE_j = 0$ при $i \neq j$, $D_{\mathbf{M}}(E_j) = 1/n$. Поскольку $D_{\mathbf{M}'}(E_1') = 1/n$, $D_{\mathbf{M}'}(1) = \alpha \geqslant 1$, то существуют n проекторов $E_j' \in \mathbf{M}'$, $j = 1, \ldots, n$, первый из которых равен E_1' и таких, что $E_i'E_j' = 0$ при $i \neq j$ и $D_{\mathbf{M}'}(E_j') = 1/n$. Так как $D_{\mathbf{M}}(E_1) = D_{\mathbf{M}}(E_j)$, существует частично изометрический оператор $W_j \in \mathbf{M}$, начальным множеством которого служит образ E_1, а конечным — образ E_j (см. К. О., определение 4.3.1). Подобным же образом мы имеем $W_j' \in \mathbf{M}'$ с образом E_1' в качестве начального множества и образом E_j' в качестве конечного. Имеют место соотношения $W_j^*W_j = E_1$, $W_jW_j^* = E_j$, $W_j'^*W_j' = E_1'$ и $W_j'W_j'^* = E_j'$, а также $W_jE_1 = W_j$, $E_jW_j = W_j$, $E_1W_j^* = W_j^*$, $W_j^*E_j = W_j^*$, $W_j'E_1' = W_j'$, $E_j'W_j' = W_j'$, $E_1'W_j'^* = W_j'^*$, $W_j'^*E_j' = W_j'^*$ (см. К. О., лемма 4.3.1).

Пусть $W_j'W_jE_1f = f_j$, $E_1f = f_1$. Тогда $E_jf_j = E_jW_j'W_jE_1f = W_j'E_jW_jE_1f = W_j'W_jE_1f = f_j$ и $E_j'f_j = E_j'W_j'W_jE_1f = W_j'W_jE_1f = f_j$. Поэтому $E_jf_j = f_j = E_j'f_j$.

Положим $g = \sum_{j=1}^n f_j$, тогда $E_ig = E_i\sum_{j=1}^n f_j = E_i\sum_{j=1}^n E_jf_j = \sum_{j=1}^n E_iE_jf_j = E_if_i = f_i$. Аналогичным образом $E_i'g = f_i$. Теперь для любого $A \in \mathbf{M}$ если или $i \neq j$, или $k \neq l$, то E_iAE_kg ортогонален E_jAE_lg. В самом деле, поскольку $E_kg = f_k = E_k'g$, мы имеем

$$\begin{aligned}(E_iAE_kg, E_jAE_lg) &= (E_jE_iAE_kg, AE_lg) = \delta_j^i(E_iAE_kg, AE_lg) = \\ &= \delta_j^i(E_iAE_k'g, AE_l'g) = \delta_j^i(E_k'E_iAg, E_l'Ag) = \delta_j^i(E_l'E_k'E_iAg, Ag) = \\ &= \delta_j^i\delta_k^l(E_k'E_iAg, Ag).\end{aligned}$$

Из этих результатов следует, что если $A \in \mathbf{M}$, то

$$\| Ag \|^2 = \Big\| \Big(\sum_{i=1}^n E_i \Big) A \Big(\sum_{j=1}^n E_j \Big) g \Big\|^2 = \Big\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i A E_j g \Big\|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| E_i A E_j g \|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| E_i A E_j E_j g \|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| E_i A E_j f_j \|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| E_i A E_j W'_j W_j f_1 \|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| W'_j E_i A E_j W_j f_1 \|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| W'_j E'_1 E_i A E_j W_j f_1 \|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| E'_1 E_i A E_j W_j f_1 \|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| E_i A E_j W_j E'_1 f_1 \|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| E_i A E_j W_j f_1 \|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| W_i^* E_i A E_j W_j f_1 \|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| W_i^* E_i A E_j W_j E_1 f \|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| W_i^* E_i A E_j W_j f \|^2,$$

памятуя о том, что W'_j изометричен на образе E'_1, W_i^* — на образе E_i и что $W_j E_1 = W_j$. Подставляя A^* вместо A и переставляя i и j, мы также имеем

$$\| A^* g \|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| W_j^* E_j A^* E_i W_i f \|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| (W_i^* E_i A E_j W_j)^* f \|^2.$$

Но, вспомнив свойства W_j и W_j^*, мы получим

$$E_1 W_i^* E_i A E_j W_j = W_i^* E_i A E_j W_j = W_i^* E_i A E_j W_j E_1.$$

Поэтому из леммы 1.4.3 с $A = W_i^* E_i A E_j W_j$ следует, что $\| (W_i^* E_i A E_j W_j)^* f \|^2 \leqslant K \| W_i^* E_i A E_j W_j f \|^2$, и вместе с этим из приведенных выше равенств для $\| Ag \|^2$ и $\| A^* g \|^2$ мы получаем, что $\| A^* g \|^2 \leqslant K \| Ag \|^2$.

Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Лемма 1.5.1. *Если K — произвольное число, $K > 1$, то существует такой вектор $g \in \mathfrak{H}$, $g \neq 0$, что для любого $A \in \mathbf{M}$ $\| A^* g \|^2 \leqslant K \| Ag \|^2$. Очевидно, мы можем считать, что $\| g \| = 1$.*

1.6. Теперь у нас получается

Лемма 1.6.1 *Пусть K и g такие же, как и в лемме* 1.5.1. *Если при этом E и $F \in \mathbf{M}$ — такие два проектора, что $D_{\mathbf{M}}(E) = D_{\mathbf{M}}(F)$, то $K^{-1}(Fg, g) \leqslant (Eg, g) \leqslant K(Fg, g)$.*

Поскольку $D_{\mathbf{M}}(E) = D_{\mathbf{M}}(F)$, существует такой частично изометрический оператор W, что $W^*W = F$, $WW^* = E$, $W \in \mathbf{M}$ (см. К. О., определения 8.2.1, 6.1.1 и лемму 4.3.1). Теперь $(Fg, g) = (W^*Wg, g) = (Wg, Wg) = \| Wg \|^2$, $(Eg, g) = (WW^*g, g) = (W^*g, W^*g) = \| W^*g \|^2$. Из леммы 1.5.1 с $A = W$ следует, что $(Eg, g) \leqslant K(Fg, g)$. С $A = W^*$ та же лемма дает $(Fg, g) \leqslant K(Eg, g)$ или $K^{-1}(Fg, g) \leqslant (Eg, g)$. Итак, наша лемма доказана.

Пусть $E \in \mathbf{M}$ таков, что $D_{\mathbf{M}}(E) = 1/m$, где m — произвольное натуральное число Тогда существуют $m - 1$ проекторов $E_2, \ldots, E_m$, для которых, положив $E_1 = E$, мы получим $\sum_{j=1}^m E_j = 1$, $E_i E_j = 0$ при $i \neq j$, $E_j \in \mathbf{M}$, $D_{\mathbf{M}}(E_j) = 1/m$. Возвращаясь теперь к g из лемм 1.5.1 и 1.6.1, мы имеем

$$1 = \| g \|^2 = (g, g) = \Big(\sum_{j=1}^m E_j g, g \Big) = \sum_{j=1}^m (E_j g, g).$$

Положим $(E_1g, g) = \alpha$. Тогда из леммы 1.6.1 следует, что для любого j $\alpha K \geqslant (E_ig, g) \geqslant \alpha K^{-1}$. Суммирование по j дает $Km\alpha \geqslant 1 \geqslant K^{-1}m\alpha$, или $K\alpha \geqslant 1/m \geqslant K^{-1}\alpha$, или, что то же самое,

$$K(Eg, g) \geqslant D_M(E) \geqslant K^{-1}(Eg, g), \qquad (+)$$

поскольку $D_M(E) = 1/m$.

Исследуем класс Σ тех E из $\mathbf{M}$, которые удовлетворяют неравенству $(+)$. Если $F_1, \ldots, F_q$ или $F_1, F_2, \ldots$ удовлетворяют $(+)$ и $F_iF_j = 0$ при $i \neq j$, то $\sum_{j=1}^{q} F_j$ или $\sum_{j=1}^{\infty} F_j$ тоже удовлетворяет $(+)$. Но если $F \in \mathbf{M}$ таков, что $D_M(F) = q/p$, то $F = \sum_{j=1}^{q} F_j$ для некоторых взаимно ортогональных $F_j \in \mathbf{M}$ с $D_M(F_j) = 1/p$, а значит удовлетворяющих $(+)$. Поэтому если $D_M(F) = p/q$, то F удовлетворяет $(+)$.

Пусть E — произвольный проектор из $\mathbf{M}$ и $D_M(E) = \alpha$. Пусть $\{\alpha_i\}$, $\alpha_i \geqslant 0$, — такая последовательность рациональных чисел, что $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \alpha$. Тогда существует такое множество $\{E_i\}$ взаимно ортогональных проекторов, что $E_i \leqslant E$, $E_i \in \mathbf{M}$ и $D_M(E_i) = \alpha_i$. Чтобы доказать это, предположим, что уже выбраны $E_1, \ldots, E_{i-1}$, обладающие этими свойствами. Тогда $D_M\left(E - \sum_{j=1}^{i-1} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \geqslant \alpha_i$. Значит, можно выбрать E_i таким образом, что $E_i \in \mathbf{M}$, $E_i \leqslant E - \sum_{j=}^{i-1} E_j$ и $D_M(E_i) = \alpha_i$. Далее, $D_M\left(E - \sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \alpha - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 0$, т. е. $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$. Так как каждый из E_i удовлетворяет $(+)$, то и E удовлетворяет $(+)$. Наконец, поскольку E был выбран произвольным образом, нами доказана

Лемма 1.6.2. *Пусть K и g такие же, как в лемме* 1.5.1, *тогда для любого* $E \in \mathbf{M}$

$$K(Eg, g) \geqslant D_M(E) \geqslant K^{-1}(Eg, g).$$

1.7. Из леммы 1.6.2, используя лемму 1.4.2, мы можем заключить, что если $A \in \mathbf{M}$ положительно определен, то

$$K(Ag, g) \geqslant \mathrm{Tr}_M(A) \geqslant K^{-1}(Ag, g).$$

Мы можем сформулировать свой результат следующим образом:

Теорема I. *Пусть $\mathbf{M}$ — фактор типа II_1. Предположим, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ таковы, что после нормировки D_M и $D_{M'}$, при которой область значений D_M совпадает с интервалом* $(0,1)$ *и* $C = 1$ (*см.* п. 1.1), *область значений $D_{M'}$ совпадает с интервалом* $(0, \alpha)$ *с* $0 < \alpha \leqslant \infty$, *причем* $\alpha \geqslant 1$. *Тогда для каждого $K > 1$ существует такой вектор $g \in \mathfrak{H}$, что для любого положительно определенного оператора* $A \in \mathbf{M}$

$$K(Ag, g) \geqslant \mathrm{Tr}_M(A) \geqslant K^{-1}(Ag, g).$$

Глава II
НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ СЛЕДСТВИЯ

2.1. Теперь мы можем доказать, что когда **M** принадлежит конечному типу (см. К. О., теорема VIII), иными словами, **M** — фактор типа I_n ($n = 1, 2, \ldots$) или II_1, то $Tr_{\mathbf{M}}$ обладает следующими двумя свойствами.

Свойство I. *Для всех эрмитовых A и B* $\in \mathbf{M}$

$$Tr_{\mathbf{M}}(A+B) = Tr_{\mathbf{M}}(A) + Tr_{\mathbf{M}}(B).$$

Свойство II. $Tr_{\mathbf{M}}(A)$ *слабо непрерывен, если A удовлетворяет хотя бы одному из следующих двух условий:*

(i) *A равномерно ограничен (т. е.* $|||A||| \leqslant D$ *для некоторого фиксированного D);*

(ii) *A знакоопределен.*

Эти свойства, очевидно, не зависят от нормировки $D_{\mathbf{M}}(E)$ и $Tr_{\mathbf{M}}(A)$.

Если **M** имеет тип I_n, $n = 1, 2, \ldots$, эти свойства, конечно, совпадают с хорошо известными результатами относительно $Tr_{\mathbf{M}}(A)$ (см. К. О., с. 220). Поэтому можно считать, что **M** имеет тип II_1.

Тогда мы имеем при нормировке теоремы VIII из К. О. три возможности для факторизации **M**, **M'**: II_1, II_∞; II_1, II_1 с $C \leqslant 1$; II_1, II_1 с $C \geqslant 1$. Первые два соответствуют $\alpha \geqslant 1$ при нормировке из п. 1.1, а поскольку мы будем использовать только теорему I из п. 1.1, мы можем рассматривать их вместе.

Поэтому предположим сначала, что мы находимся в условиях теоремы I: нормировка п. 1.1 и $\alpha \geqslant 1$. Мы получим утверждение, эквивалентное теореме I с эрмитовым, но не обязательно положительно определенным $A \in \mathbf{M}$.

Пусть K и g такие же, как в теореме I, тогда $K^{-1}(g, g) = K^{-1}\|g\|^2 \leqslant \leqslant Tr_{\mathbf{M}}(1) = 1$, т. е. $\|g\|^2 \leqslant K$. Далее, если $A \in \mathbf{M}$ эрмитов, то $A = A_1 - A_2$, где A_1 и A_2 оба положительно определены и $A_1A_2 = 0 = A_2A_1$. (Нужно взять $A_1 = = {}^1/_2(A + |A|)$, $A_2 = {}^1/_2(|A| - A)$ (см. [15, главу VI] или [19, с. 203 и далее])). Поскольку A_1 и A_2 коммутируют, то согласно лемме 15.3.4 из К. О. $Tr_{\mathbf{M}}(A) = = Tr_{\mathbf{M}}(A_1) - Tr_{\mathbf{M}}(A_2)$. Как следствие из теоремы I получаем тогда, что при $\varepsilon = K - 1$

$$|Tr_{\mathbf{M}}(A_1) - (A_1g, g)| \leqslant \varepsilon(A_1g, g); \qquad |Tr_{\mathbf{M}}(A_2) - (A_2g, g)| \leqslant \varepsilon(A_2g, g).$$

Вместе с предыдущим равенством для $Tr_{\mathbf{M}}(A)$ это дает

$$|Tr_{\mathbf{M}}(A) - (Ag, g)| \leqslant \varepsilon((A_1g, g) + (A_2g, g)).$$

Но нормы A_1 и A_2 обе не больше нормы A. Кроме того, $\|g\|^2 \leqslant 1 + \varepsilon$. Поэтому, если A имеет норму D, мы получаем

$$|Tr_{\mathbf{M}}(A) - (Ag, g)| \leqslant 2\varepsilon(1+\varepsilon)D. \tag{1}$$

Пусть A, B, $A + B$ имеют нормы D_1, D_2, D_3 соответственно. Подставляя в (1) каждый из этих операторов и учитывая, что $((A+B)g, g) = (Ag, g) + (Bg, g)$, мы получаем

$$|Tr_{\mathbf{M}}(A+B) - Tr_{\mathbf{M}}(A) - Tr_{\mathbf{M}}(B)| \leqslant 2\varepsilon(1+\varepsilon)(D_1 + D_2 + D_3),$$

из которого в силу того, что ε может быть выбрано сколь угодно малым, следует свойство I.

Обратимся к свойству II, (i). Рассмотрим множество Σ всех эрмитовых $A \in \mathbf{M}$, нормы которых не превосходят фиксированного D. Мы докажем, что для произвольного $A \in \Sigma$ и любого $\eta > 0$ найдется такая слабая окрестность $U(A; g; g; \eta/3)$ оператора A, что для всех $B \in \Sigma$ и $B \in U(A; g; g; \eta/3)$ (т. е. $|((B - A)g, g)| < \eta/3$) мы имеем $|\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B) - \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)| < \eta$. Полагая ε таким, что $\varepsilon(1 + \varepsilon) D \leqslant \eta/3$, мы можем, как и ранее, найти такое g, что для A и любого $B \in \Sigma$ $|\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) - (Ag, g)| \leqslant \varepsilon(1 + \varepsilon) D \leqslant \eta/3$, $|\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B) - (Bg, g)| \leqslant \eta/3$. В частности, для $B \in U(A; g; g; \eta/3)$ (см. выше), что означает дополнительно $|((B - A)g, g)| < \varepsilon/3$, из этих неравенств следует, что $|\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) - \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B)| < \eta$.

Таким образом, мы доказали непрерывность $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ в слабой топологии, правда с дополнительным ограничением. Отсюда немедленно следует секвенциальная непрерывность. (Если $A_n \to A$, то все A_n равномерно ограничены и для любого $\eta > 0$ почти все A_n должны лежать в описанной выше окрестности.) В данной ситуации оба вида непрерывности эквивалентны (см. [18, с. 393—394]), но мы будем использовать только секвенциальную.

$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ является также слабо непрерывной функцией, если его рассматривать только на положительно определенных $A \in \mathbf{M}$. Предположим, что A таков и задано $\varepsilon > 0$. Пусть K из теоремы I выбрано таким образом, что $1 < K \leqslant 2$ и $(K - 1)\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) < \varepsilon/5$, и пусть, как и ранее, g — вектор, соответствующий этому K. Выберем такое η, что $\eta \leqslant \varepsilon/5$. Тогда, если положительно определенный $B \in \mathbf{M}$ лежит в $U(A; g; g; \eta)$, мы имеем $|\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) - \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B)| < \varepsilon$ (ибо $|((B - A)g, g)| < \eta \leqslant \varepsilon/5$, $|\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) - (Ag, g)| \leqslant (K - 1)\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) < \varepsilon/5$ и вдобавок $|\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B) - (Bg, g)| \leqslant (K - 1)(Bg, g) \leqslant (K - 1)((Ag, g) + \eta) \leqslant (K - 1)(\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) + \varepsilon/5 + \eta) \leqslant 3\varepsilon/5$).

Таким образом, мы исследовали факторизации II_1, II_∞ и II_1, II_1 с $C \leqslant 1$. Но нам все еще предстоит рассмотреть случай II_1, II_1 с $C > 1$. Пусть m — такое натуральное число, что $C/m \leqslant 1$, E_m — m-мерное унитарное пространство. Построим $E_m \otimes \mathfrak{H}$ (см. К. О., теорему I). Обозначим через $\mathbf{N}$ кольцо операторов в E_m, $\mathbf{N}^{(1)}$ — соответствующее множество операторов в $E_m \otimes \mathfrak{H}$ (см. К. О., леммы 2.3.1 и 2.3.2), $\mathbf{B}$ — множество всех операторов в $\mathfrak{H}$ и через $\mathbf{B}^{(2)}$ — соответствующее множество в $E_m \otimes \mathfrak{H}$.

В указанном выше соответствии $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^{(2)}$ $\mathbf{M} \sim \mathbf{M}^{(2)}$ и $\mathbf{M}' \sim \mathbf{M}'^{(2)}$. Первое соответствие, а значит и каждое из остальных двух, является полным изоморфизмом колец (см. К. О., лемму 2.3.4 и [22, § 4]). Отсюда следует, что $\mathbf{M}^{(2)}$ и $\mathbf{M}'^{(2)}$ принадлежат к типу II_1 (см. К. О., теорема IX). Теперь, выбрав полную ортонормированную систему $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ в E_m, вспомним о конструкции К. О., п. 2.4. Согласно лемме 2.4.5 из К. О. мы имеем $\mathbf{M}^{(2)\prime} = R(\mathbf{N}^{(1)}, \mathbf{M}'^{(2)})$, а по лемме 11.5.2 из К. О. $R(\mathbf{N}^{(1)}, \mathbf{M}'^{(2)})$ принадлежит к типу II_1, поскольку, как мы упоминали ранее, $\mathbf{M}'^{(2)}$ имеет этот тип.

Таким образом, получается парная факторизация $\mathbf{M}^{(2)}$, $\mathbf{M}^{(2)\prime}$ вида II_1, II_1, причем $\mathbf{M}^{(2)}$ вполне изоморфно $\mathbf{M}$ как кольцо. Более того, этот изоморфизм сохраняет $D_{\mathbf{M}}$ в стандартной нормировке (см. К. О., теорема IX), а значит, и след. Предположим теперь, что для $\mathbf{M}^{(2)}$, $\mathbf{M}^{(2)\prime}$ нам удалось доказать неравенство

$C^{(2)} \leqslant 1$. Тогда $\mathbf{M}^{(2)'}$ обладает свойствами I и II, указанными выше, и изоморфный ему фактор $\mathbf{M}$ тоже должен обладать ими. (Поскольку m конечно, отображение $\mathbf{B} \sim \mathbf{B}^{(2)}$ сохраняет даже слабую операторную топологию.)

Таким образом, нам осталось доказать, что $C^{(2)} \leqslant 1$. Рассмотрим замкнутое линейное многообразие $(\varphi_1 \otimes f,\ f \in \mathfrak{H})$ (скажем) $\mathfrak{M}$ в $E_m \otimes \mathfrak{H}$. Соответствие между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, задаваемое формулой $\varphi_1 \otimes f \sim f$, унитарно. При этом $\mathbf{M}^{(2)}_{\mathfrak{M}}$ и $R(\mathbf{N}^{(1)}, \mathbf{M}'^{(2)})_{\mathfrak{M}}$ (см. К. О., определение 11.3.1) оказываются унитарно эквивалентными $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ (см. К. О., п. 2.4). Поэтому C для $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ такое же, как и для $\mathbf{M}^{(2)}_{\mathfrak{M}}$, $R(\mathbf{N}^{(1)}, \mathbf{M}'^{(2)})_{\mathfrak{M}}$. Теперь из доказательства леммы 11.4.3 мы можем заключить, что $C = (D_{\mathbf{M}^{(2)}}(\mathfrak{H})/D_{\mathbf{M}^{(2)}}(\mathfrak{M}))\, C^{(2)} = mC^{(2)}$ или $C^{(2)} = C/m \leqslant 1$.

2.2. До сих пор $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ рассматривался только для эрмитовых $A \in \mathbf{M}$. Теперь мы определим его для всех $A \in \mathbf{M}$.

Определение 2.2.1. *Если* $A \in \mathbf{M}$, *то* $A = B + iC$, *где* $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ *и* $C = -\frac{1}{2}i(A - A^*)$ *эрмитовы, при этом мы полагаем, по определению,* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B) + i\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(C)$.

$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A^*)$ обладает следующими свойствами.

Свойство III. (*) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ *совпадает с предыдущим* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$, *если A эрмитов.*

(**) *Для равномерно ограниченных или знакоопределенных A* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ *слабо непрерывен.*

(i) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(1) = 1$;
(ii) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(\rho A) = \rho\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$, ρ — *комплексное*;
(iii) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A + B) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) + \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B)$;
(iv) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) \geqslant 0$, *если A положительно определен*;
(iv)′ *если A положительно определен и* $\neq 0$, $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) > 0$;
(v) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A^*) = \overline{\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)}$;
(vi) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AB) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(BA)$;
(vi)′ $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(U^{-1}AU) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$, *если U унитарен.*

Здесь (*) и (v) являются немедленными следствиями определения (i), (iv) и (iv)′ следуют из (*) и К. О., теоремы XIII. A^* является слабо непрерывной аддитивной функцией A. Поэтому B и C — такие же функции, и мы можем вывести (iii) и (**) из свойств I и II соответственно. Чтобы доказать (ii), заметим сначала, что согласно определению 2.2.1, если A эрмитов, то $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(iA) = i\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$, а если a вещественно, то согласно (*) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(aA) = a\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$. Теперь (ii) доказывается прямым вычислением с использованием (iii).

Чтобы доказать (vi), предположим, что A и B эрмитовы. Пусть $C = A + iB$ и $C^* = A - iB$. Тогда $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(C^*C) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(CC^*)$ (согласно (*), см. доказательство равенства (β) в лемме 1.4.3). Подставляя сюда выражение для C, разлагая произведения согласно правилам дистрибутивности и приводя подобные члены, мы получаем $2i(\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AB) - \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(BA)) = 0$ или $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AB) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(BA)$. Отсюда, используя определение 2.2.1, (ii) и (iii), можно доказать (vi) в общем случае. (vi)′ следует из (vi), если положить $A = U^{-1}A$, $B = U$ и использовать закон ассоциативности.

Свойство IV. (i)—(iv), (v), (vi)′ *свойства* III *характеризуют* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ *однозначно*.

Предположим, что $\mathrm{Tr}'(A)$ обладает перечисленными свойствами. Тогда, если A эрмитов, $\mathrm{Tr}'(A)$ веществен согласно (v). Отсюда и из (i)—(iv), (vi)′ следует, что для эрмитовых $A \in \mathbf{M}$ $\mathrm{Tr}'(A) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ (К. О., теорема XIII). Затем из (ii) и (iii) мы получаем, что для произвольного $C \in \mathbf{M}$, $C = A + iB$ с эрмитовыми A и B, $\mathrm{Tr}'(C) = \mathrm{Tr}'(A + iB) = \mathrm{Tr}'(A) + \mathrm{Tr}'(iB) = \mathrm{Tr}'(A) + i\mathrm{Tr}'(B) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) + i\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A + iB) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(C)$ или $\mathrm{Tr}'(C) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(C)$.

Глава III

ТОЧНАЯ ФОРМА $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ (ДЛЯ $\alpha \geqslant 1$)

3.1. Мы снова считаем, что $\mathbf{M}$ принадлежит типу II_1. Нам потребуются некоторые леммы относительно семейств проекторов и спектральных разложений в $\mathbf{M}$. Из них две последние представляют некоторый независимый интерес.

Лемма 3.1.1. *Для любых двух проекторов* $E, F \in \mathbf{M}$ *с* $E \leqslant F$ *и любого* $\alpha \geqslant D_{\mathbf{M}}(E)$, $\leqslant D_{\mathbf{M}}(F)$ *существует такой проектор* $G \in \mathbf{M}$, *что* $E \leqslant G \leqslant F$ *и* $D_{\mathbf{M}}(G) = \alpha$.

$F - E$ — проектор и $0 \leqslant \alpha - D_{\mathbf{M}}(E) \leqslant D_{\mathbf{M}}(F) - D_{\mathbf{M}}(E) = D_{\mathbf{M}}(F - E) \leqslant 1$, поэтому существует проектор $G' \in \mathbf{M}$ с $D_{\mathbf{M}}(G') = \alpha - D_{\mathbf{M}}(E)$ (ведь $\mathbf{M}$ — фактор типа II_1). Значит, $D_{\mathbf{M}}(G') \leqslant D_{\mathbf{M}}(F - E)$ и существует проектор $G'' \in \mathbf{M}$ с $G'' \leqslant F - E$, $D_{\mathbf{M}}(G'') = D_{\mathbf{M}}(G') = \alpha - D_{\mathbf{M}}(E)$. G'' ортогонален E, а потому $G'' + E$ является проектором и $D_{\mathbf{M}}(G'' + E) = D_{\mathbf{M}}(G'') + D_{\mathbf{M}}(E) = \alpha$. Кроме того, $G'' + E \geqslant E$ и $G'' + E \leqslant (F - E) + E = F$. Таким образом, $G = G'' + E$ обладает требуемыми свойствами.

Лемма 3.1.2. *Для любых двух проекторов* $E, F \in \mathbf{M}$ *с* $E \leqslant F$ *существует семейство проекторов* $G(\alpha) \in \mathbf{M}$, *определенных для всех* α *при* $D_{\mathbf{M}}(E) \leqslant \alpha \leqslant D_{\mathbf{M}}(F)$ *и обладающих следующими свойствами*:

(i) $G(\alpha) = E$ *или* F, *если* $\alpha = D_{\mathbf{M}}(E)$ *или* $\alpha = D_{\mathbf{M}}(F)$ *соответственно*;

(ii) *из* $\alpha \leqslant \beta$ *следует* $G(\alpha) \leqslant G(\beta)$;

(iii) $D_{\mathbf{M}}(G(\alpha)) = \alpha$.

Выберем такую последовательность $\rho_1, \rho_2, \ldots$, содержащуюся в интервале $D_{\mathbf{M}}(E) \leqslant \alpha \leqslant D_{\mathbf{M}}(F)$ и плотную в нем, что $\rho_1 = D_{\mathbf{M}}(E)$ и $\rho_2 = D_{\mathbf{M}}(F)$.

Построим далее такую последовательность проекторов $G(\rho_1), G(\rho_2), \ldots \in \mathbf{M}$, что для $\alpha = \rho_1, \rho_2, \ldots$ выполнены (i)—(iii). Положим сперва $G(\rho_1) = E$, $G(\rho_2) = F$, тогда для $\alpha = \rho_1, \rho_2$ свойства (i)—(iii) выполнены. Предположим теперь, что для $j = 3, 4, \ldots$ операторы $G(\rho_1), \ldots, G(\rho_{j-1})$ уже определены и удовлетворяют (i)—(iii) при $\alpha = \rho_1, \ldots, \rho_{j-1}$, после чего определим $G(\rho_j)$ так, чтобы не нарушить (i)—(iii).

Рассмотрим ρ_i, $i = 1, \ldots, j-1$, с $\rho_i \leqslant \rho_j$ (они существуют: $\rho_1 = D_{\mathbf{M}}(E) \leqslant \rho_j$), пусть $\rho_{i'}$ — наибольшее из них. Рассмотрим далее ρ_i, $i = 1, \ldots, j-1$, с $\rho_i \geqslant \rho_j$ (они тоже существуют: $\rho_2 = D_{\mathbf{M}}(F) \geqslant \rho_j$), и пусть $\rho_{i''}$ — наименьшее из них. При этом $\rho_{i'} \leqslant \rho_{i''}$, а значит, и $G(\rho_{i'}) \leqslant G(\rho_{i''})$. Кроме того, $D_{\mathbf{M}}(G(\rho_{i'})) = \rho_{i'} \leqslant \rho_j \leqslant \rho_{i''} = D_{\mathbf{M}}(G(\rho_{i''}))$. Поэтому к $E = G(\rho_{i'})$, $F = G(\rho_{i''})$ и $\alpha = \rho_j$ можно применить лемму 3.1.1; мы полагаем $G(\rho_j) = G$.

Таким образом, $G(\rho_{i'}) \leqslant G(\rho_j) \leqslant G(\rho_{i''})$, поэтому из $\rho_i \leqslant \rho_j$, $i = 1, \ldots, j-1$, следует, что $\rho_i \leqslant \rho_{i'}$ и $G(\rho_i) \leqslant G(\rho_{i'}) \leqslant G(\rho_j)$, а из $\rho_i \geqslant \rho_j$, $i = 1, \ldots, j-1$, следует $\rho_i \geqslant \rho_{i''}$, $G(\rho_i) \geqslant G(\rho_{i''}) \geqslant G(\rho_j)$. Кроме того, $D_M(G(\rho_j)) = \rho_j$. Таким образом, (i) — (iii) выполняются и для $\alpha = \rho_1, \ldots, \rho_{j-1}, \rho_j$.

Итак, все $G(\rho_1)$, $G(\rho_2)$, ... определены. Согласно (ii) для всех α с $D_M(E) = \rho_1 \leqslant \alpha \leqslant \rho_2 = D_M(F)$ существует $\lim_{\rho_i \to \alpha, \rho_i \geqslant \alpha} G(\rho_i)$. Если α равно какому-нибудь ρ_j, то под пределом мы понимаем просто значение в этой точке ρ_j. Таким образом, мы можем распространить определение $G(\alpha)$ на все требуемые α, полагая

$$G(\alpha) = \lim_{\rho_i \to \alpha, \rho_i \geqslant \alpha} G(\rho_i).$$

При этом (i) остается справедливым, а (ii) и (iii) продолжаются на все требуемые α по непрерывности.

Лемма 3.1.3. *Пусть $A \in \mathbf{M}$ — положительно определенный оператор с нормой $\leqslant 1$. Тогда существует монотонная неубывающая полунепрерывная справа функция $\varphi(\alpha)$, определенная для $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и удовлетворяющая неравенствам $0 \leqslant \varphi(\alpha) \leqslant 1$, а также разложение единицы $E(\alpha) \in \mathbf{M}$* (см. [16, с. 92] или К. О., определение 15.1.1), *обладающее следующими свойствами*:

(i) $E(0) = 0$, $E(1) = 1$;

(ii) $D_M(E(\alpha)) = \alpha$;

(iii) $(Af, g) = \int_0^1 \varphi(\alpha)\, d(E(\alpha) f, g)$ *для всех f, g, или, символически,*

$$A = \int_0^1 \varphi(\alpha)\, dE(\alpha).$$

Пусть $F(\lambda)$ — разложение единицы, соответствующее A. Поскольку A положительно определен, $F(0) = 0$, а так как норма A не превосходит 1, то $F(1) = 1$.

Рассмотрим следующие две функции:

$$\psi(\lambda) = D_M(F(\lambda)),$$

$$\varphi(\alpha) = \underset{0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \psi(\lambda) \leqslant \alpha}{\text{l.u.b.}} \lambda,$$

так как $F(\lambda)$ является разложением единицы, то $\psi(\lambda)$ монотонно не убывает и полунепрерывна справа при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, кроме того, $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$. При этом $\varphi(\alpha)$ тоже монотонно не убывает и полунепрерывна справа в $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а ее значения заключены в промежутке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Эти, а также последующие утверждения легко проверить, кроме того, их обсуждение можно найти в [19 (номера ссылок относятся к библиографии в К. О., с. 125—126) на с. 193]. (Наши $\psi(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ соответствуют там $\varphi(a)$, $\psi(b)$, так что обе они являются «m-функциями», а $\varphi(\alpha)$, кроме того, является «функцией меры» для $\psi(\lambda)$.) Связь между $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\lambda)$ симметрична (см. там же; ψ является «функцией меры» для $\varphi(\alpha)$, если для пустого множества в $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ положить l. u. b. $= 0$); иначе говоря,

$$\psi(\lambda) = \underset{0 \leqslant \alpha \leqslant 1}{\text{l.u.b.}} (\varphi(\alpha) \leqslant \lambda).$$

Наконец см. там же),

$$\psi(\varphi(\psi(\lambda))) = \psi(\lambda). \tag{*}$$

Это означает, что $D_{\mathbf{M}}(F(\varphi(\psi(\lambda)))) = D_{\mathbf{M}}(F(\lambda))$. Но $F(\varphi(\psi(\lambda))) \gtreqless F(\lambda)$, так что отсюда следует

$$F(\varphi(\psi(\lambda))) = F(\lambda). \tag{**}$$

Для $\varphi(\alpha) < 1$ выберем μ с $\varphi(\alpha) < \mu \leqslant 1$ и устремим $\mu \to \varphi(\alpha)$. В этих условиях из определения $\varphi(\alpha)$ следует, что $D_{\mathbf{M}}(F(\mu)) > \alpha$, а значит, и $D_{\mathbf{M}}(F(\varphi(\alpha))) \geqslant \alpha$. Для $\varphi(\alpha) = 1$ это тоже верно: $D_{\mathbf{M}}(F(\varphi(\alpha))) = D_{\mathbf{M}}(F(1)) = D_{\mathbf{M}}(1) = 1 \geqslant \alpha$. С другой стороны, если $\varphi(\alpha) > 0$, то существует такая последовательность μ с $0 \leqslant \mu \leqslant \varphi(\alpha)$, $\mu \to \varphi(\alpha)$, что $D_{\mathbf{M}}(F(\mu)) \leqslant \alpha$, так что $D_{\mathbf{M}}(F(\varphi(\alpha) - 0)) \leqslant \alpha$. Если отождествить $F(0-0)$ с $F(0) = 0$, это будет верно и для $\varphi(0) = 0 : D_{\mathbf{M}}(F(0-0)) = D_{\mathbf{M}}(0) = 0 \leqslant \alpha$. Итак, мы имеем

$$D_{\mathbf{M}}(F(\varphi(\alpha) - 0)) \leqslant \alpha \leqslant D_{\mathbf{M}}(F(\varphi(\alpha))). \tag{#}$$

Образуем теперь для каждого $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $E = F(\lambda - 0)$, $F = F(\lambda)$ и применим к ним лемму 3.1.2. В результате мы получим семейство проекторов $G(\alpha) \in \mathbf{M}$, $D_{\mathbf{M}}(F(\lambda - 0)) \leqslant \alpha \leqslant D_{\mathbf{M}}(F(\lambda))$. Выберем и зафиксируем такое семейство проекторов $G(\lambda, \alpha)$ для каждого $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. (Если $F(\lambda - 0) = F(\lambda)$, то неизбежно $\alpha = D_{\mathbf{M}}(F(\lambda))$ и $G(\lambda, \alpha) = F(\lambda)$. Поэтому существенны только λ с $F(\lambda - 0) \neq F(\lambda)$, т. е. дискретные собственные значения A. Их множество конечно или счетно.)

Определим теперь для каждого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,

$$E(\alpha) = G(\varphi(\alpha), \alpha) \tag{§}$$

(благодаря (#) это выражение имеет смысл).

Теперь, по определению, имеем $D_{\mathbf{M}}(E(\alpha)) = \alpha$, так что условие (ii) удовлетворяется. Для $\alpha = 0, 1$ оно дает $E(0) = 0$ и $E(1) = 1$, так что условие (i) тоже выполнено. Если $\alpha \leqslant \beta$, то $\varphi(\alpha) \leqslant \varphi(\beta)$. Равенство $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ дает

$$E(\alpha) = G(\varphi(\alpha), \alpha) = G(\varphi(\beta), \alpha) \leqslant G(\varphi(\beta), \beta) = E(\beta),$$

а $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ дает

$$E(\alpha) = G(\varphi(\alpha), \alpha) \leqslant F(\varphi(\alpha)) \leqslant (F(\varphi(\beta) - 0) \leqslant G(\varphi(\beta), \beta) = E(\beta).$$

Итак, мы видим, что

$$\alpha \leqslant \beta \text{ влечет за собой } E(\alpha) \leqslant E(\beta). \tag{•}$$

Далее, $\beta > \alpha$ дает

$$D_{\mathbf{M}}(E(\beta) - E(\alpha)) = D_{\mathbf{M}}(E(\beta)) - D_{\mathbf{M}}(E(\alpha)) = \beta - \alpha,$$

так что $\lim_{\beta \to \alpha, \beta > \alpha} D_{\mathbf{M}}(E(\beta) - E(\alpha)) = 0$. Но

$$\lim_{\beta \to \alpha, \beta > \alpha} D_{\mathbf{M}}(E(\beta) - E(\alpha)) = D_{\mathbf{M}}(\lim_{\beta \to \alpha, \beta > \alpha} E(\beta) - E(\alpha)) =$$

$$= D_{\mathbf{M}}(E(\alpha + 0) - E(\alpha))$$

и $D_{\mathbf{M}}(E(\alpha+0)-E(\alpha))=0$, $E(\alpha+0)=E(\alpha)$, или

$$\lim_{\beta\to\alpha,\beta>\alpha} E(\beta)=E(\alpha). \qquad (\cdot\cdot)$$

(i), $(\cdot)$, $(\cdot\cdot)$ вместе означают, что $E(\alpha)$ является разложением единицы. Нам остается доказать (iii).

Рассмотрим выражение $\int_0^1 \varphi(\alpha)\, d(\|E(\alpha)f\|^2)$. $\varphi(\alpha)$ и $\|E(\alpha)f\|^2$ являются монотонно неубывающими функциями α; при α, возрастающем от 0 до 1, эти функции возрастают от $\varphi(0)$ до $\varphi(1)$ и от 0 до $\|f\|^2$ соответственно. После интегрирования по частям наш интеграл оказывается равным $\|f\|^2-\int_0^1 \|E(\alpha)f\|^2 d\varphi(\alpha)$. Теперь мы можем ввести новую переменную интегрирования $\lambda=\varphi(\alpha)$. Тогда мы имеем (см. там же, с. 198) $\int_0^1 \|E(\alpha)f\|^2 d\varphi(\alpha)=\int_0^1 \|E(\psi(\lambda))f\|^2 d\lambda$. Но согласно (§) $E(\psi(\lambda))=G(\varphi(\psi(\lambda)),\psi(\lambda))$, а из $(*)$ $\psi(\varphi(\psi(\lambda)))=D_{\mathbf{M}}(F(\varphi(\psi(\lambda))))$. Поэтому определение $G(\mu,\alpha)$ дает $G(\varphi(\psi(\lambda)),\ \psi(\lambda))=F(\varphi(\psi(\lambda)))$. Благодаря $(**)$ это равно $F(\lambda)$, так что мы получаем $E(\psi(\lambda))=F(\lambda)$. Таким образом, наше исходное выражение равно $\|f\|^2-\int_0^1 \|F(\lambda)f\|^2 d\lambda$, что, после еще одного интегрирования по частям, превращается в $\int_0^1 \lambda d(\|F(\lambda)f\|^2)$, т. е. в (Af, f). Итак, мы доказали

$$(Af, f)=\int_0^1 \varphi(\alpha)\, d(\|E(\alpha)f\|^2).$$

После замены здесь f на $f \pm g/2$ и вычитания мы получим вещественную часть (iii). Замена f, g на if, g дает мнимую часть (iii). Таким образом, доказательство закончено.

Наконец, нам потребуется такая

Лемма 3.1.4. *Пусть $E(\alpha)\in\mathbf{M}$ — разложение единицы в $a\leqslant\alpha\leqslant b$, $E(a)=0$ и $E(b)=1$. Тогда существует ограниченный эрмитов оператор $B\in\mathbf{M}$ с $(Bf, g)=\int_a^b \lambda d(E(\lambda)f, g)$, или, символически, $B=\int_a^b \lambda dE(\lambda)$. Для любой ограниченной бэровской функции $\psi(\alpha)$ существует оператор $C=\psi(B)\in\mathbf{M}$ с $(Cf, g)=\int_a^b \psi(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g)$, или, символически, $C=\int_a^b \psi(\lambda)\, dE(\lambda)$. Если $0\leqslant\psi(\lambda)\leqslant 1$, то C эрмитов, положительно определен и имеет верхнюю границу, равную 1. Еля всех $\psi(\lambda)$*

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(C)=\int_a \psi(\lambda)\, dD_{\mathbf{M}}(E(\lambda)).$$

Существование ограниченного оператора B — это хорошо известный факт из теории спектральных форм, а поскольку все $E(\lambda)\in\mathbf{M}$, то и $B\in\mathbf{M}$ (см. [13, с. 189, теорема 11). $C=\psi(B)$ тоже существует и ограничен [19, с. 205], а из $B\in\mathbf{M}$ следует, что $C\in\mathbf{M}$ [19, с. 213, теорема 6]. $0\leqslant\psi(\alpha)\leqslant 1$ влечет за собой эрмитовость и положительную определенность C и $1-C$ [19, с. 205] (C эрмитов: из свойства b; C и $1-C$ положительно определены: из свойства e), с $F(x)=\psi(x)$ или $1-\psi(x)$ и $G(x)=H(x)=(F(x))^{1/2}$. Поэтому норма C не больше 1. (Можно также использовать [16, с. 113, теорема 4*].)

Нам осталось лишь доказать последнюю формулу для следа. Если она верна для $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, ..., а функции $\psi_n(\lambda)$, $n=1, 2, \ldots$, равномерно ограничены и схо-

дятся всюду в $a \leqslant \lambda \leqslant b$, то она верна и для $\psi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda)$, $\psi(B)$ = сильный $\lim_{n\to\infty} \psi_n(B)$, поскольку все $\psi_n(B)$ равномерно ограничены (согласно [19, с. 205, свойство h]), в то время как $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}$ непрерывен относительно сильной (и даже слабой) сходимости согласно свойству III, $(_{**})$. Таким образом, наше соотношение выполняется для всех ограниченных бэровских функций $\psi(\lambda)$, если только оно выполняется для всех непрерывных функций $\psi(\lambda)$. Но оно выполнено для таких функций, если выполнено для всех кусочно-постоянных функций $\psi(\lambda)$. Последние являются линейными комбинациями функций $\psi_{c,d}(\lambda) = 1$ для $c < \lambda \leqslant d$ и $=0$ в противном случае, где $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$. Итак, нам достаточно рассмотреть только такие функции. Ясно, что

$$\psi_{c,d}(B) = E(d) - E(c),$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(\psi_{c,d}(B)) = D_{\mathbf{M}}(E(d) - E(c)) = D_{\mathbf{M}}(E(d)) - D_{\mathbf{M}}(E(c))$$

и

$$\int_a^b \psi_{c,d}(\alpha)\, dD_{\mathbf{M}}(E(\alpha)) = D_{\mathbf{M}}(E(d)) - D_{\mathbf{M}}(E(c)),$$

что и завершает доказательство.

3.2. Теперь мы возвращаемся к нормировке п. 1.1 и предполагаем, что нам задан фактор $\mathbf{M}$ типа II_1 с $\alpha \geqslant 1$.

Рассмотрим g и K, связанные между собой как в теореме I. Нашей целью является доказательство теоремы II, которая будет сформулирована ниже, но сначала мы рассмотрим следующие две задачи на максимум.

(A) *Для данного* λ *с* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ *рассмотрим все проекторы* $F \in \mathbf{M}$, *для которых* $D_{\mathbf{M}}(F) = \lambda$, *и соответствующие значения* (Fg, g). *Мы докажем, что эти* (Fg, g) *обладают максимумом* m_a, *которого и достигают на некотором* $F = F_0$ *из указанного выше класса.*

(B) *Для данного* λ *с* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ *рассмотрим все такие положительно определенные операторы* $B \in \mathbf{M}$ *с нормой* $\leqslant 1$, *что* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B) = \lambda$, *и соответствующие значения* (Bg, g). *Мы докажем, что эти* (Bg, g) *имеют максимум* m_b, *который достигается на некотором* $B = B_0$ *из описанного выше класса.*

Лемма 3.2.1. *Проблема* (B) *обладает решением* $B = B_0$, *а максимум* m_b *удовлетворяет неравенствам* $\lambda K^{-1} \leqslant m_b \leqslant \lambda K$.

Для B из класса, описанного в проблеме (B), из теоремы I мы имеем $\lambda K^{-1} \leqslant (Bg, g) \leqslant \lambda K$. Значит, эти (Bg, g) обладают точной верхней гранью m_b и $\lambda K^{-1} \leqslant m_b \leqslant \lambda K$.

Выберем теперь из этого класса последовательность $B_1, B_2, \ldots$, для которой $\lim_{n\to\infty}(B_n g, g) = m_b$. Поскольку все $B_1, B_2, \ldots$ равномерно ограничены, найдется подпоследовательность $B_{n_1}, B_{n_2}, \ldots$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$, для которой существует B_0 = слабый $\lim B_{n_i}$. Так как все $B_{n_i} \in \mathbf{M}$, положительно определены и обладают нормой $\leqslant 1$, то же верно и для B_0. Поскольку все $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B_{n_i}) = \lambda$, то свойство II или III, $(**)$ дает $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B_0) = \lambda$. Наконец, $(B_0 g, g) = \lim_{i\to\infty}(B_{n_i} g, g) = \lim_{n\to\infty}(B_n g, g) = m_b$.

Таким образом, B_0 принадлежит нашему классу и $(B_0 g, g) = m'_b$. Поэтому l. u. b. m'_b является максимумом: $m'_b = m_b$ и $\lambda K^{-1} \leqslant m_b \leqslant \lambda K$. Доказательство окончено.

Лемма 3.2.2. *В качестве B_0 из леммы* 3.2.1 *может быть выбран проектор.*

Рассмотрим оператор B_0 из леммы 3.2.1. Согласно леммам 3.1.3 и 3.1.4 мы имеем $B_0 = \varphi(B)$, где $B = \int_0^1 \alpha dE(\alpha)$ (символически), где $E(\alpha)$ — разложение единицы с $E(\alpha) \in \mathbf{M}$, $D_{\mathbf{M}}(E(\alpha)) = \alpha$, а $\varphi(\alpha)$ — монотонно неубывающая и полунепрерывная справа функция.

Рассмотрим произвольную бэровскую функцию $\psi(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ с $0 \leqslant \psi(\alpha) \leqslant 1$. Используя лемму 3.1.4, построим $\psi(B) = \int_0^1 \psi(\alpha)\, dE(\alpha)$ (символически). Тогда $\psi(B) \in \mathbf{M}$, положительно определен, имеет норму $\leqslant 1$ и

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(\psi(B)) = \int_0^1 \psi(\alpha)\, dD_{\mathbf{M}}(E(\alpha)) = \int_0^1 \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

Таким образом, $\psi(B)$ принадлежит классу, рассматриваемому в проблеме (B), тогда и только тогда, когда $\int_0^1 \psi(\alpha)\, d\alpha = \lambda$. Помимо этого, $(\psi(B) g, g) = \int_0^1 \psi(\alpha)\, d(\| E(\alpha) g \|^2)$.

Применим это к $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$, $\psi(B) = \varphi(B) = B_0$. Мы получим $\int_0^1 \varphi(\alpha)\, d\alpha = \lambda$, $\int_0^1 \varphi(\alpha)\, d(\| E(\alpha) g \|^2) = m_b$. В то же время свойство максимальности B_0 дает нам следующее. Для любой бэровской функции $\psi(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, с $0 \leqslant \psi(\alpha) \leqslant 1$ из равенства $\int_0^1 \psi(\alpha)\, d\alpha = \lambda$ следует, что $\int_0^1 \psi(\alpha)\, d(\| E(\alpha) g \|^2) \leqslant m_b$.

Если бы оказалось, что $\varphi(1 - \lambda) = 0$, то монотонность $\varphi(\alpha)$ влекла бы $\varphi(\alpha) = 0$ для $0 \leqslant \alpha \leqslant 1 - \lambda$ и полунепрерывность справа $\varphi(\alpha) \leqslant 1/2$ для $1 - \lambda < \alpha \leqslant 1 - \lambda + \varepsilon'$ с подходящим $\varepsilon' > 0$. Кроме того, $\varphi(\alpha)$ всегда $\leqslant 1$. Поэтому

$$\int_0^1 \varphi(\alpha)\, d\alpha \leqslant 0 \cdot (1 - \lambda) + {}^1/_2 \varepsilon' + (\lambda - \varepsilon') \cdot 1 = \lambda - {}^1/_2 \varepsilon' < \lambda,$$

что противоречит $\int_0^1 \varphi(\alpha)\, d\alpha = \lambda$. Значит, $\varphi(1 - \lambda) > 0$.

Если бы оказалось, что $\varphi(1 - \lambda - 0) = 1$, то монотонность $\varphi(\alpha)$ влекла бы $\varphi(\alpha) = 1$ для $1 - \lambda \leqslant \alpha \leqslant 1$, а определение $\varphi(1 - \lambda - 0)$ — $\varphi(\alpha) \geqslant 1/2$ для $1 - \lambda - \varepsilon' \leqslant \alpha < 1 - \lambda$ с некоторым подходящим $\varepsilon' > 0$. Кроме того, $\varphi(\alpha)$ всегда $\geqslant 0$. Поэтому

$$\int_0^1 \varphi(\alpha)\, d\alpha \geqslant (1 - \lambda - \varepsilon') \cdot 0 + \varepsilon'/2 + \lambda \cdot 1 = \lambda + \varepsilon'/2 > \lambda,$$

что противоречит $\int_0^1 \varphi(\alpha)\, d\alpha = \lambda$. Поэтому $\varphi(1 - \lambda - 0) < 1$.

Итак, мы можем выбрать некоторое δ, $0 < \delta < 1$, при котором $\varphi(1 - \lambda) > \delta$ и $\varphi(1 - \lambda - 0) < 1 - \delta$. При этом из $1 - \lambda \leqslant \alpha \leqslant 1$ следует, что $(\varphi(\alpha) - \delta)/(1 - \delta) \geqslant (\varphi(1 - \lambda) - \delta)/(1 - \delta) \geqslant 0$ и $\leqslant (1 - \delta)/(1 - \delta) = 1$, а из $0 \leqslant \alpha \leqslant 1 - \lambda$ следует, что $\varphi(\alpha)/(1 - \delta) \geqslant 0$ и $\leqslant (1 - \delta)/(1 - \delta) = 1$. Положим теперь $\varphi_1(\alpha) = 1$ для $1 - \lambda \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $\varphi_1(\alpha) = 0$ для $0 \leqslant \alpha < 1 - \lambda$. Тогда мы получаем $0 \leqslant \varphi_1(\alpha) \leqslant 1$ при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а также $0 \leqslant \varphi_2(\alpha) \leqslant 1$ для

$\varphi_2(\alpha) = (\varphi(\alpha) - \delta\,\varphi_1(\alpha))/(1-\delta)$ при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (мы доказали это ранее отдельно для $1-\lambda \leqslant \alpha \leqslant 1$ и для $0 \leqslant \alpha \leqslant 1-\lambda$). Кроме того,

$$\varphi(\alpha) = \delta\varphi_1(\alpha) + (1-\delta)\,\varphi_2(\alpha). \qquad (*)$$

Далее, ясно, что $\int_0^1 \varphi_1(\alpha)\,d\alpha = \lambda$. Это, $\int_0^1 \varphi(\alpha)\,d\alpha = \lambda$ и $(*)$ дают $\int_0^1 \varphi_2(\alpha)\,d\alpha = \lambda$. Поэтому $\int_0^1 \varphi_1(\alpha)\,d(\|E(\alpha)g\|^2) \leqslant m_b$. Но $(*)$ дает нам

$$\delta\int_0^1 \varphi_1(\alpha)\,d(\|E(\alpha)g\|^2) + (1-\delta)\int_0^1 \varphi_2(\alpha)\,d(\|E(\alpha)g\|^2) =$$
$$= \int_0^1 \varphi(\alpha)\,d(\|E(\alpha)g\|^2) = m_b.$$

Отсюда с необходимостью следует, что $\int_0^1 \varphi_1(\alpha)\,d(\|E(\alpha)g\|^2) = m_b$. Другими словами, для $B_1 = \varphi_1(B)$, принадлежащему классу проблемы (B), мы имеем $(B_1 g, g) = m_b$.

Поэтому $B_1 = \varphi_1(B)$ тоже является решением проблемы (B). Легко видеть, однако, что $B_1 = \varphi_1(B) = 1 - E(\lambda)$, а поэтому B_1 является проектором.

Поэтому замена B_0 на B_1 завершает доказательство.

Лемма 3.2.3. *Проблемы* (A) *и* (B) *имеют общее решение* $E_0 = B_0$, *а для максимумов мы имеем* $m_a = m_b$.

Класс проекторов E из проблемы (A), очевидно, является подклассом всех B из проблемы (B): он состоит из всех проекторов последнего класса. (Это так, ибо для проекторов E имеем $D_{\mathbf{M}}(E) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E)$ (см. К. О., лемма 15.3.1).) Далее, лемма 3.2.2 гласит, что существует решение проблемы (B), являющееся проектором, а потому принадлежащее классу проблемы (A). Поэтому оно является одновременно решением проблемы (A), и $m_a = m_b$.

Если задан проектор $G = P_{\mathfrak{N}} \in \mathbf{M}$, проблемы (A) и (B) можно модифицировать следующим образом: заменим $\mathfrak{H}$, $\mathbf{M}$ на $\mathfrak{N}$, $\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}$ (см. К. О., п. 11.3). Тогда $D_{\mathbf{M}}(E)$ заменится на $D_{\mathbf{M}}(E)/D_{\mathbf{M}}(G)$ для того, чтобы сохранить стандартную нормировку, и, значит, нормировка п. 1. 1 потребует замены $D_{\mathbf{M}'}(E')$ на $D_{\mathbf{M}'}(E')/D_{\mathbf{M}}(G)$. При этом α заменится на $\alpha/D_{\mathbf{M}}(G)$, так что неравенство $\alpha \geqslant 1$ сохранится. Лемму 3.2.3. следует изменить, подставив $\lambda/D_{\mathbf{M}}(G)$ вместо λ, а $\mathbf{M}$ в проблемах (A) и (B) нужно заменить на $\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}$. Последнее означает, что проекторы $F \in \mathbf{M}$ должны быть $\leqslant G$, а операторы $B \in \mathbf{M}$ удовлетворять соотношению $BG = GB = B$.

Комбинируя это с соответствующими изменениями в лемме 3.2.1 (отметим, что $(B_0 g, g) = (E_0 g, g) = \|E_0 g\|^2$), мы получим

Следствие. *Пусть задан проектор* $G \in \mathbf{M}$. *Заменим проблемы* (A) *и* (B) *проблемами* (A_G) *и* (B_G), *которые получаются путем введения следующих дополнительных ограничений: в* (A_G) *проекторы* $F \in \mathbf{M}$ *удовлетворяют условию* $F \leqslant G$, *а в* (B_G) *операторы* $B \in \mathbf{M}$ *удовлетворяют условию* $BG = GB = B$. *Предположим, что* $0 \leqslant \lambda \leqslant D_{\mathbf{M}}(G)$. *Тогда проблемы* (A_G) *и* (B_G) *обладают общим решением* $E_0 = B_0$, *и мы имеем для максимума* $K^{-1}\|E_0 g\|^2 \leqslant m_a = m_b \leqslant K\|E_0 g\|^2$.

3.3. Мы считаем g фиксированным и введем следующее

Определение 3.3.1. *Пусть E, G — два проектора $\in \mathbf{M}$ и $E \leqslant G$. Мы скажем, что E приводит g относительно G, если для каждого $A \in \mathbf{M}$ с $AG = GA = A$*

$$(AEg, g) = (EAg, g).$$

Если G может быть выбран равным 1, мы будем говорить, что E приводит g

Лемма 3.3.1. *Пусть G — проектор $\in \mathbf{M}$, E_0 — решение проблемы (A_G) (см. следствие леммы 3.2.3). Тогда E_0 приводит g относительно G.*

Если U унитарен, $\in \mathbf{M}$ и коммутирует с G, то $U^{-1}E_0U$ является проектором, $\in \mathbf{M}$, он $\leqslant U^{-1}GU = G$, и $D_{\mathbf{M}}(U^{-1}E_0U) = D_{\mathbf{M}}(E_0) = \lambda$. Таким образом, $(U^{-1}E_0Ug, g) \leqslant (E_0g, g)$. Но $(U^{-1}E_0Ug, g) = (U^*E_0Ug, g) = (E_0Ug, Ug)$. Значит, $(E_0g, g) - (E_0Ug, Ug) \geqslant 0$.

Пусть A эрмитов, $\in \mathbf{M}$ и коммутирует с G. Положим $\varphi_\varepsilon(\alpha) = (1 + i\varepsilon\alpha)/(1 - i\varepsilon\alpha)$ с некоторым $\varepsilon \gtrless 0$. Поскольку $|\varphi_\varepsilon(\alpha)| = 1$, то $U_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(A)$ унитарен, $\in \mathbf{M}$ и коммутирует с G вместе с A. Далее, $\varphi_\varepsilon(\alpha) = 1 + 2i\varepsilon\alpha + \varepsilon^2\psi_\varepsilon(\alpha)$, где $\psi_\varepsilon(\alpha) = -2\alpha^2/(1 - i\varepsilon\alpha)$. Поэтому $|\psi_\varepsilon(\alpha)| \leqslant 2D^2$, если $|\alpha| \leqslant D$, а потому $|||\psi_\varepsilon(A)||| \leqslant 2|||A|||^2$ (см., например, [16, с. 113, теорема 4*]). Теперь

$$0 \leqslant (E_0g, g) - (E_0Ug, Ug) = (E_0g, g) - (E_0(1 + 2i\varepsilon A + \varepsilon^2\psi_\varepsilon(A))g, (1 + 2i\varepsilon A + \varepsilon^2\psi_\varepsilon(A))g) = 2\varepsilon(i(AE_0 - E_0A)g, g) + O(\varepsilon^2).$$

Поэтому

$$2\varepsilon i((AE_0 - E_0A)g, g) + O(\varepsilon^2) \geqslant 0.$$

Поскольку $\varepsilon \gtrless 0$, отсюда следует $((AE_0 - E_0A)g, g) = 0$, т. е.

$$(AE_0g, g) = (E_0Ag, g).$$

Это равенство с эрмитовых $A \in \mathbf{M}$ распространяется на все $A \in \mathbf{M}$, коммутирующие с G. Для такого A положим $A_1 = {}^1/_2(A + A^*)$, $A_2 = -{}^1/_2 i(A - A^*)$; наше равенство выполняется для A_1, A_2, а значит, и для $A = A_1 + iA_2$. Таким образом, мы установили, что E_0 приводит g относительно G.

Лемма 3.3.2. *Если E приводит g относительно G, а G приводит g, то и E приводит g.*

Мы должны доказать, что для всякого $A \in \mathbf{M}$, $(AEg, g) = (EAg, g)$. Имеем

$$(EAg, g) = (GEAg, g) = (G(EA)g, g) = ((EA)Gg, g) = (EGAGg, g) = (GAGEg, g) = (GAEg, g) = ((AE)Gg, g) = (AEg, g).$$

Лемма 3.3.3. *Если $\{E_i\}$ — последовательность проекторов, $E_i \in \mathbf{M}$, каждый из которых приводит g, и $E_iE_j = 0$ при $i \neq j$, то и $\sum_{i=1}^{\infty} E_i$ приводит g. Если E_1 и E_2 приводят g и $E_1 \geqslant E_2$, то и $E_1 - E_2$ приводит g.*

Это очевидно, ибо из $A \in \mathbf{M}$ следует ограниченность A.

Лемма 3.3.4. *Пусть $\{E_i\}$ — последовательность с теми же свойствами, что и в лемме 3.3.3. Положим $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$. Тогда для $A \in \mathbf{M}$*

$$(EAg, g) = (AEg, g) = (EAEg, g) = \sum_{i=1}^{\infty}(E_iAE_ig, g).$$

Кроме того, если E приводит g, $EF=0$ и $F \in \mathbf{M}$, то $(EAFg, g)=(FAEg, g)=0$.

Имеем $(EAg,g) = (E(EA)g,g) = (EAEg,g) = (E(AE)g,g) = ((AE)Eg,g) = (AEg,g)$. Отсюда получается $(EAg,g) = \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_i\right) Ag, g\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (E_i Ag, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (E_i A E_i g, g)$ и $(EAFg, g) = (E(AF)g,g) = ((AF)Eg,g)(A(FE)g,g) = 0 = ((EF)Ag,g) = (E(FA)g,g) = ((FA)Eg,g) = (FAEg,g)$.

Лемма 3.3.5. *Пусть $\{E_i\}$ — последовательность взаимно ортогональных проекторов. Если $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ и A и $E_i \in \mathbf{M}$, то*

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(EAE) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E_i A E_i).$$

Согласно свойству III, (vi) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(EAE) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AE \cdot E) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AE)$. Аналогичным образом $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E_i A E_i) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AE_i)$. Согласно свойству III, ($*$) и (iii) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AE) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} AE_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AE_i)$. Поэтому $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(EAE) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E_i A E_i)$. Отметим, что попутно мы доказали сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E_i A E_i)$.

Лемма 3.3.6. *Пусть $\{E_i\}$ — последовательность проекторов, причем каждый $E_i \geqslant_p \lambda$ ($\leqslant_p \lambda$) для g. Предположим далее, что каждый E_i приводит g и $E_i \cdot E_j = 0$ при $i \neq j$. Тогда $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \geqslant_p \lambda$ ($\leqslant_p \lambda$).*

Пусть A положительно определен, $\in \mathbf{M}$ и $EA = AE = A$. Тогда согласно лемме 3.3.4

$$(Ag, g) = (EAg, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (E_i A E_i g, g).$$

Далее, $E_i A E_i$ положительно определен и не меняется при умножении справа или слева на E_i. Поэтому из леммы 1.4.2 следует $(E_i A E_i g, g) \geqslant \lambda \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E_i A E_i)$. Тогда согласно лемме 3.2.6

$$(Ag, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (E_i A E_i g, g) \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E_i A E_i) = \lambda \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A).$$

Теперь из леммы 1.4.2 следует, что $E \geqslant_p \lambda$.

3.4. Мы по-прежнему считаем, что g фиксирован.

Лемма 3.4.1. *Пусть $E \neq 0$ — проектор, $\in \mathbf{M}$ и $a \leqslant_p E \leqslant {}_p b$. Пусть нам задано число λ с $0 < \lambda < D_{\mathbf{M}}(E)$. Тогда существует проектор $E_0 \in \mathbf{M}$, обладающий следующими свойствами:* (i) $E_0 \leqslant E$; (ii) $D_{\mathbf{M}}(E_0) = \lambda$; (iii) E_0 *приводит* g *относительно* E; (iv) *существует такое* ξ_0, *что* $a \leqslant_p E - E_0 \leqslant_p \xi_0 \leqslant_p E_0 \leqslant_p b$.

Рассмотрим решение E_0 проблемы (A_G) из следствия леммы 3.2.3 с $G = E$. Оператор E_0 является проектором, $\in \mathbf{M}$, удовлетворяет (i), (ii) по определению и (iii) согласно лемме 3.3.1. Что касается (iv), то по лемме 1.2.3 и E_0, и $E - E_0$ оба $\geqslant_p a$ и $\leqslant_p b$ вместе с E.

Таким образом, нам осталось только найти ξ, для которого $E - E_0 \leqslant_p \xi \leqslant_p E_0$. Обозначим через Γ' множество всех η, для которых существует $F \leqslant E_0$ с $F < \eta$; через Γ'' обозначим множество всех η, для которых существует $F \leqslant E - E_0$ с $F > \eta$. Γ' и Γ'' являются открытыми интервалами, причем, очевидно, каждое $\eta > b$ принадлежит Γ', а каждое $\eta < a$ — принадлежит Γ''. Поэтому или

Γ' и Γ'' имеют общий элемент ξ_1, или найдется такое ξ_0, что каждое η из Γ' будет $\geqslant \xi_0$, а каждое η из Γ'' — $\leqslant \xi_0$.

В последнем случае из $F \leqslant E_0$ следует $F \geqslant \eta$ для всех $\eta \leqslant \xi_0$, а потому $F \geqslant \geqslant \xi_0$, т. е. $E_0 \geqslant_p \xi_0$. Аналогичным образом $E - E_0 \leqslant_p \xi_0$. Значит, в этом случае мы доказали оставшуюся часть (iv).

Если имеет место первый случай, то для некоторого подходящего $\delta > 0$ даже $\xi_1 - \delta$ лежит в Γ' и $\xi_1 + \delta$ — в Γ''. Поэтому существуют $F_1 \leqslant E_0$ с $F_1 < \xi_1 - \delta$ и $F_2 \leqslant E - E_0$ с $F_2 \geqslant \xi_1 + \delta$. Согласно лемме 1.2.2 существуют проекторы F_3 и F_4 (оба $\neq 0$), для которых $F_3 \leqslant F_1$, $F_4 \leqslant F_2$ и $F_3 \leqslant_p \xi_1 - \delta$, $F_4 \geqslant_p \xi_1 + \delta$. Мы можем считать, что $D_{\mathbf{M}}(F_3) = D_{\mathbf{M}}(F_4)$, ибо в противном случае можно заменить F_3, F_4 на $F'_3 \leqslant F_3$ и $F'_4 \leqslant F_4$ с $D_{\mathbf{M}}(F'_3) = D_{\mathbf{M}}(F'_4) = \min(D_{\mathbf{M}}(F_3), D_{\mathbf{M}}(F_4))$ (см. лемму 1.2.3).

Теперь поскольку $F_3 \leqslant E_0$ и $F_4 \leqslant E - E_0$, то $E_0 - F_3 + F_4$ — проектор и $\leqslant E$; при этом

$$D_{\mathbf{M}}(E_0 - F_3 + F_4) = D_{\mathbf{M}}(E_0) - D_{\mathbf{M}}(F_3) + D_{\mathbf{M}}(F_4) = D_{\mathbf{M}}(E_0) = \lambda,$$

в то время как

$$((E_0 - F_3 + F_4)g, g) = (E_0 g, g) - (F_3 g, g) + (F_4 g, g) \geqslant m_a -$$
$$- (\xi_1 - \delta) D_{\mathbf{M}}(F_3) + (\xi_1 + \delta) D_{\mathbf{M}}(F_4) \geqslant m_a - (\xi_1 - \delta) D_{\mathbf{M}}(F_3) +$$
$$+ (\xi_1 + \delta) \quad {}_{\mathbf{M}}(F_3) = m_a + 2\delta D_{\mathbf{M}}(F_3) > m_a$$

— в противоречии с максимальностью m_a. Значит, этот случай вообще не может иметь места.

Таким образом, доказательство закончено.

Лемма 3.4.2. *Для всех* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *мы можем определить семейство проекторов* $E(\alpha)$ *и функцию* $\xi(\alpha)$ *с такими свойствами*: (i) $E(0) = 0$, $E(1) = 1$; (ii) *из* $\alpha \leqslant \beta$ *следует* $E(\alpha) \leqslant E(\beta)$; (iii) $\xi(0) = K$, $\xi(1) = K^{-1}$; (iv) *из* $\alpha \leqslant \beta$ *следует* $\xi(\alpha) \geqslant \xi(\beta)$; (v) $D_{\mathbf{M}}(E(\alpha)) = \alpha$; (vi) $E(\alpha)$ *приводит* g; (vii) *из* $\alpha < \beta$ *следует* $\xi(\beta - 0) \leqslant_p E(\beta) - E(\alpha) \leqslant_p \xi(\alpha + 0)$.

Выберем последовательность $\rho_1, \rho_2, \ldots$ с $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = 1$, которая лежит и всюду плотна в $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Мы определим $E(\alpha)$ и $\xi(\alpha)$ для $\alpha = \rho_1, \rho_2, \ldots$ так, что они будут удовлетворять условиям (i)—(vi) и условию (vii)′ $E(\alpha) \geqslant_p \xi(\alpha)$, $1 - E(\alpha) \leqslant_p \xi(\alpha)$ для всех $\alpha = \rho_1, \rho_2, \ldots$

Положим сначала $E(0) = 0$, $E(1) = 1$, $\xi(0) = K$ и $\xi(1) = K^{-1}$. При этом мы позаботились об $\alpha = \rho_1, \rho_2$ и для $\alpha = \rho_1, \rho_2$ выполнены условия (i)—(vi) и (vii)′. Предположим теперь, что при $j = 3, 4, \ldots$ определены $E(\alpha)$ и $\xi(\alpha)$ для $\alpha = \rho_1, \ldots, \rho_{j-1}$, причем условия (i)—(vi) и (vii)′ выполнены для всех $\alpha = \rho_1, \ldots, \rho_{j-1}$, теперь мы определим $E(\rho_j)$ и $\xi(\rho_j)$ с сохранением свойств (i)—(vi), (vii)′.

Рассмотрим ρ_i, $i = 1, \ldots, j-1$, с $\rho_i \leqslant \rho_j$ (они существуют: $\rho_1 = 0 \leqslant \rho_j$); пусть $\rho_{i'}$ — наибольшее из них. Рассмотрим ρ_i, $i = 1, \ldots, j-1$, с $\rho_i \geqslant \rho_j$ (они существуют: $\rho_2 = 1 \geqslant \rho_j$); пусть $\rho_{i''}$ — наименьшее из них. Поскольку $\rho_{i'}, \rho_{i''} \neq \rho_j$, мы имеем $\rho_{i'} < \rho_j < \rho_{i''}$. Поэтому (ii) дает $E(\rho_{i'}) \leqslant E(\rho_{i''})$, а (v) дает $D_{\mathbf{M}}(E(\rho_{i''}) - E(\rho_{i'})) = \rho_{i''} - \rho_{i'} > \rho_j - \rho_{i'} > 0$.

Применим теперь лемму 3.4.1 к $E=E(\rho_{i''})-E(\rho_{i'})$, $\lambda=\rho_j-\rho_{i'}$ с $a=\xi(\rho_{i''})$, $b=\xi(\rho_{i'})$. Благодаря лемме 1.2.3 и (vii)′ мы имеем $E(\rho_{i''})-E(\rho_{i'})\leqslant E(\rho_{i''})$ и потому $\geqslant_p\xi(\rho_{i''})$, а также $E(\rho_{i''})-E(\rho_{i'})\leqslant 1-E(\rho_{i'})$ и потому $\leqslant_p\xi(\rho_{i'})$. Иными словами, $a\leqslant_p E\leqslant_p b$. В результате получается $E_0\leqslant E(\rho_{i''})-E(\rho_{i'})$ и ξ_0; положим $E(\rho_j)=E(\rho_{i'})+E_0$ (этот проектор $\in\mathbf{M}$) и $\xi(\rho_j)=\xi_0$. Проверим теперь (i) — (vi), (vii)′ для $\alpha=\rho_1,\ldots,\rho_{j-1},\rho_j$. (i), (iii) остались не нарушены.

Единственные новые возможности, появившиеся в (ii), (iv), таковы: $\alpha=\rho_i\leqslant\leqslant\rho_j=\beta$ и $\alpha=\rho_j\leqslant\rho_i=\beta$, где $i=1,\ldots,j-1$. В первом случае $\rho_i\leqslant\rho_{i'}$, так что $E(\alpha)=E(\rho_i)\leqslant E(\rho_{i'})\leqslant E(\rho_{i'})+E_0=E(\rho_j)=E(\beta)$ и $\xi(\alpha)=\xi(\rho_i)\geqslant\xi(\rho_{i'})=b\geqslant\xi_0==\xi(\rho_j)=\xi(\beta)$. Во втором случае $\rho_i\geqslant\rho_{i''}$, поэтому $E(\beta)=E(\rho_i)\geqslant E(\rho_{i''})==E(\rho_i)+E(\rho_{i''})-E(\rho_{i'})\geqslant E(\rho_{i'})+E_0=E(\rho_j)=E(\alpha)$ и $\xi(\beta)=\xi(\rho_i)\leqslant\xi(\rho_{i''})==a\leqslant\xi_0=\xi(\rho_j)=\xi(\alpha)$. Таким образом, (ii) и (iv) снова выполняются.

В (v) нам нужно только $D_{\mathbf{M}}(E(\rho_j))=\rho_j$. Имеем $D_{\mathbf{M}}(E(\rho_j))=D_{\mathbf{M}}(E(\rho_{i''})+E_0)==D_{\mathbf{M}}(E(\rho_{i'}))+D_{\mathbf{M}}(E_0)=\rho_{i'}+(\rho_j-\rho_{i'})=\rho_j$.

В (vi) нам нужно лишь доказать, что $E(\rho_j)$ приводит g. Поскольку $E(\rho_j)==E(\rho_{i'})+E_0$, а $E(\rho_{i'})$ приводит g, нам достаточно (используя лемму 3.3.3) доказать, что E_0 приводит g. Но согласно лемме 3.4.1, (iii) E_0 приводит g относительно $E=E(\rho_{i''})-E(\rho_{i'})$, а $E(\rho_{i''})-E(\rho_{i'})$ приводит g потому, что его приводят $E(\rho_{i''})$ и $E(\rho_{i'})$ (см. лемму 3.3.3), так что E_0 приводит g согласно лемме 3.3.2. Таким образом, и свойство (vi) сохраняется.

В (vii)′ нам нужно $E(\rho_j)\geqslant_p\xi(\rho_j)$ и $1-E(\rho_j)\leqslant_p\xi(\rho_j)$. Имеем $E(\rho_j)==E(\rho_{i'})+E_0$ и согласно лемме 3.4.1, (iv) $E(\rho_{i'})\geqslant_p\xi(\rho_{i'})\geqslant\xi(\rho_j)$; $E_0\geqslant{}_p\xi_0==\xi(\rho_j)$, тогда по лемме 3.3.6 $E(\rho_j)\geqslant_p\xi(\rho_j)$. С другой стороны, $1-E(\rho_j)==1-E(\rho_{i''})+((E(\rho_{i''})-E(\rho_{i'}))-E_0)$, и согласно лемме 3.4.1 (iv) $1-E(\rho_{i''})\leqslant_p\leqslant_p\xi(\rho_{i''})\leqslant\xi(\rho_j)$, $((E(\rho_{i''})-E(\rho_{i'}))-E_0)=E-E_0\leqslant{}_p\xi_0=\xi(\rho_j)$, так что по лемме 3.3.6 $1-E(\rho_j)\leqslant_p\xi(\rho_j)$. Таким образом, свойство (vii)′ остается выполненным.

Итак, мы проверили (i)—(vi), (vii)′ для $\alpha=\rho_1,\ldots,\rho_{j-1},\rho_j$. При этом мы позаботились обо всех $\alpha=\rho_1,\rho_2,\ldots$, и (i) — (vi), (vii)′ выполняются для всех этих α. Благодаря (ii) и (iv) для всех α с $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ существуют пределы $\lim_{\rho_i\to\alpha,\rho_i>\alpha}E(\rho_i)$ и $\lim_{\rho_i\to\alpha,\rho_i>\alpha}\xi(\rho_i)$. Если α равно ρ_j, то под пределом понимается просто значение в точке ρ_j. Теперь мы можем распространить определения $\xi(\alpha)$ и $E(\alpha)$ на все α, указанные в условии, полагая

$$E(\alpha)=\lim_{\rho_i\to\alpha,\rho_i>\alpha}E(\rho_i),\qquad \xi(\alpha)=\lim_{\rho_i\to\alpha,\rho_i>\alpha}\xi(\rho_i).$$

Такое определение не нарушает утверждения (i), (iii), а (ii), (iv)—(vi) по непрерывности продолжаются на все $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Рассмотрим теперь (vii)′. Предположим, что $\alpha<\beta$. Выберем последовательность ρ_{i_n} с $n=0,\pm1,\ldots$ так, что $\alpha<\ldots<\rho_{i_{-2}}<\rho_{i_{-1}}<\rho_{i_0}<\rho_{i_1}<\rho_{i_2}<\ldots<\beta$ и $\lim_{n\to-\infty}\rho_{i_n}=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}\rho_{i_n}=\beta$. Имеем $\rho_{i_{-1}}>\rho_{i_{-2}}>\ldots>\alpha$, так что $E(\rho_{i_{-1}})\geqslant\geqslant E(\rho_{i_{-2}})\geqslant\ldots\geqslant E(\alpha)$. Поэтому существует $\lim_{n\to\infty}E(\rho_{i_n})$, и он $\geqslant E(\alpha)$. Теперь

мы имеем

$$D_{\mathbf{M}}(\lim_{n\to-\infty} E(\rho_{i_n}) - E(\alpha)) = \lim_{n\to-\infty} D_{\mathbf{M}}(E(\rho_{i_n}) - E(\alpha)) = \lim_{n\to-\infty}\rho_{i_n} - \\ -\alpha = \alpha - \alpha = 0, \qquad \lim_{n\to-\infty} E(\rho_{i_n}) = E(\alpha).$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty} E(\rho_{i_n}) = E(\beta).$$

Поэтому

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (E(\rho_{i_{m+1}}) - E(\rho_{i_m})) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=-n}^{n} (E(\rho_{i_{m+1}}) - E(\rho_{i_m})) = \\ = \lim_{n\to\infty} (E(\rho_{i_n}) - E(\rho_{i_{-n}})) = E(\beta) - E(\alpha).$$

Мы имеем $E(\rho_{i_{m+1}}) - E(\rho_{i_m}) \leqslant E(\rho_{i_{m+1}})$, значит, верно (vii)′ (для $\alpha = \rho_{i_{m+1}}$), и лемма 1.2.3 дает $E(\rho_{i_{m+1}}) - E(\rho_{i_m}) \geqslant_p \xi(\rho_{i_{m+1}}) \geqslant \xi(\beta - 0)$. Тогда лемма 3.3.6 дает $E(\beta) - E(\alpha) \geqslant_p \xi(\beta - 0)$. С другой стороны, мы имеем $E(\rho_{i_{m+1}}) - E(\rho_{i_m}) \leqslant \leqslant 1 - E(\rho_{i_m})$, поэтому верно (vii)′ (для $\alpha = \rho_{i_m}$), и лемма 1.2.3 дает $E(\rho_{i_{m+1}}) - E(\rho_{i_m}) \leqslant_p \xi(\rho_{i_m}) \leqslant \xi(\alpha + 0)$. Тогда лемма 3.3.6 дает $E(\beta) - E(\alpha) \leqslant_p \xi(\alpha + 0)$. Таким образом, мы доказали, что

$$\xi(\beta - 0) \leqslant_p E(\beta) - E(\alpha) \leqslant_p \xi(\alpha + 0),$$

т. е. (vii).

Мы установили выполнение свойств (i)—(vii) для всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и, таким образом, завершили доказательство.

Лемма 3.4.3. *Пусть α_i, $i = 0, 1, \ldots, n$,— такое множество чисел, что $0 = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n-1} \leqslant \alpha_n = 1$, и пусть λ_i, $i = 1, \ldots, n$,— множество вещественных положительных чисел. Положим (с $E(\alpha)$ и $\xi(\alpha)$ из леммы 3.4.2)*

$$g' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (E(\alpha_i) - E(\alpha_{i-1}))\, g,$$

$$C_1 = \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i^2 \xi(\alpha_{i-1} + 0), \qquad C_2 = \min_{i=1,\ldots,n} \lambda_i^2\, \xi(\alpha_i - 0).$$

Тогда для всех положительно определенных $A \in \mathbf{M}$

$$C_1 \,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) \geqslant (Ag', g') \geqslant C_2 \,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A).$$

Имеем

$$(Ag', g') = \Big(A \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (E(\alpha_i) - E(\alpha_{i-1}))\Big) g, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (E(\alpha_i) - E(\alpha_{i-1}))\, g) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \,(A(E(\alpha_i) - E(\alpha_{i-1}))\, g, \ (E(\alpha_j) - E(\alpha_{j-1}))\, g) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \,((E(\alpha_i) - E(\alpha_{i-1}))\, A\, (E(\alpha_j) - E(\alpha_{j-1}))\, g, g).$$

Поскольку каждый $E(\alpha_k) - E(\alpha_{k-1})$ приводит g (по лемме 3.4.2, (vi) и лемме 3.3.3) и $(E(\alpha_j) - E(\alpha_{j-1}))(E(\alpha_i) - E(\alpha_{i-1})) = 0$ при $i \neq j$, лемма 3.3.4 позволяет нам опустить из суммы $\sum_{i,j=1}^{n}$ все слагаемые с $i \neq j$. Поэтому она

превращается в $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2((E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))A(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1})g,g)$. Далее, $E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1})\leqslant_p\xi(\alpha_{i-1}+0)$ по лемме 3.4.2, (vii). Поэтому из леммы 1.4.1 очевидно, что $((E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))A(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))g,g)\leqslant\xi(\alpha_{i-1}+0)\operatorname{Tr}_M((E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))A(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1})))$. Тогда

$$(Ag',g')\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\xi(\alpha_{i-1}+0)\operatorname{Tr}_M((E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))A(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1})))\leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Tr}_M((E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))A(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1})))\leqslant C_1\operatorname{Tr}_M(A)$$

(используя лемму 3.3.5). Аналогичным образом по лемме 3.4.2, (vii) $E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1})\geqslant_p\xi(\alpha_i-0)$. Поэтому лемма 1.4.1 дает $((E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))A(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))g,g)\geqslant\xi(\alpha_i-0)\operatorname{Tr}_M((E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))A(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1})))$. Тогда

$$(Ag',g')\geqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\xi(\alpha_i-0)\operatorname{Tr}_M((E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))A(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1})))\geqslant$$
$$\geqslant C_2\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Tr}_M((E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))A(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))=C_2\operatorname{Tr}_M(A)$$

(с использованием леммы 3.3.5). Доказательство закончено.

3.5. Теперь мы можем сделать решающий шаг.

Лемма 3.5.1. *Пусть g и K такие же, как в теореме* I. *Пусть далее K' — любое число, для которого $1<K'\leqslant K$. Тогда найдется вектор g', связанный с K' так же, как g с K в теореме* I, *и такой, что*

$$\|g'-g\|\leqslant(K-1)K^{1/2}.$$

Пусть n — наименьшее положительное целое число, для которого $(K')^n\geqslant K$. Положим $\theta=K^{1/n}$, так что $1<\theta\leqslant K'$. Выберем такие числа α_i, $i=0,1,\dots,n$, что $0=\alpha_0\leqslant\alpha_1\leqslant\dots\leqslant\alpha_{n-1}\leqslant\alpha_n=1$ и $\xi(\alpha_i+0)\leqslant\theta^{n-2i}\leqslant\xi(\alpha_i-0)$. (Для $i=0$ $\theta^{n-2i}=\theta^n=K$; для $i=n$ $\theta^{n-2i}=\theta^{-n}=K^{-1}$.) Положим $\lambda_i=\theta^{i-(n+1)/2}$. Теперь применим лемму 3.4.3. Мы получаем $\lambda_i^2\xi(\alpha_{i-1}+0)\leqslant\theta^{2i-(n+1)}\theta^{n-2(i-1)}=\theta\leqslant K'$ и $\lambda_i^2\xi(\alpha_i-0)\geqslant\theta^{2i-(n+1)}\theta^{n-2i}\geqslant\theta^{-1}\geqslant(K')^{-1}$, так что $C_1\leqslant K'$ и $C_2\geqslant(K')^{-1}$. Поэтому вектор g' из леммы для каждого положительно определенного $A\in\mathbf{M}$ дает: $K'\operatorname{Tr}_M(A)\geqslant(Ag',g')\geqslant(K')^{-1}\operatorname{Tr}_M(A)$, т. е. $K'(Ag'.g')\geqslant\operatorname{Tr}_M(A)\geqslant(K')^{-1}(Ag',g')$. Значит, он связан с K' так же, как g с K в теореме I.

Вычислим теперь $\|g'-g\|$. Проекторы $E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1})$, $i=1,\dots,n$, взаимно ортогональны, поэтому и $(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))g$, $i=1,\dots,n$, взаимно ортогональны. Итак, мы имеем

$$\|g'-g\|^2=\Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))g-\sum_{i=1}^{n}(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))g\Big\|^2=$$
$$=\Big\|\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-1)(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))g\Big\|^2=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-1)^2\|(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))g\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\max_{i=1,\dots,n}(\lambda_i-1)^2\sum_{i=1}^{n}\|(E(\alpha_i)-E(\alpha_{i-1}))g\|^2=\max_{i=1,\dots,n}(\lambda_i-1)^2\|g\|^2.$$

Теперь, очевидно,

$$\max_{i=1,\ldots,n}(\lambda_i - 1)^2 = (\lambda_n - 1)^2 = (\theta^{(n+1)/2} - 1)^2 \leqslant (\theta^n - 1)^2 = (K-1)^2,$$

так что $\| g' - g \| \leqslant (K-1)\| g \|$.

Но при $A = 1$ теорема I дает

$$\| g \|^2 = (g, g) \leqslant K\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(1) = K, \qquad \| g \| \leqslant K^{1/2}.$$

Поэтому $\| g' - g \| \leqslant (K-1)K^{1/2}$. Таким образом, доказательство завершено.

Пусть $K_i = 1 + 2^{-(i+2)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Определим по индукции последовательность векторов g_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть g_0 связан с K_0 так же, как g с K в теореме I. Предположим, что g_i уже определен и связан с K_i как в теореме I. Положим затем в лемме 3.5.1 $g = g_i$, $K = K_i$, $K' = K_{i+1}$. После этого мы положим g_{i+1} равным g'. Тогда g_{i+1} и K_{i+1} окажутся связанными как g и K в теореме I, а кроме того, мы получим

$$\| g_{i+1} - g_i \| \leqslant (K_i - 1)K_i^{1/2} = (1/2^{i+2})K_i^{1/2} \leqslant 1/2^{i+1}.$$

Тогда для $p > 0$

$$\| g_{n+p} - g_n \| = \left\| \sum_{i=n}^{n+p-1} (g_{i+1} - g_i) \right\| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} \| g_{i+1} - g_i \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} 1/2^{i+1} \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} 1/2^{i+1} = 1/2^n.$$

Отсюда следует, что g_i удовлетворяют критерию Коши. Пусть их пределом является g, а A — снова положительно определенный оператор $\in \mathbf{M}$. Тогда, поскольку A ограничен,

$$(Ag, g) = \lim_{i\to\infty} K_i (Ag_i, g_i) \geqslant \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) \geqslant \lim_{i\to\infty} K_i^{-1}(Ag_i, g_i) = (Ag, g).$$

Таким образом, если $A \in \mathbf{M}$, положительно определен, $(Ag, g) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$.

Для эрмитова $A \in \mathbf{M}$ мы имеем, как было показано в п. 2.1 непосредственно после свойства II, $A = A_1 - A_2$, где A_1 и $A_2 \in \mathbf{M}$ и положительно определены. Из свойства I п. 2.1 тогда следует, что $(Ag, g) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$. Если A просто $\in \mathbf{M}$, то из определения 2.2.1 теперь следует, что $(Ag, g) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$. Таким образом, нами доказана

Теорема II. *Пусть* $\mathbf{M}$ — *фактор типа* II *с* $\alpha \geqslant 1$ (*в нормировке* п. 1.1. *В нормировке* К. О., *теоремы* VIII, *это означает, что* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ *принадлежат случаю* II_1, II_∞ *или* II_1, II_1 *с* $C \leqslant 1$ *при стандартной нормировке.*) *Тогда существует такой вектор* $g \in \mathfrak{H}$, *что*

$$(Ag, g) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A).$$

Теперь мы устраним ограничение $\alpha \geqslant 1$. Пусть $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ принадлежат случаю II_1, II_1, $\alpha < 1$ и пусть m — такое натуральное число, что $m\alpha \geqslant 1$, или, в стандартной нормировке теоремы X из К. О., $C/m \leqslant 1$. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_m$ — m проекторов, каждый из которых $\in \mathbf{M}$, причем $D_{\mathbf{M}}(E_i) = 1/m$ и $E_iE_j = 0$ при $i \neq j$. Область значений E_i обозначим через $\mathfrak{M}_i$. Напомним п. 11.3 из К. О., употребляя $\mathfrak{M}_i$ в качестве $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_i)} = \mathbf{M}_i$ и $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}_i)} = \mathbf{M}'_i$ из определения 11.3.1. Согласно лемме 11.3.2 они образуют факторизацию в $\mathfrak{M}_i$. Теперь мы можем принять для такого $A \in \mathbf{M}$, что $E_i A = A E_i = A$, $D_{\mathbf{M}_i}(AE_i) = D_{\mathbf{M}}(A)$, а для $A' \in \mathbf{M}'$ — $D_{\mathbf{M}'_i}(A'E_i) = D_{\mathbf{M}'}(A')$, где $D_{\mathbf{M}_i}$ и $D_{\mathbf{M}'_i}$ — функции размерности в $\mathbf{M}_i$ и $\mathbf{M}'_i$ соответственно (лемма 11.3.6).

Согласно лемме 11.3.7 областями значений $D_{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}$ и $D_{\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M})}}$ являются интервалы $(0, 1/m)$ и $(0, \alpha)$ соответственно. Значит, мы можем получить стандартную нормировку теоремы X из К. О., умножая их на m и $1/\alpha$ соответственно. Но в этой последней нормировке по лемме 11.4.3 $C = (D_{\mathbf{M}}(E_i)/D_{\mathbf{M}'}(1))\, C_0 = C_0/m \leqslant 1$, где $D_{\mathbf{M}}$ и $D_{\mathbf{M}'}$ относятся к стандартной нормировке $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ из К. О., теорема X.

Согласно сформулированной выше теореме II отсюда следует, что существует такой $g_i^0 \in \mathfrak{M}_i$, что если $A_0 \in \mathbf{M}_i$, то $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}'}(A_0) = (A_0 g_i^0, g_i^0)$. Положим теперь $A_0 = A_{E_i}$ для таких $A \in \mathbf{M}$, что $E_i A = A E_i = A$. Из предыдущего можно усмотреть, что $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = (1/m)\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}_i}(A_0) = (1/m)\,(A_0 g_i^0, g_i^0) = (1/m)\,(A g_i^0, g_i^0) = (A g_i, g_i)$, если $g_i = (1/m)^{1/2} g_i^0$.

Теперь если $A \in \mathbf{M}$, то согласно лемме 3.2.6 мы имеем

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E_i A E_i) = \sum_{i=1}^{m} (E_i A E_i g_i, g_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (A E_i g_i, E_i g_i) = \sum_{i=1}^{m} (A g_i, g_i).$$

Если $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ принадлежат случаю I_m, $\mathrm{I}_{m'}$, $m < \infty$, мы поступим следующим образом. Согласно лемме 8.6.1 из К. О. $\mathfrak{H} = E_m \otimes \mathfrak{H}_2$, где E_m — m-мерное евклидово пространство. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — полная ортонормированная система в E_m и $f \in \mathfrak{H}_2$, причем $\|f\| = 1$. Теперь, положив $g_i = \varphi_i \otimes f$, мы легко проверим, что приведенная выше формула для $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}$ сохраняется. Таким образом, у нас получается

Т е о р е м а III. *Если $\mathbf{M}$ — фактор конечного типа, то существует такой конечный набор векторов $g_i \in \mathfrak{H}$, что*

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = \sum_{i=1}^{m} (A g_i, g_i).$$

Предположим, что мы зафиксировали $A \in \mathbf{M}$. Рассмотрим его слабую окрестность $U = U(A; g_1, \ldots, g_m; g_1, \ldots, g_m; \varepsilon/m)$. Из $X \in U$ следует, что $|((X - A)\, g_i, g_i)| < \varepsilon/m$ для $i = 1, 2, \ldots, m$. Если при этом $X \in \mathbf{M}$, наше неравенство вместе с теоремой III влечет за собой $|\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(X) - \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)| < \varepsilon$. Таким образом, доказана

Т е о р е м а IV. *Если $\mathbf{M}$ — фактор конечного типа, то $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ слабо непрерывен.*

Глава IV.

ИЗОМОРФИЗМ М, М′ И $\mathfrak{H}$ (ДЛЯ $\alpha=1$)

4.1. Мы предполагаем, что $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ имеют тип II_1, II_1 и $\alpha = 1$, или, что то же самое, $C = 1$, и мы имеем стандартную нормировку. Из обсуждения в п. 11.3 и 11.4 из К. О. мы знаем, как все остальные случаи типа II могут быть сведены к этому.

Поскольку $\alpha = 1$, справедлива теорема II. Введем

Определение 4.1.1. *Вектор* g, *удовлетворяющий утверждению теоремы* II, *называется равномерно распределенным относительно* $\mathbf{M}$, *или, сокращенно,* g u. d. r. $\mathbf{M}$.

Лемма 4.1.1. *Если* g u. d. r. $\mathbf{M}$, *то* (i) $\|g\| = 1$, (ii) $E_g^{\mathbf{M}'} = 1$, (iii) $E_g^{\mathbf{M}} = 1$ (*см. К. О. определение* 5.1.1).

Чтобы доказать (i), возьмем в теореме II 1 в качестве A. Тогда $1 = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(1) = (g, g) = \|g\|^2$.

Чтобы доказать (ii), возьмем в теореме II $E_g^{\mathbf{M}'}$ в качестве A. Тогда

$$1 = \|g\|^2 = (E_g^{\mathbf{M}'}g, g) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E_g^{\mathbf{M}'}) = D_{\mathbf{M}}(E_g^{\mathbf{M}'}),$$

или $D_{\mathbf{M}}(E_g^{\mathbf{M}'}) = 1$, что при нашей нормировке влечет за собой $E_g^{\mathbf{M}'} = 1$.

Перейдем к (iii). Поскольку мы имеем стандартную нормировку и $C = 1$, то $D_{\mathbf{M}'}(E_g^{\mathbf{M}}) = D_{\mathbf{M}}(E_g^{\mathbf{M}'}) = 1$. Отсюда следует, что $E_g^{\mathbf{M}} = 1$.

Определение 4.1.2. *Пусть* $g \in \mathfrak{H}$. *Пусть далее* $Q_g(\mathbf{M})$ *состоит из всех операторов* $Z \in U(\mathbf{M})$, *т. е.* Z *линеен, замкнут,* $\eta\mathbf{M}$ *и имеет всюду плотную область определения* (*см. К. О., определение* 4.2.1), *причем* Zg *определен.*

Рассмотрим теперь любой $f \in \mathfrak{H}$, для которого $E_f^{\mathbf{M}'} = E_f^{\mathbf{M}} = 1$. Согласно К. О., лемме 9.2.1, если $h \in \mathfrak{H}$, то $h = XYf$, где X и $Y \in U(\mathbf{M})$. Но если $\mathbf{M}$ принадлежит типу II_1, то согласно теореме XV из К. О. $Z = [XY]$ лежит в $U(\mathbf{M})$, а поскольку $Z \supseteq XY$, то Zf существует, и мы имеем также $h = XYf = Zf$; иными словами, любой вектор $h \in \mathfrak{H}$ представим в виде Zf, где $Z \in U(\mathbf{M})$.

Более того, этот оператор Z однозначно определен вектором h. В самом деле, предположим, что Z_1 и $Z_2 \in U(\mathbf{M})$ и таковы, что $Z_1f = Z_2f$, или $(Z_1 - Z_2)f = 0$. Тогда согласно теореме XV из К. О. $[Z_1 - Z_2] \in U(\mathbf{M})$, а поскольку $[Z_1 - Z_2] \supseteq Z_1 - Z_2$, то $[Z_1 - Z_2]f$ существует и равен нулю. Пусть $A' \in \mathbf{M}'$. Тогда поскольку $A'[Z_1 - Z_2] \subseteq [Z_1 - Z_2]A'$, то $[Z_1 - Z_2]A'f = A'[Z_1 - Z_2]f = 0$. Значит, $[Z_1 - Z_2]$ равен нулю на множестве всех $A'f$ с $A' \in \mathbf{M}'$. Но так как $E_f^{\mathbf{M}'} = 1$, это последнее множество плотно всюду в $\mathfrak{H}$. Значит, $[Z_1 - Z_2]$ равен нулю на всюду плотном множестве, а поскольку он замкнут, он должен просто равняться нулю. Тогда из теоремы XV К. О. следует

$$Z_1 = [Z_1 - 0] = [Z_1 - [Z_1 - Z_2]] = [[Z_1 - Z_1] + Z_2] = [0 + Z_2] = Z_2.$$

Итак, нами доказана

Лемма 4.1.2. *Если* f — *такой вектор, что* $E_f^{\mathbf{M}'} = E_f^{\mathbf{M}} = 1$ (*в частности, если* f *является* u. d. r $\mathbf{M}$), *то* $h = Zf$ *определяет взаимно однозначное соответствие между* $\mathfrak{H}$ *и множеством всех* $Z \in U(\mathbf{M})$, *для которых существует* Zf (*т. е. между* $\mathfrak{H}$ *и* $Q_f(\mathbf{M})$).

Поскольку наши предположения, касающиеся f, симметричны относительно $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$, мы также имеем:

Лемма 4.1.3. *Пусть f — такой же вектор, как и в предыдущей лемме 4.1.2. Тогда $h = Z'f$ определяет взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{H}$ и множеством всех $Z' \in U(\mathbf{M}')$, для которых существует $Z'f$ (т. е. $\mathfrak{H}$ и $Q_f(\mathbf{M}')$).*

Таким образом, для $h \in \mathfrak{H}$ мы получили три соответствия, определенных равенствами $Zf = h = Z'f$, если f является u. d. r. $\mathbf{M}$: (1) соответствие $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}$ между $\mathfrak{H}$ и $Q_f(\mathbf{M})$, (2) соответствие $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}'}$ между $\mathfrak{H}$ и $Q_f(\mathbf{M}')$, (3) соответствие $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ между $Q_f(\mathbf{M})$ и $Q_f(\mathbf{M}')$.

4.2. Теперь мы исследуем эти три соответствия. Мы знаем, что они являются взаимно однозначными соответствиями. Они, очевидно, линейны, и, конечно, множества $Q_f(\mathbf{M})$ и $Q_f(\mathbf{M}')$ линейны вместе с $\mathfrak{H}$. Но поскольку $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ является соответствием между операторами, нам бы хотелось выяснить алгебраические свойства этого соответствия, а также некоторые свойства $Q_f(\mathbf{M})$ и $Q_f(\mathbf{M}')$. В частности, мы хотели бы выяснить:

(i) До какой степени операция $[XY]$ может быть определена в $Q_f(\mathbf{M})$ (или $Q_f(\mathbf{M}')$)?

(ii) До какой степени операция X^* может быть определена в $Q_f(\mathbf{M})$ (или $Q_f(\mathbf{M}')$)?

(iii) Инвариантно ли свойство быть ограниченным относительно $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$; иными словами, поскольку $\mathbf{M} \subset Q_f(\mathbf{M})$ и $\mathbf{M}' \subset Q_f(\mathbf{M}')$, то переводит ли $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ $\mathbf{M}$ на $\mathbf{M}'$?

(iv) Являются ли свойства эрмитовости, положительной определенности и унитарности инвариантными относительно $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$?

Лемма 4.2.1. *Если f является* u. d. r. M, *то любой Uf с унитарным $U \in \mathbf{M}$ также является* u. d. r. $\mathbf{M}$.

Если $A \in \mathbf{M}$, то

$$(AUf, Uf) = (U^{-1}AUf, f) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(U^{-1}AU) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A).$$

Лемма 4.2.2. *Если f и g оба являются* u. d. r. $\mathbf{M}$, *то существует унитарный оператор $U' \in \mathbf{M}'$, для которого $g = U'f$.*

Если $h = Af$, $A \in \mathbf{M}$, положим h^* равным Ag. Соответствие $h \rightleftarrows h^*$ линейно, и, поскольку

$$\|h^*\|^2 = \|Ag\|^2 = (Ag, Ag) = (A^*Ag, g) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A^*A) = (A^*Af, f) = (Af, Af) = \\ = \|Af\|^2 = \|h\|^2,$$

оно изометрично. Поэтому равенство $Wh = h^*$ определяет линейный изометрический, а значит и однозначный, оператор W. Поскольку $E_f^{\mathbf{M}} = E_g^{\mathbf{M}} = 1$, как область определения, так и область значений W всюду плотны, поэтому его замыкание $\tilde{W}$ унитарно.

Если теперь h лежит в области определения W, то $h = Af$ с $A \in \mathbf{M}$. Тогда для каждого $B \in \mathbf{M}$ имеем $BWh = Bh^* = BAg = WBAf = WBh$ или $BW \subseteq WB$. Отсюда следует, что $[BW] \subseteq [WB]$. Но $B\tilde{W} = \tilde{B}\tilde{W} \subseteq [BW]$, а из ограниченности

B следует $[WB] = \tilde{W}B$. Значит, $B\tilde{W} \subseteq \tilde{W}B$. В частности, если B унитарен, то из леммы 4.2.2 из К. О. следует, что $\tilde{W}\eta\mathbf{M}'$, а лемма 4.2.1 из К. О. дает $\tilde{W} \in \mathbf{M}'$.

Полагая $A = 1$ в определении W, мы получаем $g = Wf = \tilde{W}f$.

Лемма 4.2.3. *Если f и g являются* u. d. r. **M**, *то существует унитарный оператор $U \in \mathbf{M}$, для которого $g = Uf$.*

Согласно лемме 4.1.2 $g = Zf$ с $Z \in U(\mathbf{M})$. Используя каноническое разложение Z, $Z = BW$, где B самосопряжен и положителен, а W частично изометричен и, как отмечено в доказательстве леммы 1.4.3, может быть взят унитарным, мы получим $g = BWf$, где W унитарен, B самосопряжен и положителен. Нам нужно доказать, что $B = 1$.

Согласно лемме 4.2.1 $f_0 = Wf$ является u.d.r. **M**. Значит, нам нужно доказать, что если f_0 и g_0 являются u. d. r. **M** и $g=Bf_0$, причем B самосопряжен и положителен, то $B = 1$. Пусть $E(\lambda)$ — разложение единицы, соответствующее B. Если $E(\lambda) = 0$ для $\lambda < 1$ и $E(\lambda) = 1$ для $\lambda > 1$, то $B = 1$. Таким образом, если B не равен 1, то или существует $\lambda_1 < 1$, для которого $E(\lambda_1) \neq 0$, или $\lambda_2 > 1$, для которого $E(\lambda_2) \neq 1$. В первом случае мы имеем

$$\|E(\lambda_1)f_0\|^2 = (E(\lambda_1)f_0, E(\lambda_1)f_0) = (E(\lambda_1)f_0, f_0) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E(\lambda_1)) =$$

$$= (E(\lambda_1)g, g) = \|E(\lambda_1)g\|^2 = \|E(\lambda_1)Bf_0\|^2 = \|BE(\lambda_1)f_0\|^2 \leqslant \lambda_1^2\|E(\lambda_1)f_0\|^2,$$

или $(1-\lambda_1^2)\|E(\lambda_1)f_0\|^2 \leqslant 0$. Это влечет за собой

$$0 = \|E(\lambda_1)f_0\|^2 = (E(\lambda_1)f_0, f_0) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E(\lambda_1)) = D_{\mathbf{M}}(E(\lambda_1)),$$

или $E(\lambda_1) = 0$, т. е. противоречие. Во втором случае аналогичные вычисления дают $\|(1-E(\lambda_2))f_0\|^2 = \|B(1-E(\lambda_2))f_0\|^2 \geqslant \lambda_2^2\|(1-E(\lambda_2))f_0\|^2$, откуда снова следует, что $1-E(\lambda_2) = 0$, т. е. опять мы приходим к противоречию. Значит, B должен равняться 1, и наша лемма доказана.

Лемма 4.2.4. *Если f является* u. d. r. **M**, *а $U' \in \mathbf{M}'$ и унитарен, то и $U'f$ является* u. d. r. **M**.

Поскольку $A \in \mathbf{M}$.

$$(AU'f, U'f) = (U'^{-1}AUf, f) = (AU'^{-1}U'f, f) = (Af, f) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A).$$

Лемма 4.2.5. *$\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ ставит унитарным операторам в соответствие унитарные же; иначе говоря, если f —* u.d.r. **M**, *$U \in \mathbf{M}$, $U' \in \mathbf{M}'$ и $Uf = U'f$, то из унитарности одного из операторов U и U' следует унитарность другого.*

Пусть $U \in \mathbf{M}$ унитарен, тогда по лемме 4.2.1 Uf является u.d.r. **M**. При этом из леммы 4.2.2 следует, что существует унитарный оператор $U' \in \mathbf{M}'$, для которого $Uf = U'f$. Поэтому $U \sim U'$ относительно $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$. Аналогичным образом из лемм 4.2.4 и 4.2.3 следует, что для любого унитарного $U' \in \mathbf{M}'$ существует унитарный $U \in \mathbf{M}$, удовлетворяющий условию $U'f = Uf$.

Лемма 4.2.6. *f — u.d.r. **M** эквивалентно f — u.d.r. **M'**.*

Пусть f является u.d.r. **M** и $A' \in \mathbf{M}'$. Рассмотрим $T_0(A') = (A'f, f)$. Эта функция линейна по A'. Согласно лемме 4.1.1,(i) $T_0(1) = 1$. Если A' положителен, то $T_0(A') = (A'f, f) \geqslant 0$. Более того, мы имеем $T_0(A'^*) = (A'^*f, f) = (f, A'f) =$

$= \overline{(A'f, f)} = \overline{T_0(A')}$. Поэтому $T_0(A')$ удовлетворяет (i)—(iv) и п. (v) свойства III с $\mathbf{M}'$ в качестве $\mathbf{M}$.

Теперь нам нужно проверить п.(vi)$'$ того же свойства для $T_0(A')$. Согласно лемме 4.2.5 мы имеем для любого унитарного $U' \in \mathbf{M}'$

$$T_0(U'^{-1}A'U') = (U'^{-1}A'U'f, f) = (A'U'f, U'f) = (A'Uf, Uf) = (U^{-1}A'Uf, f) = \\ = (A'(U^{-1}U)f, f) = (A'f, f) = T_0(A').$$

Поэтому (vi)$'$ выполнено. Теперь из свойства IV п. 2.2 следует, что $T_0(A') = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}'}(A')$, а значит, f является u.d.r. $\mathbf{M}$.

Замена $\mathbf{M}$ на $\mathbf{M}'$ в приведенных выше рассуждениях доказывает и обратное утверждение.

Отметим, что нашим рассуждением попутно доказана

Лемма 4.2.7. *Если $f \in \mathfrak{H}$ — такой вектор, что*: (i) $\| f \| = 1$ *и* (ii) *для любого унитарного $U \in \mathbf{M}$ существует такой унитарный оператор $U' \in \mathbf{M}'$, что $Uf = U'f$, то f является* u.d.r. $\mathbf{M}$.

Теорема V. *Пусть $f \in \mathfrak{H}$ — вектор с $\| f \| = 1$ и пусть $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ принадлежат случаю II_1, II_1 с $C = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(α) *f является* u.d.r. $\mathbf{M}$;

(β) *f является* u.d.r.$\mathbf{M}'$;

(γ) *если $U \in \mathbf{M}$ унитарен, то существует унитарный оператор $U' \in \mathbf{M}'$, для которого $Uf = U'f$*;

(δ) *если $U' \in \mathbf{M}'$ унитарен, то существует унитарный оператор $U \in \mathbf{M}$, для которого $U'f = Uf$.*

Более того, любое из утверждений (α), (β), (γ) *или* (δ) *влечет за собой* $E_f^{\mathbf{M}} = E_f^{\mathbf{M}'} = 1$;

(α) эквивалентно (β) согласно лемме 4.2.6. (α) и (γ) эквивалентны согласно леммам 4.2.5 и 4.2.7. После замены $\mathbf{M}$ на $\mathbf{M}'$ эти леммы показывают также эквивалентность (β) и (δ). Вместе с леммой 4.1.1 это доказывает последнее утверждение теоремы.

Имея в виду теорему V, мы будем говорить, что f равномерно распределен (сокращенно u.d.), если f является u.d.r. $\mathbf{M}$.

Следствие. *Если f является* u.d., *то $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ отображает $\mathbf{M}$ ($\subseteq Q_f(\mathbf{M})$) на $\mathbf{M}'$ ($\subseteq Q_f(\mathbf{M}')$); иначе говоря, свойство ограниченности инвариантно относительно $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$.*

Согласно теореме V свойство унитарности инвариантно относительно $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$. Вместе с линейностью $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ это влечет за собой инвариантность относительно $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ свойства представимости в виде $A = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu U_\nu$ ($n = 1, 2, \ldots, a_\nu$ комплексны, U_ν унитарны и принадлежат $\mathbf{M}$ или $\mathbf{M}'$ вместе с A).

Мы докажем, что $A \in Q_f(\mathbf{M})$ (или $Q_f(\mathbf{M}')$) ограничен, если и только если он представим в такой форме. Поскольку ограниченность оператора A, представленного в этой форме, очевидна, нам нужно доказать лишь представимость в ней любого ограниченного оператора. Поскольку $A = A_1 + iA_2$ с эрмитовыми A_1 и A_2, достаточно будет доказать это для эрмитовых A. Если A представим в такой форме, то и cA представим в ней, поэтому мы можем считать, что норма A не пре-

восходит 1. Тогда $1-A^2$ неотрицателен и существует $(1-A^2)^{1/2}$. Положим $U=A+i(1-A^2)^{1/2}$, тогда $U^*=A-i(1-A^2)^{1/2}$ и U унитарен. При этом $A=\frac{1}{2}(U+U^*)$.

Теперь из инвариантности формы $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu U_\nu$ относительно $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ следует инвариантность ограниченности.

Теорема VI. *Предположим, что* f_0 — u.d. *Тогда* $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ *является антиизоморфизмом* **M** *и* **M′**. *Иначе говоря, если* $A\sim A'$, $B\sim B'$, *то*: (i) $\alpha A\sim\alpha A'$; (ii) $A^*\sim A'^*$; (iii) $A+B\sim A'+B'$; (iv) $AB\sim B'A'$; (v) *если* A (*или* A') *эрмитов, то и* A' (*или* A) *тоже эрмитов.*

(i) и (iii) очевидны.

Рассмотрим (iv). Имеем $ABf_0=AB'f_0=B'Af_0=B'A'f_0$, так что $AB\sim B'A'$. Чтобы доказать (v), предположим, что U унитарен, $U\sim U'$. Тогда согласно теореме V U' тоже унитарен. Подобным же образом, поскольку U^{-1} унитарен, из $U^{-1}\sim V'$ следует унитарность V'. Поскольку $UU^{-1}=U^{-1}U=1$, из (iv) мы имеем $U'V'=V'U'=1$, а значит, $V'=(U')^{-1}$. Итак, $U^{-1}\sim(U')^{-1}$ и $\alpha(U+U^{-1})\sim\alpha(U'+(U')^{-1})$ благодаря (iii). Если $\alpha>0$, то правая сторона эрмитова и левая сторона — произвольный эрмитов элемент **M** (см. доказательство следствия из теоремы V). Это доказывает (v).

Теперь мы докажем (ii). Если $A\in\mathbf{M}$, то $A=B+iC$, $A^*=B-iC$, B и C эрмитовы и $\in\mathbf{M}$. Если $A\sim A'$, $B\sim B'$, $C\sim C'$, то B', C' эрмитовы и $A\sim B'+iC'=A'$, $A^*\sim B'-iC'=A'^*$, что и доказывает (ii).

Следствие. *Свойства быть эрмитовым, быть положительно определенным, быть проектором, а также численные значения* $|||A|||$ (*норма* A) *и* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}\,A$ (*или* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}'}(A')$) *всюду в* **M** (*или* **M′**) *инвариантны относительно* $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$.

Эрмитовость A означает $A=A^*$; «A — проектор» означает $A=A^*=A^2$; «A положительно определен» означает, что существует эрмитов B с $A=B^2$. Таким образом, все эти свойства инвариантны относительно $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$. Единичный оператор 1 тоже инвариантен ($1\in\mathbf{M}$ и $1\in\mathbf{M}'$, $1f_0=1f_0$). $|||A|||$ равно наименьшему $\alpha\geqslant 0$, для которого $\alpha^2 1-A^*A$ положительно определен, так что $|||A|||$ инвариантна. Если $A\sim A'$, то $Af_0=A'f_0$ и $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)=(Af_0,f_0)=(A'f_0,f_0)=\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}'}(A')$ согласно теореме V.

4.3. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что f — u.d. Последующие рассуждения можно было бы основывать на распространении понятия $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ (и $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}'}(A')$) на неограниченные $A\eta\mathbf{M}$ (или $A'\eta\mathbf{M}'$), но мы предпочитаем подход, который позволит обойтись без этого.

Теорема VII. *Множества* $Q_{f_0}(\mathbf{M})$ *и* $Q_{f_0}(\mathbf{M}')$ *не зависят от выбора* u.d. f_0. *Поэтому мы будем обозначать их* $Q(\mathbf{M})$ *и* $Q(\mathbf{M}')$ *соответственно. Более того, значения* $\|Zf_0\|$, (Xf_0, Yf_0), *где* $X, Y, Z\in Q(\mathbf{M})$, *или* $Q(\mathbf{M}')$, *не зависят от выбора* u.d. f_0.

Благодаря симметрии между **M** и **M′** достаточно доказать утверждения, касающиеся **M**; иными словами, пусть f_0 и g_0 — u.d., в этом случае для $A\in U(\mathbf{M})$ Af_0 определен тогда и только тогда, когда определен Ag_0 и $\|Af_0\|=\|Ag_0\|$. Благодаря симметрии относительно f_0 и g_0 достаточно доказать, что Ag_0 определен, если определен Af_0 и $\|Af_0\|=\|Ag_0\|$.

Согласно лемме 4.2.2 существует унитарный $U' \in \mathbf{M}'$, для которого $g_0 = U'f_0$. Поскольку $A \in U(\mathbf{M})$, $A = U'^{-1}AU'$. Значит, раз существует Af_0, то существует и $Af_0 = U'^{-1}AU'f_0 = U'^{-1}Ag_0$. Отсюда следует существование Ag_0, и так как $Ag_0 = U'Af_0$, то $\|Af_0\| = \|Ag_0\|$. Кроме того, если $B \in Q_{f_0}(\mathbf{M})$, то $Bg_0 = U'Bf_0$ и $(Ag_0, Bg_0) = (U'Af_0, U'Bf_0) = (Af_0, Bf_0)$.

Итак, мы имеем такие отображения:

$$\mathfrak{J}_{\mathbf{M}} : \mathfrak{H} \sim Q(\mathbf{M}); \qquad \mathfrak{J}_{\mathbf{M}'} : \mathfrak{H} \sim Q(\mathbf{M}'); \qquad \mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'} : Q(\mathbf{M}) \sim Q(\mathbf{M}'). \tag{I}$$

Согласно следствию из теоремы V $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ отображает $\mathbf{M}$ на $\mathbf{M}'$. Поэтому $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}$ отображает $\mathbf{M}$, а $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}'}$ отображает $\mathbf{M}'$ на одно и то же подмножество $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{H}$, и мы получаем новые отображения:

$$\mathfrak{J}_{\mathbf{M}} : \mathfrak{A} \sim \mathbf{M}; \qquad \mathfrak{J}_{\mathbf{M}'} : \mathfrak{A} \sim \mathbf{M}'; \qquad \mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'} : \mathbf{M} \sim \mathbf{M}'. \tag{II}$$

(II) является частью (I).

Теперь будет доказана

Лемма 4.3.1. *$\mathfrak{A}$ является линейным множеством, плотным в $\mathfrak{H}$.*

Поскольку $\mathbf{M}$ линейно, то и $\mathfrak{A}$ линейно.

Рассмотрим $f \in \mathfrak{H}$, $f = Zf_0$, $Z \in Q(\mathbf{M})$. Тогда $Z = BU$, B самосопряжен и положительно определен, $B \in U(\mathbf{M})$, U унитарен и $\in \mathbf{M}$. Запишем B в спектральной форме

$$B = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda), \qquad E(\lambda) \in \mathbf{M}.$$

Тогда мы имеем

$$[E(\mu)B] = \int_0^\mu \lambda dE(\lambda);$$

а потому (i) $[E(\mu)B] \in \mathbf{M}$ и (ii) если Bg определен, то мы имеем сильный $\lim_{\mu\to\infty} [E(\mu)B]g = Bg$. Поэтому $[E(\mu)B]U \in \mathbf{M}$ и сильный $\lim_{\mu\to\infty} [E(\mu)B]Uf_0 = BUf_0 = Zf_0 = f$. Поскольку $[E(\mu)B]Uf_0 \in \mathfrak{A}$, вектор f является точкой конденсации $\mathfrak{A}$. Так как это верно для любого $f \in \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{A}$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Определение 4.3.1. *Если $f = Xf_0 = X'f_0$, $g = Yf_0 = Y'f_0$, X и $Y \in Q(\mathbf{M})$, X' и $Y' \in Q(\mathbf{M}')$, положим* $[[X]] = [[X']] = \|f\|$, $\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \langle\langle X', Y'\rangle\rangle = (f, g)$.

Теорема VII показывает, что значения $[[X]]$, $[[X']]$, $\langle\langle X', Y'\rangle\rangle$ и $\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ не зависят от выбора u.d. f_0.

Лемма 4.3.2. *Если X и $Y \in \mathbf{M}$, то* $[[X]] = (\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(X^*X))^{1/2} = (\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(XX^*))^{1/2}$, $\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(Y^*X) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(XY^*)$.

Поскольку $[[X]] = (\langle\langle X, X\rangle\rangle)^{1/2}$, второе утверждение влечет за собой первое. Далее, ясно, что

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = (Xf_0, Yf_0) = (Y^*Xf_0, f_0) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(Y^*X),$$

поскольку f — u.d. Мы имеем также $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(Y^*X) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(XY^*)$ согласно п. 2.2, свойству III, (vi). Значит, $\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(Y^*X) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(XY^*)$.

Лемма 4.3.3. *Если $X', Y' \in \mathbf{M}'$, то* $[[X']] = (\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}'}(X'X'^*))^{1/2}$, $\langle\langle X', Y'\rangle\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}'}(Y'^*X') = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(X'Y'^*)$.

Для доказательства заменим $\mathbf{M}$ на $\mathbf{M}'$ в доказательстве леммы 4.3.2.

Т е о р е м а VIII. *Если использовать обозначения*

$$\langle\langle X,\ Y\rangle\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(Y^*X) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(XY^*),$$

$$[[X]] = (\langle\langle X,\ X\rangle\rangle)^{1/2} = (\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(X^*X))^{1/2} = (\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(XX^*))^{1/2},$$

то **M** *превращается в неполное гильбертово пространство. Его пополнение обычным (канторовским) способом дает гильбертово пространство* $\tilde{\mathbf{M}}$, *которое может быть отождествлено с* Q (**M**).

Это ясно из изоморфизмов (I) и (II) и лемм 4.3.1 и 4.3.2. **M** и $\tilde{\mathbf{M}}$, т. е. Q (**M**), изоморфны $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно посредством изоморфизма $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}$.

Соответствующие факты справедливы и для **M′**; их формулировки очевидны.

Т е о р е м а IX. *Из* $X \in Q$ (**M**) *следует, что* $X^* \in Q$ (**M**) *и* $[[X]] = [[X^*]]$.

Предположим, что $X \in Q$ (**M**), т. е. $X \in U$ (**M**) и Xf_0 определен. Запишем $X = BU$, B самосопряжен и η**M**, U унитарен и $\in$**M**. Следовательно, определен BUf_0. Далее, Uf_0 является u.d. (по лемме **4.2.1**), значит, из существования BUf_0 следует $B \in Q$ (**M**) (теорема VII). В свою очередь, отсюда следует существование Bf_0 и вместе с ним $X^*f_0 = U^{-1}Bf_0$. Значит, $X^* \in Q$ (**M**).

Поскольку f_0 и Uf_0 оба u.d. (лемма 4.2.1), мы имеем согласно определению 4.3.1

$$[[X]] = \|Xf_0\| = \|BUf_0\| = [[B]] = \|Bf_0\| = \|U^{-1}Bf_0\| = \|X^*f_0\| = [[X^*]].$$

С л е д с т в и е. $X \sim X^*$ *является инволютивно сопряженным антиизоморфизмом* Q (**M**), *он изометричен.*

$X \sim X^*$ отображает Q (**M**) на свое подмножество согласно теореме IX. Это и $X^{**} = X$ доказывает, что $X \sim X^*$ является взаимно однозначным инволютивным отображением Q (**M**) на себя. Согласно теореме IX оно изометрично; $[[X]] = [[X^*]]$, и это, очевидно, сопряженный антиизоморфизм

Соответствующие факты имеют место и для **M′**; их формулировки очевидны.

4.4. Теперь мы исследуем алгебру Q (**M**).

С в о й с т в о I⁰. *Из* A, $B \in Q$ (**M**) *следует, что* αA, A^*, $[A+B] \in Q$ (**M**). *Если к тому же* A *или* $B \in$ **M**, *то и* $[AB] \in Q$ (**M**).

αA, $[A+B] \in Q$ (**M**), ибо Q (**M**) линейно (вместе с $\mathfrak{H}$). $A^* \in Q$ (**M**) согласно теореме IX.

Предположим теперь, что $A \in$ **M**, $B \in Q$ (**M**). Тогда определены Bf_0 и $ABf_0 = [AB]\,f_0$. Поэтому $[AB] \in Q$ (**M**). Если $A \in Q$ (**M**), $B \in$ **M**, то $B^* \in$ **M**, $A^* \in Q$ (**M**), так что $[B^*A^*] \in Q$ (**M**). Поскольку $[B^*A^*]^* = [AB]$ (см. К. О., теорема XV), $[AB] \in Q$ (**M**).

С в о й с т в о II⁰. (i) $[[\alpha A]] = |\alpha|\,[[A]]$; (ii) $[[A^*]] = [[A]]$; (iii) $[[A+B]] \leqslant [[A]] + [[B]]$; (iv) $[[[AB]]] \leqslant |||A|||\,[[B]]$ *и* $[[A]]\,|||B|||$.

(i) и (iii) справедливы, ибо Q (**M**) изоморфно $\mathfrak{H}$. (ii) справедливо благодаря теореме IX.

Рассмотрим (iv). Мы имеем

$$[[[AB]]] = \|[AB]\,f_0\| = \|ABf_0\| \leqslant |||A|||\,\|Bf_0\| = |||A|||\,[[B]],$$

что доказывает первое неравенство. Второе следует из него благодаря (ii):

$$[[[AB]]] = [[[AB]^*]] = [[[B^*A^*]]] \leqslant |||B^*|||\,[[A^*]] = |||B|||\,[[A]].$$

Мы имеем $\mathfrak{H} \sim Q(\mathbf{M})$. Ни $\mathfrak{H}$, ни $Q(\mathbf{M})$ не зависят от выбора u.d. f_0, но $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}$ зависит от этого выбора. Эта зависимость имеет такой вид:

Свойство III^0. *Заменим* u. d. f_0 *на* u. d. g_0 *и обозначим через* $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}$ *получившееся соответствие. Пусть* U *— унитарный оператор,* $\in \mathbf{M}$ *и такой, что* $Uf_0 = g_0$ *(см. лемму* 4.2.1). *Тогда, если* $X = YU$, X и $Y \in Q(\mathbf{M})$, *мы имеем*

$$\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}: f \sim X; \qquad \mathfrak{J}_{\mathbf{M}}: f \sim Y$$

для $f = Xf_0$.

Это ясно, поскольку $f = Xf_0 = YUf_0 = Yg_0$.

Теперь мы можем ввести новое понятие, которое не зависит от выбора u.d. f_0.

Свойство IV^0. *Линейное множество* $\mathfrak{A}$ (см. п. 4.3, соответствия (II)) *не зависит от выбора* u.d. f_0.

Это следует из определения $\mathfrak{A}$ и того факта, что если $X = YU$ с унитарным U и ограниченным X или Y, оба оператора X и Y ограничены.

Далее, $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ осуществляет изоморфизм $Q(\mathbf{M}) \sim Q(\mathbf{M}')$, и хотя ни $Q(\mathbf{M})$, ни $Q(\mathbf{M}')$ не зависит от выбора u.d. f_0, от него зависит $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$. Ниже мы выявим эту зависимость.

Свойство V^0. *Заменим* u.d. f_0 *на* u.d. g_0 *и обозначим получающееся соответствие между* $Q(\mathbf{M})$ *и* $Q(\mathbf{M}')$ *через* $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$. *Тогда если* $U \in \mathbf{M}$ *— такой унитарный оператор, что* $g_0 = Uf_0$, *и* $X = U^{-1}YU$ *с* X *и* $Y \in Q(\mathbf{M})$, *то*

$$\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}: X' \sim X; \qquad \mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}: X' \sim Y,$$

если $X'f_0 = Xf_0$, $X' \in Q(\mathbf{M}')$.

Пусть $X'f_0 = Xf_0$, тогда $X'g_0 = X'Uf_0 = UX'f_0 = UXU^{-1}g_0$.

Определение 4.4.1. *Изоморфизм* $\mathfrak{H} \sim Q(\mathbf{M})$ *ставит в соответствие каждому оператору* P *в* $\mathfrak{H}$ *оператор* P° *в* $Q(\mathbf{M})$.

Отметим, что, поскольку элементы $Q(\mathbf{M})$ являются операторами в $\mathfrak{H}$, P° является оператором на операторах в $\mathfrak{H}$.

Теорема X. (i) *Если* $A \in \mathbf{M}$, *то*

$$A^\circ Z = [AZ];$$

(ii) *если* $A' \in \mathbf{M}'$ *и* $A' \sim A \in \mathbf{M}$ *относительно* $\mathfrak{J}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$, *то*

$$A'^\circ = [ZA].$$

P° определяется следующим образом. Если $g = Xf_0$, $h = Pg$, $h = Yf_0$, X и $Y \in Q(\mathbf{M})$, то $P^\circ X = Y$. Поэтому для доказательства (i) мы получим $(A^\circ Z)f_0 = A(Zf_0) = [AZ]f_0$, а для доказательства (ii) $(A'^\circ Z)f_0 = A'Zf_0 = ZA'f_0 = ZAf_0 = [ZA]f_0$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{M}^0$ *— множество всех операторов* L_A *в* $Q(\mathbf{M})$, $A \in \mathbf{M}$, *где* $L_A Z = [AZ]$, *а* $\mathbf{M}_0$ *— множество всех операторов* R_A *в* $Q(\mathbf{M})$, $A \in \mathbf{M}$, *где* $R_A Z = [ZA]$. *Тогда* $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}$ *переводит* $\mathbf{M}$ *в* $\mathbf{M}^0$, *а* $\mathbf{M}'$ *в* $\mathbf{M}_0$.

Это очевидно из теоремы X.

Следствие 2. $\mathbf{M}^0$, $\mathbf{M}_0$ *являются кольцами, и* $(\mathbf{M}^0)' = \mathbf{M}_0$ *(все это в* $Q(\mathbf{M})$). *Они являются факторами типа* (II_1, II_1) *с* $C = 1$.

Эти свойства имеют место, ибо $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}$ является пространственным изоморфизмом $\mathfrak{H}$ и $Q(\mathbf{M})$, переводящим $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ в $\mathbf{M}^0$, $\mathbf{M}_0$ соответственно.

Итак, мы охарактеризовали $\mathfrak{H}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ положением в $Q(\mathbf{M})$, $\mathbf{M}^0$, $\mathbf{M}_0$, которым они пространственно изоморфны. Пространственным изоморфизмом служит $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}$, зависящее от произвольного u. d. f_0, в то время как $Q(\mathbf{M})$, $\mathbf{M}^0$, $\mathbf{M}_0$ сами от него не зависят. Все влияние выбора f_0 проявляется в следующем преобразовании: R_U, $X = YU$ ($U \in \mathbf{M}$, U унитарен, так что $R_U \in \mathbf{M}_0$). $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}}$ всегда переводит набор u.d. элементов g_0 из $\mathfrak{H}$ в набор унитарных элементов $U \in Q(\mathbf{M})$, причем f_0 переходит в 1.

4.5. Теперь может быть доказана следующая важная теорема об изоморфизме.

Теорема XI. *Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — два гильбертовых пространства, а $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_1'$ и $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_2'$ — соответственно пары факторов в них, обе принадлежащие случаю* (II_1, II_1) *с $C = 1$ в стандартной нормировке. Тогда алгебраический изоморфизм $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ является необходимым и достаточным условием существования пространственного изоморфизма $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, переводящего $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_1'$ в $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_2'$.*

Необходимость очевидна, поэтому мы докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{J}$ — алгебраический изоморфизм $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$. Согласно свойству IV из п. 2.2 $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}_1}(A_1) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}_2}(A_2)$, если $A_1 \sim A_2$ относительно $\mathfrak{J}$. Значит, $[[A_1]] = [[A_2]]$, $\langle\langle A_1, B_1\rangle\rangle = \langle\langle A_2, B_2\rangle\rangle$, если $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$ относительно $\mathfrak{J}$. Поэтому $\mathfrak{J}$ является изометрическим отображением $\mathbf{M}_1$ на $\mathbf{M}_2$ и продолжается по непрерывности единственным образом до линейного изометрического отображения $Q(\mathbf{M}_1)$ на $Q(\mathbf{M}_2)$, которое мы тоже будем обозначать через $\mathfrak{J}$. $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$ относительно $\mathfrak{J}$ влечет за собой $A_1B_1 \sim A_2B_2$ относительно $\mathfrak{J}$, если A_1, $B_1 \in \mathbf{M}_1$ (а значит, A_2, $B_2 \in \mathbf{M}_2$). Это будет верно по непрерывности даже в том случае, когда только один из операторов A_1 и B_1 лежит в $\mathbf{M}_1$ а другой — только в $Q(\mathbf{M}_1)$ (а один из A_2, B_2 лежит в $\mathbf{M}_2$ и другой — в $Q(\mathbf{M}_2)$). Таким образом, $\mathfrak{J}$ — пространственный изоморфизм $Q(\mathbf{M}_1)$ и $Q(\mathbf{M}_2)$, переводящий $\mathbf{M}_1^0$, $\mathbf{M}_{1,0}$ в $\mathbf{M}_2^0$, $\mathbf{M}_{2,0}$ (согласно следствию 1 из теоремы X). Теперь (согласно тому же следствию) $\mathfrak{J}_{\mathbf{M}_2}\mathfrak{J}\mathfrak{J}_{\mathbf{M}_1}^{-1}$ является пространственным изоморфизмом $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, который переводит $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_1'$ в $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_2'$.

Теорема XI может быть распространена на случаи (II_1, II_1) с $C \gtreqless 1$ в стандартной нормировке, а также на другие комбинации II_1 и II_∞. В любом случае получается сведение вопросов относительно пространственных изоморфизмов $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ к вопросам об алгебраических изоморфизмах $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ (плюс поведение C). Мы подробно обсудим эти вопросы в дальнейших публикациях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Рассмотрим кольцо $\mathbf{M}$ класса II_1 в $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathbf{M}'$ принадлежит классу II_1 или II_∞. Нормируем $D_{\mathbf{M}}$ и $D_{\mathbf{M}'}$ так, чтобы иметь $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = 1$ и $C = 1$, тогда $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{H}) = \alpha$ (см. п.1.1) Выбрав $n = 1, 2, \ldots$ с $1/n \leqslant \alpha$, а затем $\mathfrak{M}' \eta \mathbf{M}'$ с $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}') = 1/n$, применим п.11.3 из К. О., чтобы получить $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}')}$, $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}')}$ в $\mathfrak{M}'$. Тогда $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}')}$ как кольцо алгебраически изоморфно $\mathbf{M}$ и $D_{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}')}}(\mathfrak{M}') = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = 1$ (см. К. О., леммы 11.3.3 и 11.3.6). Значит, если мы интересуемся только алгебраическими свойствами $\mathbf{M}$, мы можем, не теряя общности, полагать, что $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ принадлежат классу II_1, II_1 и $\alpha = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Иначе говоря, в стандартной нормировке $C = n$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. К. О., теорема X).

Образуем теперь прямое произведение $\mathfrak{H}$ и n-мерного евклидова пространства $E_n \otimes \mathfrak{H}$, как в п. 2.1 для случая $C > 1$, и рассмотрим $\mathbf{M}^{(2)}$ в $E_n \otimes \mathfrak{H}$. Соображения, использованные в п. 2. 1, показывают, что $\mathbf{M}^{(2)\prime} = R(\mathbf{N}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)\prime})$ и $C^{(2)} = C/n = 1$, а $\mathbf{M}^{(2)}$ как кольцо изоморфно $\mathbf{M}$.

Итак, для $\mathbf{M}^{(2)}$, $\mathbf{M}^{(2)\prime}$ мы имеем в стандартной нормировке $C = 1$. Поэтому, если мы интересуемся только алгебраическими свойствами $\mathbf{M}$, мы можем даже считать без всякой потери общности, что $C = 1$ в стандартной нормировке, т. е. $\alpha = 1$ в нормировке п. 1.1. В дальнейшем мы будем считать, что это именно так.

Относительно подколец можно заметить, что метрика в $Q(\mathbf{M})$ (см. определение 4.3.1) определяется алгебраической структурой $\mathbf{M}$ (см. п. 2.2). Подкольцо требует замыкания в слабой операторной топологии, но мы докажем где-нибудь в другом месте, что для подколец $\mathbf{M}$ слабое относительное замыкание в $\mathbf{M}$ в метрике $[[X - Y]]$ эквивалентно замыканию в слабой топологии.

2. В этих условиях имеется аналогия между $\mathbf{M}$ и матрицами в евклидовом пространстве E_n, описываемая при помощи интересной меры Лебега—Стилтьеса—Радона на плоскости.

Мы можем использовать результаты п. 4.2 — 4.4, чтобы построить гильбертово пространство $Q(\mathbf{M})$, изоморфное $\mathfrak{H}$, теорема X указывает в нем место для $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$.

Пусть $E(\lambda)$, $a < \lambda < b$, — разложение единицы и все $E(\lambda) \in \mathbf{M}$. Положим $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$ (в хорошо известном символическом смысле). Для любого борелевского множества вещественных чисел S образуем функцию

$$e_S(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{для } \lambda \in S, \\ 0 & \text{для } \lambda \notin S \end{cases}$$

и оператор

$$E(S) = e_S(A) = \int_{-\infty}^{\infty} e_S(\lambda)\, dE(\lambda) = \int_S dE(\lambda)$$

(символически). Поскольку $\overline{e_S(\lambda)} = e_S(\lambda) = (e_S(\lambda))^2$, то $e_S(A) = e_S(A)^* = e_S(A)^2$; иначе говоря, $E(S) = e_S(A) \in \mathbf{M}$ является проектором (см. также: *Maeda.* — J. Sci., Hiroshima Univ. Ser. A, 1934, vol. 4. p. 57 — 91).

Рассмотрим теперь множества точек в (λ, μ)-плоскости P, в частности множества вида $S_1 \otimes S_2$:

$$(\lambda, \mu) \in S_1 \otimes S_2 \text{ означает } \lambda \in S_1, \quad \mu \in S_2,$$

где S_1, S_2 — два борелевских множества вещественных чисел. Определим теперь для любого $X \in \mathbf{M}$ (или даже $X \in Q(\mathbf{M})$)

$$X_{S_1 \otimes S_2} = E(S_1) X E(S_2),$$

$$\omega(X; S_1 \otimes S_2) = [[X_{S_1 \otimes S_2}]]^2 = \mathrm{Tr}((X_{S_1 \otimes S_2})^* (X_{S_1 \otimes S_2})) = \mathrm{Tr}(E(S_2) X^* E(S_1) \cdot E(S_1) \cdot XE(S_2)) = \mathrm{Tr}(E(S_2) X^* \cdot E(S_1) XE(S_2)) = \mathrm{Tr}(E(S_1) XE(S_2) \cdot E(S_2) X^*) = \mathrm{Tr}(E(S_1) XF(S_2) X^*).$$

Первое выражение для $\omega(X; S_1 \otimes S_2)$ показывает, что оно всегда $\geqslant 0$, последнее — что это счетно-аддитивная функция S_1 и S_2.

Обозначим множество всех λ через Λ, тогда из приведенных выше фактов следует, что

$$\omega(X; S_1 \otimes S_2) \leqslant \omega(X; S_1 \otimes S_2) + \omega(X; (\Lambda - S_1) \otimes S_2) = \omega(X; \Lambda \otimes S_2) \leqslant$$
$$\leqslant \omega(X; \Lambda \otimes S_2) + \omega(X; \Lambda \otimes (\Lambda - S_2)) = \omega(X; \Lambda \otimes \Lambda) = [[X_{\Lambda\otimes\Lambda}]]^2 = [[1 \cdot X \cdot 1]]^2 =$$
$$= [[X]]^2.$$

Итак, мы имеем:

Лемма A. (i) Функция $\omega(X; S_1 \otimes S_2)$ *определена для всех линейных борелевских множеств* S_1, S_2, (ii) *она счетно-аддитивна относительно* S_1 *и* S_2. (iii) *Всегда справедливы соотношения*

$$0 \leqslant \omega(X; S_1 \otimes S_2) \leqslant [[X]]^2 = \mathrm{Tr}(X^*X).$$

3. Мы можем использовать лемму A для того, чтобы определить при помощи $\omega(X; S_1 \otimes S_2)$ меру Лебега—Стилтьеса—Радона $\mu(X; T)$ для всех борелевских множеств T $(\subset P)$ на плоскости P.

Определение A. *Если* T — *борелевское подмножество плоскости* $(T \subset P)$, *рассмотрим все последовательности линейных борелевских множеств* $S_1^{(i)}, S_2^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$ (все $S_1^{(i)}, S_2^{(i)} \subset \Lambda$), *для которых*

$$T \subset \sum_{i=1}^{\infty} S_1^{(i)} \otimes S_2^{(i)}. \qquad (*)$$

Для каждой такой последовательности образуем (*числовую*) *сумму*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(X; S_1^{(i)} \otimes S_2^{(i)}). \qquad (**)$$

Обозначим точную нижнюю грань всех чисел (**) *через* $\mu(X; T)$.

Теперь будет доказана

Лемма B. (i) $\mu(X; T)$ *определена на всех борелевских подмножествах плоскости* $T \subset P$.

(ii) *Она счетно-аддитивна по* T.

(iii) *Мы имеем всегда*

$$0 \leqslant \mu(X; T) \leqslant [[X]]^2 = \mathrm{Tr}(X^*X).$$

(iv) В частности,

$$\mu(X; S_1 \otimes S_2) = \omega(X; S_1 \otimes S_2),$$

а также

$$\mu(X; P) = [[X]]^2 = \mathrm{Tr}(X^*X).$$

(i) очевидно. Чтобы доказать (ii), отметим сначала, что из нашего определения A очевидно, что

$$\mu(X; T_1 + T_2 + \ldots) \leqslant \mu(X; T_1) + \mu(X; T_2) + \ldots,$$

так что нам нужно доказать, что

$$\mu(X; T_1 + T_2 + \ldots) \geqslant \mu(X; T_1) + \mu(X; T_2) + \ldots$$

при условии $T_i \cdot T_j = 0$ для $i \neq j$.

Достаточно будет даже $\mu(X; T_1 + T_2) \geqslant \mu(X; T_1) + \mu(X; T_2)$. Тогда конечная индукция даст $\mu(X; T_1 + \ldots + T_n) \geqslant \mu(X; T_1) + \mu(X; T_2) + \ldots$ $\ldots + \mu(X; T_n)$, так что $\mu(X; T_1 + T_2 + \ldots) \geqslant \mu(X; T_1, T_2, \ldots, T_n) \geqslant \mu(X;$

$T_1) + \ldots + \mu(X; T_n)$, а поскольку это верно для всех $n = 1, 2, \ldots$, отсюда следует, что $\mu(X; T_1 + T_2 + \ldots) \geqslant \mu(X; T_1) + \mu(X; T_2) + \ldots$

Мы докажем, что

$$\mu(X; T) = \mu(X; TU) + \mu(X; T - TU) \qquad (\S)$$

для всех T, U; если $T = T_1 + T_2$, $U = T_1$, это даст нам предыдущее неравенство. Следуя Каратеодори (см. [4, с. 246—252]), назовем U, для которых (§) справедливо при любом борелевском подмножестве T плоскости, измеримыми. Мы должны доказать, что все U измеримы.

Если $U = S_1 \otimes S_2$, то из $T \subset \sum_{i=1}^{\infty} S_1^{(i)} \otimes S_2^{(i)}$ следует, что $TU \subset \sum_{i=1}^{\infty} S_1^{(i)} S_1 \otimes S_2^{(i)} S_2$, $T - TU \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} S_1^{(i)} S_1 \otimes (S_2^{(i)} - S_2^{(i)} S_2) + \sum_{i=1}^{\infty} (S_1^{(i)} - S_1^{(i)} S_1) \otimes S_2^{(i)}$. Поэтому наше определение A немедленно дает (§) со знаком $\geqslant$, а поскольку $\leqslant$ очевиден (см. выше), (§) доказано. Значит, измеримы все $U = S_1 \otimes S_2$, в частности все интервалы плоскости (прямоугольники).

Далее, все измеримые множества U образуют борелевское кольцо (см., например, [4], loc. cit.). Эти соображения дословно приложимы и к настоящему случаю. Значит, любое борелевское подмножество U плоскости измеримо. Это завершает доказательство.

Теперь мы докажем (iii). $\mu(X; T) \geqslant 0$, ибо все выражения (**) в определении A неотрицательны. Соотношение $\mu(X; T) \leqslant [[X]]^2 = \mathrm{Tr}(X^*X)$ получается, если положить $S_1^{(1)} = S_2^{(1)} = \Lambda$, а все остальные $S_1^{(i)} = S_2^{(i)} = 0$.

Чтобы доказать (iv), положим $S_1^{(i)} = S_1$, $S_2^{(i)} = S_2$, а все остальные $S_1^{(i)} = S_2^{(i)} = 0$. Это дает нам $\mu(X; S_1 \otimes S_2) \leqslant \omega(X; S_1 \otimes S_2)$. Так что нам остается доказать только $\geqslant$, т. е. что

$$S_1 \otimes S_2 \subset \sum_{i=1}^{\infty} S_1^{(i)} \otimes S_2^{(i)} \text{ влечет за собой } \omega(X; S_1 \otimes S_2) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \omega(X; S_1^{(i)} \otimes S_2^{(i)}).$$

Учитывая свойства $\omega(X; S_1 \otimes S_2)$, приведенные в лемме A, это получается дословно так же, как в статье Lomnicki и Ulam (Fundamenta mathematicae, 1934, t. 23, s. 237 — 278; см. также записи лекций второго автора за 1934—1935 гг).

Итак, мы доказали, что $\mu(X; S_1 \otimes S_2) = \omega(X; S_1 \otimes S_2)$. Положим теперь $S_1 = S_2 = \Lambda$; тогда получается

$$\mu(X; P) = \mu(X; \Lambda \otimes \Lambda) = \omega(X; \Lambda \otimes \Lambda) = [[X]]^2 = \mathrm{Tr}(X^*X).$$

4. Мера $\mu(X; T)$ на плоскости может быть использована для того, чтобы «зафиксировать положение» X на λ, μ-плоскости P. Она сопоставляет всей плоскости полную «меру» или «вес» $[[X]]^2$ (который > 0, если $X \neq 0$), любой ее части T — соответственно $\mu(X; T) (\geqslant 0)$. Она играет ту же роль, что сумма квадратов абсолютных значений всех матричных элементов в некоторой области T в матричной схеме (которую можно рассматривать как область в плоскости) для матриц в конечномерном евклидовом пространстве E_n (т. е. **M** типа (I_n), $n = 1, 2, \ldots$).

В последующих публикациях мы проанализируем ее полнее.

О КОЛЬЦАХ ОПЕРАТОРОВ III*

ВВЕДЕНИЕ

1. В двух предшествовавших статьях ([1, 2]) Ф. Дж. Мюррей и автор исследовали некоторые кольца операторов, именуемые факторами (см. [1, с. 138, определение 3.1.2]. Введение в теорию колец операторов см. в [5, в частности, с. 372—376, 388—398]). Мотивы, послужившие поводом для этих исследований, изложены в [1, с. 116—123].

Основной принцип классификации факторов, найденный в [1], основан на областях значений их *функций относительной размерности* (см. там же, с. 165, определение 8.2.1; с. 168, теорема VII; с. 172, теорема VIII). При этом оказалось, что все факторы принадлежат одному из классов, обозначаемых $(\mathrm{I}_n)(n = 1, 2, \ldots)$, (I_∞), (II_1), (II_∞), (III_∞). Было доказано, что существуют факторы, принадлежащие каждому из этих классов, за исключением (III_∞), вопрос о существовании которого остался нерешенным (см. [1, с. 208, теорема XII].)

Основной результат настоящей статьи заключается в том, что факторы класса III_∞ тоже существуют (см. теорему IX и примеры (α), (β) в п. 4.4). Таким образом, указанная выше классификация полностью оправдывается.

2. Этот результат получается одновременным применением двух средств: понятий *нормы* и *нормируемости*, которые образуют предмет главы I, и процесса $A^{|E_1|E_2|\ldots}$, являющегося аналогом процесса выделения диагональной части конечной матрицы и обсуждаемого в главе II.

Оба понятия имеют и независимый интерес, и, как нам представляется, сами по себе заслуживают изучения. В этой статье их анализ сведен к объему, необходимому для наших непосредственных нужд, хотя мы позволили себе некоторые отклонения в тех случаях, когда увеличение общности сверх необходимого минимума могло прояснить и упростить изложение. Тем не менее мы надеемся рассмотреть их независимо и более подробно в другой раз.

Глава III дает некоторые явные конструкции факторов, обобщающие конструкции [1, с. 192—204]. А затем, с помощью упомянутых выше приемов из глав I и II, в главе IV показано, к каким классам принадлежат факторы, построенные в главе III. На этом этапе получены в том числе и примеры факторов типа (III_∞).

3. Основные вопросы, относящиеся к факторам, были сформулированы в [1] как проблемы 1—11. Из них проблемы 1, 2, 5 и частично 3, 4, 6—10 были разрешены в [1]; проблема 11 была разрешена в [2]. Результаты этой статьи разрешат оставшиеся части проблем 3, 4. Важные части проблем 6—10 остаются нерешенными. Особенно важным нам представляется следующий вопрос, до сих пор остающийся открытым: все ли факторы класса (II_1) изоморфны друг

---

* Ann. Math., 1940, vol. 41, p. 94—161.

другу? (Часть проблемы 6.) Нам кажется, что от ответа на этот вопрос в существенном зависит приложимость теории факторов, в частности к квантовой механике.

Ф. Дж. Мюррей и автор считают, что ответ отрицателен и что существуют дальнейшие инварианты, скорее всего алгебраического и теоретико-группового характера.

Получены некоторые частичные результаты, и они будут обсуждены в другом месте. Но основной вопрос (см. выше) все еще не решен.

4. Работа автора [7] тоже привела к факторам. Части кольца $\mathcal{C}^{\#1}$ в разных неполных прямых произведениях $\prod^{\mathfrak{D}}_{\otimes n=1,2,\dots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$ [7, с. 71, лемма 7.3.1], как оказалось, являются в некоторых случаях факторами классов (I_∞), (II_1) и (II_∞) (см. там же, с. 71—77, в частности леммы 7.4.1, 7.5.1). Несложно проверить, что упомянутые выше части всегда (т. е. в любом $\prod^{\mathfrak{D}}_{\otimes n=1,2,\dots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$) являются факторами.

Применение наших новых результатов, а именно теоремы IX, показывает, что в некоторых случаях эти факторы принадлежат классу (III_∞).

Более точно: в [7, с. 71, лемма 7.3.1] было показано, что часть $\mathcal{C}^{\#1}$, соответствующая $\prod^{\mathfrak{D}}_{\otimes n=1,2,\dots}(\mathfrak{H}_{(n,1)}\otimes\mathfrak{H}_{(n,2)})$, в существенном (т. е. с точностью до изоморфизма) зависит только от некоторой последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ констант $\geqslant 0$, $\leqslant 1$. Там же (с. 71—77) было показано, что она лежит в классе (I_∞) для $\alpha_1=\alpha_2=\dots=1$, (II_1) для $\alpha_1=\alpha_2=\dots=0$, и утверждалось, что она лежит в классе (II_∞) для $\alpha_1=\alpha_3=\dots=0$, $\alpha_2=\alpha_4=\dots=1$. Теперь мы можем утверждать следующее: ее класс есть (III_∞), если для некоторого $\delta>0$ и бесконечного количества $n=1,2,\dots$ мы имеем $\delta\leqslant\alpha_n\leqslant 1-\delta$.

Факторы, получаемые описанным образом, имеют много поучительных аспектов и будут (вместе с упомянутыми выше результатами) обсуждены в другом месте.

Предположения, сформулированные в конце [7], должны быть модифицированы в соответствии с упомянутыми выше результатами.

5. В вопросах, касающихся современной теории операторов в целом, читатель отсылается к [3] или [4]. Относительно других затрагиваемых вопросов общие сведения могут быть получены в [5, 1]. Мы будем предполагать знакомство с результатами и методами этих статей.

Наши обозначения те же, что и в перечисленных выше статьях (для детального описания см. [1, с. 126—127]).

Далее следует подробное оглавление, литература помещена в конце статьи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.
1. Формулировка основного результата.
2. Норма, нормируемость, $A^{|E_1|E_2|\dots}$
3. Проблемы 1—11 из [1].
4. Связь с [7].
5. Литература и обозначения.

Глава I. Относительный след в произвольном факторе.
1.1. Общие положения.
1.2. Определение и свойства $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A)$ (A имеет конечный ранг). Теорема I.
1.3. Определение и свойства $[[A]]$ (для A конечного ранга). Теорема II.
1.4. Фундаментальные последовательности, нормированные операторы A, $[[A]]$ для нормированных A. Теорема III.
1.5. Свойства нормированных A, $[[A]]$ для нормированных A. Проекторы. Теоремы IV—V.
1.6. Смысл нормируемости и нормы в каждом из классов (I_n)—(III_∞).
Глава II. Максимальные абелевы кольца и операция $A^{|E_1|E_2|\cdots}$.
2.1. Конструкция и свойства $A^{|E_1|E_2|\cdots}$. Теорема VI.
2.2. Критерий принадлежности $\mathfrak{M}$ к классу (III_∞).
Глава III. Конструкции колец.
3.1. Общие положения.
3.2. S, Γ, μ, $\mathfrak{H}_S = \mathfrak{H}_{S,\Gamma,\mu}$. «Теорема о дифференцировании» — теорема VII.
3.3. Связь группы $\mathcal{G}$ с S, Γ, μ. Свобода, эргодичность, измеримость.
3.4. $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}$, $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}} = \mathfrak{H}_{S,\Gamma,\mu}^{\mathcal{G}}$.
3.5. Конструкции в $\mathfrak{H}_S$.
3.6. Конструкции в $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$: $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$.
3.7. Первое обсуждение $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$. Теорема VIII.
Глава IV. Установление классов $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$.
4.1. Общие положения.
4.2. Измеримая $\mathcal{G}$: случаи (I), (II).
4.3. Неизмеримая $\mathcal{G}$: случай (III). Теорема IX.
4.4. Примеры случая (III). Непарные факторы.
Литература.

Глава I

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ СЛЕД В ПРОИЗВОЛЬНОМ ФАКТОРЕ

1.1. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а $\mathfrak{M}$ — фактор в $\mathfrak{H}$. Понятие *относительного следа* $T_{\mathfrak{M}}(A)$ было определено для всех эрмитовых $A \in \mathfrak{M}$ в [1, с. 212—213, определение 15. 1. 1] и для всех без ограничения $A \in \mathfrak{M}$ в [2, с. 218, определение 2. 2. 1] в предположении, что $\mathfrak{M}$ принадлежит одному из *конечных* классов: (I_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, (II_∞). Теперь мы распространим это определение на все факторы $\mathfrak{M}$, но (когда $\mathfrak{M}$ *бесконечен*) не на все $A \in \mathfrak{M}$. В частности, мы увидим, что когда $\mathfrak{M}$ *чисто бесконечен*, т. е. лежит в классе (III_∞), наше определение имеет смысл только для $A = 0$. Таким образом, факторы $\mathfrak{M}$, для которых мы действительно нечто получаем, это те, которые лежат в *не чисто бесконечных классах*: (I_∞), (II_∞). (В частности, для (I_∞) мы получаем обычные понятия следа и операторов из класса E. Schmidt'а в $\mathfrak{M}$ (см. обсуждение (B) п. 1. 6 ниже). Тем не менее мы будем использовать это расширенное понятие относительного следа в настоящей статье для фактора $\mathfrak{M}$, имея своей целью доказать, что неизвестный фактор $\mathfrak{M}$ лежит именно в классе (III_∞).)

1.2. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный фактор, $D(\mathfrak{M})$ — его *функция относительной размерности* в произвольной нормировке [1, с. 165, определение 8. 2. 1, и с. 168, теорема VII]. Для любого $A \in \mathfrak{M}$ можно образовать замкнутое линейное множест-

во [Range A], оно $\eta\ \mathfrak{M}$. (Это понятие определено в [1, с. 141, определение 4.2.1]. Доказательство утверждения см. в [1, с. 151 — 152, леммы 6.1.1, 6.2.1].)

Определение 1.2.1. *Для любого* $A \in \mathfrak{M}$ *определим «ранг» следующим образом*:

$$\text{Rank}(A) = D([\text{Range } A]).$$

(Читатель может легко убедиться в том, что если $\mathfrak{M} = \mathbf{B}$ — кольцо всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, которое лежит в классе (I_∞), и если $D(\mathfrak{M})$ выбрано в стандартной нормировке ([1, с. 173, лемма 8.6.1]), то это ранг матрицы в обычном смысле слова.)

Вместе с $D(\mathfrak{M})$ Rank (A) может принимать конечные и бесконечные численные значения. Если имеет место первый случай, мы говорим, что A имеет конечный ранг.

Лемма 1.2.1. Rank (A) *обладает следующими свойствами*:

(i) Rank $(A) \geqslant 0$, *он равен нулю, если и только если* $A = 0$;

(ii) Rank (A) = Rank (A^*);

(iii) Rank (aA) = Rank (A) *для любого комплексного числа* $a \neq 0$;

(iv) Rank $(A + B) \leqslant$ Rank (A) + Rank (B);

(v) Rank $(AB) \leqslant$ Rank (A), Rank (B);

(vi) Rank $(E) = D(E)$ *для любого проектора* $E \in \mathfrak{M}$.

Доказательство.

(i) : Rank $(A) = D$ ([Range A]) и, очевидно, не отрицателен, а равен нулю, если и только если [Range A] = 0, т. е. Range A = 0, это означает, что $A = 0$.

(ii) : совпадает с леммой 6.2.1 из [1, с. 152].

(iii) : поскольку A линеен, имеем сразу Range (A) = Range (aA), если $a \neq 0$.

(iv) : очевидно, Range $(A + B) \subset$ [Range (A), Range (B)], значит, [Range $(A + B)$] $\subset$ [[Range (A)], [Range (B)], и лемма 14.2.3 из [1, с. 210] дает желаемый результат.

(v) : очевидно, Range $(AB) \subset$ Range (A), значит, [Range (AB)] $\subset$ [Range (A) и потому Rank $(AB) \leqslant$ Rank (A). Комбинируя это с (ii), мы получаем] Rank (AB) = Rank $((AB)^*)$ = Rank $(B^*A^*) \leqslant$ Rank (B^*) = Rank (B), что и завершает доказательство.

(vi): если E—проектор на замкнутое линейное подмножество $\mathfrak{B}$, то Range (E) = $\mathfrak{B}$, откуда [Range (E)] = $\mathfrak{B}$.

Лемма 1.2.2. *Имеют место следующие свойства конечности ранга*:

(i) 0 *имеет конечный ранг*;

(ii) A *имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда* A^* *имеет конечный ранг*;

(iii) A *имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда* aA *имеет конечный ранг, здесь* a — *произвольное фиксированное комплексное число* $a \neq 0$;

(iv) $A + B$ *имеет конечный ранг, если то же верно для* A *и* B;

(v) AB *имеет конечный ранг, если то же верно для* A *или* B;

(vi) E *имеет конечный ранг, если и только если он конечен в смысле* [1, с. 155, определение 7.1.1], *здесь* E — *любой фиксированный проектор* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Пункты (i) — (vi) являются немедленными следствиями соответствующих пунктов (i) — (vi) из леммы 1.2.1.

Повсюду в дальнейшем мы будем пользоваться результатами лемм 1.2.1 и 1.2.2, не ссылаясь на них явно.

Определение 1.2.2. *Замкнутое линейное множество* $\mathfrak{W}\eta\mathfrak{M}$ — *или соответствующий проектор* $E \in \mathfrak{M}$ (см. [1, с. 141, лемма 4.2.1]) — «*содержит*» *оператор* $A \in \mathfrak{M}$, *если*

$$[\mathrm{Range}\, A],\ [\mathrm{Range}\, A^*] \subset \mathfrak{W}.$$

Лемма 1.2.3. *E содержит A, если и только если*

$$EA = AE = A.$$

Доказательство. $[\mathrm{Range}\, A] \subset \mathfrak{W}$ эквивалентно $\mathrm{Range}\, A \subset \mathfrak{W}$, т. е. $Af \in \mathfrak{W}$ для каждого $f \in \mathfrak{H}$, или же $EAf = Af$. Другими словами, $EA = A$.

Аналогичным образом, $[\mathrm{Range}\, A^*] \subset \mathfrak{W}$ означает $EA^* = A^*$, т. е. (применяя * к обеим сторонам) $AE = A$.

Таким образом, вместе они дают $EA = AE = A$.

Лемма 1.2.4. $A\,(\in \mathfrak{M})$ *имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда он содержится в конечном* $\mathfrak{W}$ $(\eta\mathfrak{M})$.

Доказательство. *Достаточность*. $[\mathrm{Range}\, A] \subset \mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}$ конечно, значит, и $[\mathrm{Range}\, A]$ конечно, т. е. $\mathrm{Rank}\,(A) = D\,([\mathrm{Range}\, A])$ — конечное число.

Необходимость. A имеет конечный ранг, значит, A^* тоже имеет конечный ранг, так что $[\mathrm{Range}\, A]$, $[\mathrm{Range}\, A^*]$ конечны, а вместе с ними конечно и $\mathfrak{W} = [[\mathrm{Range}\, A], [\mathrm{Range}\, A^*]]$ [1, с. 160, лемма 7.3.5]. Это $\mathfrak{W}$ удовлетворяет всем требованиям.

Если задано конечное $\mathfrak{W}$ $(\eta\mathfrak{M})$ — и его проектор $E\,(\in \mathfrak{M})$ — то те $A \in \mathfrak{M}$, которые содержатся в $\mathfrak{W}$, согласно лемме 1.2.3 совпадают с элементами, переводимыми соответствием $X \rightleftarrows X_{(\mathfrak{W})}$ (обсуждавшимся в [1, с. 186 — 187, определение 11.3.1, леммы 11.3.2 — 11.3.4]) на фактор $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$ в $\mathfrak{W}$ (вместо $\mathfrak{H}$!). Итак, мы видим, что, когда A пробегает все элементы $\mathfrak{M}$, содержащиеся в $\mathfrak{W}$, $A_{(\mathfrak{W})}$ пробегает все элементы $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$.

Фактор $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$ с необходимостью принадлежит одному из конечных классов: (I_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, (II_1) [1, с. 188, лемма 11.3.7, или с. 189, лемма 11.4.3]. Поэтому существует единственный относительный след в $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$, определенный для всех $A_{(\mathfrak{W})} \in \mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$: $T_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}}(A_{(\mathfrak{W})})$. (Определение $T_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}}(A_{(\mathfrak{W})})$ см. в начале п. 1.1 выше). Введем теперь

Определение 1.2.3. *Если* $A \in \mathfrak{M}$ *и имеет конечный ранг, то для каждого конечного замкнутого линейного множества* $\mathfrak{W}\eta\,\mathfrak{M}$, *которое содержит* A (*такие* $\mathfrak{W}$ *существуют согласно лемме* 1.2.4), *положим*

$$\overline{T}_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}}(A) = D\,(\mathfrak{W})\, T_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}}(A_{(\mathfrak{W})}).$$

(Такое $\overline{T}_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}}(A)$ зависит также от нормировки $D\,(\mathfrak{W})$, но нам не потребуется отмечать это явно.)

Лемма 1.2.5. $\overline{T}_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}}(A)$ *из определения* 1.2.3 *зависит только от* A, *но не от* $\mathfrak{W}$ (*коль скоро* A *и* $\mathfrak{W}$ *связаны описанным там способом*).

Доказательство. Другими словами, нам нужно доказать, что если $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{V}$ — два конечных, замкнутых линейных множества, причем оба $\eta\mathfrak{M}$ и оба содержат A, то

$$\overline{T}_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}}(A) = \overline{T}_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{V})}}(A). \tag{1}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}$. Рассмотрим далее операторы $A_{\mathfrak{W}} \in \mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$. Образуем оператор $A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}}$ в $\mathfrak{V}$, который приводится $\mathfrak{W}$ и совпадает с $A_{\mathfrak{W}}$ в $\mathfrak{W}$ и с 0 в $\mathfrak{V} - \mathfrak{W}$. Мы утверждаем, что $A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}} \in \mathfrak{M}_{(\mathfrak{V})}$. В самом деле, из $A_{\mathfrak{W}} \in \mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$ следует, что $A_{\mathfrak{W}} = A_{(\mathfrak{W})}$ для $A \in \mathfrak{M}$. Поскольку $E = P_{\mathfrak{W}} \in \mathfrak{M}$, мы имеем $(EAE)_{(\mathfrak{W})} = A_{(\mathfrak{W})}$, $EAE \in \mathfrak{M}$, так что мы можем заменить A на EAE, который совпадает с 0 в $\mathfrak{H} - \mathfrak{W}$. Иначе говоря, мы можем предполагать, что сам A совпадает с 0 в $\mathfrak{H} - \mathfrak{W}$. Тогда $A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}} = A_{(\mathfrak{V})} \in \mathfrak{M}_{(\mathfrak{V})}$.

Отметим далее, что:

(i)* $I_{(\mathfrak{W})} = E_{(\mathfrak{W})}$ *является единицей в* $\mathfrak{W}$, *а поэтому и в* $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$. *И* $I_{(\mathfrak{W})|\mathfrak{V}} = E_{(\mathfrak{V})}$.

(ii)* $(a \cdot A_{\mathfrak{W}})_{|\mathfrak{V}} = a \cdot A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}}$.

(iii)* $(A_{\mathfrak{W}} + B_{\mathfrak{W}})_{|\mathfrak{V}} = A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}} + B_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}}$.

(iv)* *Если* $A_{\mathfrak{W}}$ *положительно определен, то и* $A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}}$ *положительно определен.*

(v)* $(A^*_{\mathfrak{W}})_{|\mathfrak{V}} = A^*_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}}$.

(vi)* $(A_{\mathfrak{W}} B_{\mathfrak{W}})_{|\mathfrak{V}} = A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}} B_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}}$.

Положим теперь для каждого $A_{\mathfrak{W}} \in \mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$

$$t(A_{\mathfrak{W}}) = \frac{D(\mathfrak{V})}{D(\mathfrak{W})} T_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{V})}}(A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}}). \tag{2}$$

Сравнивая (2) и (i)* — (vi)* с (i) — (vi) в «свойстве III» из [2, с. 218 — 219], мы видим сразу же, что $t(A_{\mathfrak{W}})$ удовлетворяет (ii) — (vi), включая (iv)′, упомянутые там (для $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$, $\mathfrak{W}$ вместо $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$). (vi)′ тоже выполнено, ибо оно является следствием (vi) (подставить $U^{-1}A$, U вместо A, B). Наконец, проверим (i). С учетом (2) и (i)* оно превращается в

$$1 = \frac{D(\mathfrak{W})}{D(\mathfrak{V})} T_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{V})}}(E_{(\mathfrak{V})}),$$

т. е.

$$T_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{V})}}(E_{(\mathfrak{V})}) = \frac{D(\mathfrak{V})}{D(\mathfrak{W})}. \tag{3}$$

Далее, из «свойства III», (*) в [2, с. 218 — 219] вместе с [1, с. 219 (конец первого пункта)] мы знаем, что для каждого идемпотента

$$F = P_{\mathfrak{P}}, \qquad \mathfrak{P} \subset \mathfrak{V}, \qquad T_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{V})}}(F_{(\mathfrak{V})}) = D'(F_{(\mathfrak{V})}) = D'(\mathfrak{P}),$$

где $D'(\mathfrak{P})$ — функция относительной размерности $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{V})}$ в стандартной нормировке, т. е. с $D'(\mathfrak{V}) = 1$. Согласно лемме 11.3.7 из [1, с. 188] $D(\mathfrak{P})$ тоже явля-

ется функцией относительной размерности в $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{V})}$, но для того чтобы нормировать ее стандартным образом, мы должны разделить ее на $D(\mathfrak{V})$. Таким образом, $D'(\mathfrak{P}) = D(\mathfrak{P})/D(\mathfrak{V})$ и, следовательно, $T_{\mathfrak{M}(\mathfrak{V})}(F_{(\mathfrak{V})}) = D(\mathfrak{P})/D(\mathfrak{V})$. Теперь, полагая $\mathfrak{P} = \mathfrak{W}$, $F = E$, получим (3). Таким образом, (i) тоже проверено.

Итак, мы проверили, что $t(A_{\mathfrak{W}})$ удовлетворяет всем условиям (i) — (vi)′ из «свойства III» в [2, с. 218 — 219]. Тогда согласно «свойству IV» из [2, с. 219] мы имеем $T_{\mathfrak{M}(\mathfrak{W})}(A_{\mathfrak{W}}) = t(A_{\mathfrak{W}})$. Или, если мы подставим это в (2),

$$D(\mathfrak{W})\, T_{\mathfrak{M}(\mathfrak{W})}(A_{\mathfrak{W}}) = D(\mathfrak{V})\, T_{\mathfrak{M}(\mathfrak{V})}(A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}}). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь наш исходный оператор A. Поскольку он содержится в $\mathfrak{W}$, то по лемме 1.2.3 $EA = AE = A$, а потому он совпадает с 0 на $\mathfrak{H} - \mathfrak{W}$. Значит, мы имеем для $A_{\mathfrak{W}} = A_{(\mathfrak{W})}$ также и $A_{\mathfrak{W}|\mathfrak{V}} = A_{(\mathfrak{V})}$. После такой подстановки, однако, (4) превращается в

$$D(\mathfrak{W})\, T_{\mathfrak{M}(\mathfrak{W})}(A_{(\mathfrak{W})}) = D(\mathfrak{V})\, T_{\mathfrak{M}(\mathfrak{V})}(A_{(\mathfrak{V})}),$$

что согласно определению 1.2.3 в точности совпадает с (1).

Этим и завершается доказательство для случая $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{V}$ произвольны. Образуем $\mathfrak{P} = [\mathfrak{W}, \mathfrak{V}]$. Это $\mathfrak{P}$ будет вместе с $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{V}$ $\eta\, \mathfrak{M}$, а также будет конечным [1, с. 160, лемма 7.3.5]. Мы имеем $\mathfrak{W}, \mathfrak{V} \subset \mathfrak{P}$, а, кроме того, $\mathfrak{P}$ содержит A, ибо $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{V}$ содержат его. Итак, мы имеем (1) для $\mathfrak{W}, \mathfrak{P}$ и для $\mathfrak{V}, \mathfrak{P}$ (вместо $\mathfrak{W}, \mathfrak{V}$) а потому и для $\mathfrak{W}, \mathfrak{V}$

Таким образом, доказательство закончено.

Определение 1.2.4. *Учитывая лемму* 1.2.5, *мы можем опустить* $\mathfrak{W}$ *из* $\overline{T}_{\mathfrak{M}(\mathfrak{W})}(A)$ *определения* 1.2.3. *Поэтому мы будем для любого* $A \in \mathfrak{M}$ *с конечным рангом* (*в смысле определения* 1.2.3) *писать*:

$$\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A) = \overline{T}_{\mathfrak{M}(\mathfrak{W})}(A).$$

Теперь без труда доказывается

Теорема. I. $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A)$ *обладает свойствами* (ii) — (vi) *из «свойства* III» *в* [2, с. 218 — 219]. *Иначе говоря*:

(ii) $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(aA) = a\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A)$, *где a — комплексное число*;

(iii) $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A + B) = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A) + \overline{T}_{\mathfrak{M}}(B)$;

(iv) $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A) \geqslant 0$, *если A положительно определен*;

(iv)′ $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A) > 0$, *если A положительно определен и* $\neq 0$;

(v) $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*) = \overline{\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A)}$;

(vi) $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(AB) = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(BA)$, *если A или B имеет конечный ранг и оба* $\in \mathfrak{M}$;

(vi)′ $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(U^{-1}AU) = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A)$, *если U* ($\in \mathfrak{M}$) *унитарен*.

Кроме того, мы имеем:

(vii) $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(E) = D(E)$, *если E* ($\in \mathfrak{M}$) *— конечный проектор*.

(Во всех (i) — (vii) следует иметь в виду лемму 1.2.2).

Доказательство. (ii), (iv), (iv)′, (v) следуют немедленно из соответствующих утверждений «свойства III» в [2, с. 218—219]. Нам нужно только заметить в (ii) и (v), что $\mathfrak{W}$ содержит aA, A^* вместе с A. Для (iv)′ нужно учесть, что если $\mathfrak{W}$ содержит A, то из $A_{(\mathfrak{W})} = 0$ следует, что $A = 0$.

(iii) и (vi), когда и A и B имеют оба конечный ранг. Для того чтобы вывести их из соответствующих утверждений «свойства III», нам нужно только найти конечное $\mathfrak{W}\eta\mathfrak{M}$, которое бы содержало A и B. Пусть $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{V}\eta\mathfrak{M}$ конечны и содержат A и B соответственно. Тогда $\mathfrak{P} = [\mathfrak{W}, \mathfrak{V}]$ удовлетворяет всем требованиям. (Конечность следует из леммы 7.3.5 на с. 160 в [1].)

(vi). Поскольку утверждение симметрично относительно A и B, мы вправе предполагать, что A имеет конечный ранг. Тогда и BA имеет конечный ранг, выберем конечное $\mathfrak{W}\eta\mathfrak{M}$, которое содержит A и BA (см. выше). Тогда согласно лемме 1.2.3 мы имеем для $E = P_{\mathfrak{W}}$: $AE = A$, $EBA = BA$. Следовательно,

$$AB = AE\cdot B = A\cdot EB,$$

$$BA = EBA = EB\cdot A.$$

Далее, A имеет конечный ранг и EB вместе с E тоже имеет конечный ранг. Поэтому наши предыдущие результаты дают $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A\cdot EB) = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(EB\cdot A)$, и, следовательно, $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(AB) = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(BA)$.

(vi)′. Выберем $U^{-1}A$, U в качестве A, B в (vi). $U^{-1}A$ имеет конечный ранг вместе с A.

(vii). Положим $E = P_{\mathfrak{W}}$, $\mathfrak{W}$ конечно вместе с E, оно $\eta\mathfrak{M}$ и, очевидно, содержит E. $E_{(\mathfrak{W})} = I_{(\mathfrak{W})}$ является единицей в $\mathfrak{M}$. Поэтому для $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}$, с учетом (i) из «свойства III», из определения 1.2.3 мы получаем, так же как и ранее,

$$\overline{T}_{\mathfrak{M}}(E) = D(\mathfrak{W})\, T_{\mathfrak{M}_{(\mathfrak{W})}}(E_{(\mathfrak{W})}) = D(\mathfrak{W}).$$

1.3. Наш новый относительный след $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A)$ определен только для $A \in \mathfrak{M}$ с конечным рангом. Теперь мы хотим распространить это определение на более широкую область операторов $A \in \mathfrak{M}$ при помощи подходящего предельного перехода.

Прежде всего мы определим *норму* в пространстве всех $A \in \mathfrak{M}$ с конечным рангом, обозначаемую через $[[A]]$, которая аналогична понятию из определения 4.3.1 и леммы 4.3.2 из [2, с. 241] (особенно леммы).

Определение 1.3.1. *Если $A \in \mathfrak{M}$ имеет конечный ранг, определим «норму» A — число $[[A]] \geqslant 0$ — равенством*

$$[[A]] = (\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*A))^{1/2} = (\overline{T}_{\mathfrak{M}}(AA^*))^{1/2}.$$

(Напомним (iv), (vi) из теоремы I. AA^*, A^*A, очевидно, положительно определены.)

Теорема II. *$[[A]]$ обладает характерными свойствами нормы в линейном пространстве. Именно*:

(i) *Всегда $[[A]] \geqslant 0$ и $=0$, если и только если $A = 0$.*

(ii) *$[[aA]] = |a|\,[[A]]$ для любого комплексного a.*

(iii) $[[A+B]] \leqslant [[A]] + [[B]]$.

$[[A]]$ *обладает также следующими дополнительными свойствами:*

(iv) $[[A^*]] = [[A]]$.

(v) $[[AB]] \leqslant \begin{cases} |||A|||\,[[B]], & \text{где только } B \text{ должен иметь конечный ранг,} \\ |||B|||\,[[A]], & \text{где только } A \text{ должен иметь конечный ранг.} \end{cases}$

(vi) $|\overline{T}_{\mathfrak{M}}(AB)| \leqslant [[A]]\,[[B]]$, *где* A, B *должны оба иметь конечный ранг.*

(vii) $[[E]] = (D(E))^{1/2}$, *где* E — *конечный проектор.*

Доказательство. Мы докажем эти утверждения в несколько измененном порядке.

(i) получается непосредственно из теоремы I, (iv), (iv)′, если вспомнить, что из $A^*A = 0$ следует $A = 0$[1].

(ii). Непосредственно из теоремы I, (ii).

(iv). Немедленно из формы определения 1.3.1.

(vii). Немедленно из теоремы I, (vii), ибо $E^*E = E^2 = E$.

(v), первое неравенство. Положим $|||A||| = a$, тогда $a^2I - A^*A$ положительно определен[2], значит, и $B^*(a^2I - A^*A)B$ положительно определен[3]. Тогда

$$B^*(a^2I - A^*A)B = a^2B^*B - B^*A^*AB = a^2B^*B - (AB)^*(AB),$$

так что последнее выражение тоже положительно определено. Поэтому теорема I, (iv) вместе с (ii), (iii) оттуда же дает

$$0 \leqslant \overline{T}_{\mathfrak{M}}(a^2B^*B - (AB)^*(AB)) = a^2\overline{T}_{\mathfrak{M}}(B^*B) - \\ - \overline{T}_{\mathfrak{M}}((AB)^*(AB)) = a^2[[B]]^2 - [[AB]]^2,$$

$$[[AB]] \leqslant a[[B]] = |||A|||\,[[B]].$$

Докажем (v), второе неравенство. Скомбинируем полученный выше результат с (iv):

$$[[AB]] = [[(AB)^*]] = [[B^*A^*]] \leqslant |||B^*|||\,[[A^*]] \overset{4}{=} |||B|||\,[[A]].$$

Докажем (vi). Учитывая (iv), мы можем вместо этого доказать, что

$$|\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B)| \leqslant [[A]]\,[[B]]. \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться теоремой I, (ii), (iii), (v) и (ii) выше:

$$0 \leqslant [[A-B]]^2 = \overline{T}_{\mathfrak{M}}((A-B)^*(A-B)) = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*A + B^*B - A^*B - B^*A) =$$

---

[1] $\|Af\|^2 = (Af, Af) = (A^*Af, f) = 0$, $\|Af\| = 0$, значит, $A = 0$.

[2] $((a^2I - A^*A)f, f) = a^2(f, f) - (A^*Af, f) = a^2(f, f) - (Af, Af) = a^2\|f\|^2 - \|Af\|^2 \geqslant 0$.

[3] B^*CB всегда положительно определен вместе с C:

$$(B^*CBf, f) = (CBf, Bf) \geqslant 0.$$

[4] $|||B^*||| = |||B|||$ (см. [5, с. 384, сноска 36]).

$$= \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*A) + \overline{T}_{\mathfrak{M}}(B^*B) - \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B) - \overline{T}_{\mathfrak{M}}(B^*A) =$$

$$= [[A]]^2 + [[B]]^2 - \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B) - \overline{\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B)} =$$

$$= [[A]]^2 + [[B]]^2 - 2\mathfrak{R}\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B),$$

$$\mathfrak{R}\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B) \leqslant {}^1/_2\,[[A]]^2 + {}^1/_2\,[[B]]^2.$$

После замены A, B на aA, $(1/a)\,B$, где $a > 0$, это превращается в

$$\mathfrak{R}\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B) \leqslant a^2\,[[A]]^2/2 + [[B]]^2/2a^2.$$

Наибольшая нижняя грань правой части по всем $a > 0$ равна $[[A]][[B]]$, следовательно,

$$\mathfrak{R}\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B) \leqslant [[A]]\,[[B]].$$

Заменим теперь B на $e^{i\alpha}B$ с вещественным α; получим

$$\mathfrak{R}\,(e^{i\alpha}\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B)) \leqslant [[A]]\,[[B]].$$

Максимум левой части по всем вещественным α равен $|\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B)|$, отсюда следует (5).

Докажем (iii). Используем теорему I, (iii), и (iv), (vi) выше:

$$[[A+B]]^2 = \overline{T}_{\mathfrak{M}}((A+B)^*(A+B)) = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*A + B^*B +$$

$$+ A^*B + B^*A) = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*A) + \overline{T}_{\mathfrak{M}}(B^*B) + \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*B) +$$

$$+ \overline{T}_{\mathfrak{M}}(B^*A) \leqslant [[A]]^2 + [[B]]^2 + 2\,[[A]]\,[[B]] = ([[A]] + [[B]])^2,$$

$$[[A+B]] \leqslant [[A]] + [[B]].$$

Повсюду в дальнейшем мы будем пользоваться результатами этих теорем I и II, не ссылаясь на них явно. Теорема II позволяет нам также использовать $[[A]]$ как *норму*, а $[[A - B]]$— как *расстояние*, не вдаваясь в дальнейшие комментарии.

$|||\,A\,|||$ и $[[A]]$ дают нам две разные численные оценки величины A. Поэтому было бы полезно оценить одну из них в терминах другой. Это возможно лишь в весьма ограниченной степени и будет сделано в последующих леммах 1.3.1 и 1.3.2 (см., однако, B.3 в (B) из п. 1.6, где $\mathfrak{M}$ лежит в классе (I_∞)).

Лемма 1.3.1. $[[A]] \leqslant (\mathrm{Rank}\,(A))^{1/2}\cdot|||\,A\,|||$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{W} = [\mathrm{Range}\,A]$, $E = P_{\mathfrak{W}}$. Тогда из $A \in \mathfrak{M}$ следует $\mathfrak{W}\eta\mathfrak{M}$, $E \in \mathfrak{M}$ (см. определение 1.2.2) и $D(E) = D(\mathfrak{W}) = D([\mathrm{Range}\,A]) = \mathrm{Rank}\,(A)$, $[[E]] = (D(E))^{1/2} = (\mathrm{Rank}\,(A))^{1/2}$. Любой Af принадлежит $\mathfrak{W}$, так что $EAf = Af$, т. е. $EA = A$. Отсюда

$$[[A]] = [[EA]] \leqslant [[E]]\,|||\,A\,||| = (\mathrm{Rank}\,(A))^{1/2}\cdot|||\,A\,|||.$$

Лемма 1.3.2. *Если* $[|A|] \leqslant \delta\varepsilon$ *с* $\delta, \varepsilon > 0$, *то существует такой* $E \in \mathfrak{M}$ *с* $D(E) \leqslant \varepsilon^2$, *что* $|||A(I-E)||| \leqslant \delta$.

Доказательство A^*A эрмитов и ограничен, а значит, имеет спектральное представление

$$(A^*Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)f, g). \tag{6}$$

(Это — приложение хорошо известной спектральной теоремы для ограниченных операторов, см., например, [5, с. 389—390, сноску 42, и с. 418] или [1, с.212, определение 15.1.1]. Интеграл Стилтьеса сходится, см. там же.) $E(\lambda), -\infty < \lambda < \infty$,— разложение единицы (см. там же). Положим в (6) $f = g$, поскольку $(A^*Af, f) = (Af, Af) = \| Af \|^2$, $(E(\lambda)f, f) = \| E(\lambda) f \|^2$, мы получаем

$$\| Af \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(\| E(\lambda) f \|^2). \tag{7}$$

Положим $f = E(\lambda_0) g$ с $\lambda_0 < 0$. Тогда правая часть в (7)

$$= \int_{-\infty}^{\lambda_0} \lambda d(\| E(\lambda) g \|^2) \leqslant \lambda_0 \int_{-\infty}^{\lambda_0} d(\| E(\lambda) g \|^2) = \lambda_0 \| E(\lambda_0) g \|^2.$$

Левая часть (7) $\geqslant 0$, значит, $\lambda_0 < 0$ дает $\| E(\lambda_0) g \|^2 \leqslant 0$, так что $\| E(\lambda_0) g \| = 0$, $E(\lambda_0) g = 0$. Иначе говоря,

$$\lambda < 0 \text{ влечет за собой } E(\lambda) = 0. \tag{8}$$

Теперь (7) и (8) дают для $f = E(\delta^2) g$:

$$\| AE(\delta^2) g \|^2 = \int_0^{\delta^2} \lambda d(\| E(\lambda) g \|^2) \leqslant \delta^2 \int_0^{\delta^2} d(\| E(\lambda) g \|^2) = \delta^2 \| E(\delta^2) g \|^2 \leqslant \delta^2 \| g \|^2,$$

$$\| AE(\delta^2) g \| \leqslant \delta \| g \|,$$

т. е.

$$||| AE(\delta^2) ||| \leqslant \delta. \tag{9}$$

С другой стороны, из (7) и (8) мы имеем

$$(\{A^*A - \delta^2(I - E(\delta^2))\} f, f) = (A^*Af, f) - \delta^2 \| (I - E(\delta^2)) f \|^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda d(\| E(\lambda) f \|^2) - \delta^2 \int_{\delta^2}^{\infty} d(\| E(\lambda) f \|^2) \geqslant \int_{\delta^2}^{\infty} \lambda d(\| E(\lambda) f \|^2) -$$

$$- \delta^2 \int_{\delta^2}^{\infty} d(\| E(\lambda) f \|^2) = \int_{\delta^2}^{\infty} (\lambda - \delta^2) d(\| E(\lambda) f \|^2) \geqslant 0.$$

Таким образом, $A^*A - \delta^2(I - E(\delta^2))$ положительно определен и

$$[|A|]^2 = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A^*A) \geqslant \delta^2 \overline{T}_{\mathfrak{M}}(I - E(\delta^2)) = \delta^2 D(I - E(\delta^2)).$$

Но $[|A|]^2 \leqslant \delta^2\varepsilon^2$, следовательно,

$$D(I - E(\delta^2)) \leqslant \varepsilon^2. \tag{10}$$

Таким образом, (9) и (10) показывают, что $E = I - E(\delta^2)$ удовлетворяет всем требованиям.

1.4. Определение 1.4.1. *Последовательность операторов A_1, A_2, ... называется «регулярной», если она обладает следующими свойствами:*

(i) *все $A_n \in \mathfrak{M}$;*

(ii) *все A_n имеют конечные ранги (ранги не обязаны быть ограниченными);*

(iii) *числа $|||A_1|||$, $|||A_2|||$, ... ограничены.*

Определение 1.4.2. *Регулярная последовательность A_1, A_2, ... называется «фундаментальной», если*

$$\lim_{m,n\to\infty} [[A_m - A_n]] = 0.$$

Определение 1.4.3. *Две регулярные последовательности A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... «эквивалентны», если*

$$\lim_{n\to\infty} [[A_n - B_n]] = 0.$$

Во всех последующих рассуждениях о сходимости операторов мы будем использовать сильную сходимость. Приведем определение (см. [5, с. 381—382]):

Определение 1.4.4. *Последовательность A_1, A_2, ... «сильно сходится» к пределу A, символически,*

$$\lim \operatorname{str}_{n\to\infty} A_n = A,$$

если выполнены следующие условия:

(i) *числа $|||A_1|||$, $|||A_2|||$, ... ограничены;*

(ii) *для каждого $f \in \mathfrak{H}$*

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n f - Af \| = 0.$$

Мы будем использовать только наиболее очевидные свойства сильной сходимости (см. [5, с. 382—384]. В определении 1.4.4 (i) является следствием (ii), см. [5, с. 382, сноска 35], но нам этот факт не потребуется.)

Теперь мы переходим к установлению связей между фундаментальными последовательностями и эквивалентностью, с одной стороны, и сильной сходимостью — с другой.

Лемма 1.4.1. *Пусть A_1, A_2, ... — регулярная последовательность с*

$$\lim_{n\to\infty} [[A_n]] = 0.$$

Тогда в ней найдется подпоследовательность A_{i_1}, A_{i_2}, ... ($i_n \to \infty$) с

$$\lim \operatorname{str}_{n\to\infty} A_{i_n} = 0.$$

Доказательство. Для каждого $m = 1, 2, \ldots$ существует такое $n_0 = n_0(m)$, что из $n \geqslant n_0$ следует $[[A_n]] \leqslant 1/4^m$. Выберем $i_1 < i_2 < \ldots$ с $i_m \geqslant n_0(m)$. Тогда мы получим

$$[[A_{i_m}]] \leqslant 1/4^m.$$

Применим лемму 1.3.2. с $\delta = \varepsilon = 1/2^m$ и получим $E_m \in \mathfrak{M}$ с

$$D(E_m) \leqslant 1/4^m, \tag{11}$$

$$||| A_{i_m}(I - E_m) ||| \leqslant 1/2^m. \tag{12}$$

Положим $E_m = P_{\mathfrak{W}_m}$, $\mathfrak{B}_m = [\mathfrak{W}_m, \mathfrak{W}_{m+1}, \ldots]$, $F_m = P_{\mathfrak{B}_m}$. Тогда мы также получим $F_m \in \mathfrak{M}$ и лемма 8.3.2. на с. 168 из [1] даст

$$D(\mathfrak{B}_m) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} D(\mathfrak{W}_n),$$

$$D(F_m) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} D(E_n) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} 1/4^n = \frac{1}{3 \cdot 4^{m-1}},$$

$$D(F_m) \leqslant \frac{1}{3 \cdot 4^{m-1}}. \qquad (13$$

Кроме того, согласно построению $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{B}_m \supset \mathfrak{B}_{m+1}$, $F_m \geqslant F_{m+1}$, т. е.

$$\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \ldots, \qquad F_1 \geqslant F_2 \geqslant \ldots \qquad (14)$$

Отсюда согласно теореме 19 из [4, с .77] мы имеем $\lim \mathrm{str}_{m\to\infty} F_m = F = P_{\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 \cdot \ldots}$ и согласно лемме 8.3.4. из [1, с. 169]

$$D(P_{\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 \cdot \ldots}) = \lim_{m\to\infty} D(\mathfrak{B}_m), \qquad D(F) = \lim_{m\to\infty} D(F_m).$$

Но это равно нулю согласно (13), так что $F = 0$, т. е.

$$\lim \mathrm{str}_{n\to\infty} F_m = 0. \qquad (15)$$

(12) означает, что $\| A_{i_m}(I - E_m) f \| \leqslant 1/2^m \| f \|$, значит, для $f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{W}_m$

$$\| A_{i_m} f \| \leqslant 1/2^m \| f \|. \qquad (16)$$

По построению $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{W}_m \subset \mathfrak{B}_m$, значит, $\mathfrak{H} - \mathfrak{W}_m \supset \mathfrak{H} - \mathfrak{B}_m$, и (16) справедливо для всех $f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{B}_m$. Пусть, наконец, $f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{B}_p$, $m \geqslant p$. Тогда (14) дает $\mathfrak{B}_p \supset \supset \mathfrak{B}_m$, так что $\mathfrak{H} - \mathfrak{B}_p \subset \mathfrak{H} - \mathfrak{B}_m$, и (16) снова выполнено.

Итак, при $f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{B}_p$ (16) выполнено для всех $m \geqslant p$. Иначе говоря, тогда

$$\lim_{m\to\infty} \| A_{i_m} f \| = 0. \qquad (17)$$

Поскольку (17) справедливо в любом $\mathfrak{H} - \mathfrak{B}_p$, учитывая (15), мы видим, что область, где (17) справедливо, является множеством, всюду плотным в $\mathfrak{H}$[5].

Но область, где справедливо (17), является замкнутым множеством, ибо A_1, A_2, ... равностепенно непрерывны согласно (iii) из определения 1.4.1. Значит, она включает все $\mathfrak{H}$. Таким образом, (ii) из определения 1.4.4 установлено для последовательности A_{i_1}, A_{i_2}, ... (i) (оттуда же) следует из определения 1.4.1.

Лемма 1 4.2. *Пусть A_1, A_2, ... — фундаментальная последовательность. Тогда существует* $\lim \mathrm{str}_{n\to\infty} A_n$.

Доказательство. Поскольку (i) из определения 1.4.4 следует из (iii) определения 1.4.1, мы должны лишь проверить истинность (ii) из определения 1.4 4 для подходящего A, т. е. существование для каждого $f \in \mathfrak{H}$ такого $g \in \mathfrak{H}$ (который впоследствии будет играть роль Af), что $\lim_{n\to\infty} \| A_n f - g \| = 0$. Поскольку $\mathfrak{H}$ полно, это имеет место, если

$$\lim_{m,n\to\infty} \| A_m f - A_n f \| = 0. \qquad (18)$$

---

[5] Рассмотрим произвольный $f \in \mathfrak{H}$. Тогда $f_p = (I - F_p) f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{B}_p$, и $\lim_{p\to\infty} \| f - f_p \| = \lim_{p\to\infty} \| F_p f \| = 0$ согласно (15).

Поэтому предположим противное: для некоторого $f \in \mathfrak{H}$ (18) не справедливо. Итак, мы имеем такие $f_0 \in \mathfrak{H}$ и $\delta > 0$, что

$$\| A_{i_n} f_0 - A_{j_n} f_0 \| \geqslant \delta, \qquad n = 1, 2, \ldots, \text{ где } i_n, \ j_n \to \infty. \tag{19}$$

Из того, что $A_1, A_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность, мы немедленно заключаем, что $A_{i_1} - A_{j_1}$, $A_{i_2} - A_{j_2}, \ldots$ образуют регулярную последовательность с $\lim_{n\to\infty} [[A_{i_n} - A_{j_n}]] = 0$. Применим теперь лемму 1.4.1 к $A_{i_1} - A_{j_1}$, $A_{i_2} - A_{j_2}, \ldots$ (в качестве $A_1, A_2, \ldots$). Мы получим, что эта последовательность содержит подпоследовательность $A_{i_{k_1}} - A_{j_{k_1}}$, $A_{i_{k_2}} - A_{j_{k_2}}, \ldots$ ($k_n \to \infty$) с $\lim \operatorname{str}_{n\to\infty}(A_{i_{k_n}} - A_{j_{k_n}}) = 0$. Поэтому, в частности, $\lim_{n\to\infty} \| (A_{i_{k_n}} - A_{j_{k_n}}) f_0 \| = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \| A_{i_{k_n}} f_0 - A_{j_{k_n}} f_0 \| = 0, \tag{20}$$

(19) и (20) противоречат друг другу, что и завершает доказательство.

Лемма 1.4.3. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность с $\lim \operatorname{str}_{n\to\infty} A_n = 0$. Тогда в ней содержится подпоследовательность $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots$ ($i_n \to \infty$) с*

$$\lim_{n\to\infty} [[A_{i_n}]] = 0.$$

Доказательство. Поскольку $A_1, A_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность, мы имеем $\lim_{n,m\to\infty} [[A_m - A_n]] = 0$. Значит, для любого $p = 1, 2, \ldots$ существует такое $n_0 = n_0(p)$, что из $m, n \geqslant n_0$ следует $[[A_m - A_n]] \leqslant 1/4^p$. Выберем $i_1 < i_2 < \ldots$ с $i_p \geqslant n_0(p)$. Тогда мы получим

$$[[A_{i_p} - A_{i_{p+1}}]] \leqslant 1/4^p.$$

Применив лемму 1.3.2 с $\delta = \varepsilon = 1/2^p$, мы получим $E_p \in \mathfrak{M}$ с

$$D(E_p) \leqslant 1/4^p, \tag{21}$$

$$||| (A_{i_p} - A_{i_{p+1}})(1 - E_p) ||| \leqslant 1/2^p. \tag{22}$$

Далее будем поступать так же, как при доказательстве леммы 1.4.1. Положим $E_p = P_{\mathfrak{W}_p}$, $\mathfrak{V}_p = [\mathfrak{W}_p, \mathfrak{W}_{p+1}, \ldots]$, $F_p = P_{\mathfrak{V}_p}$. Мы снова получим $F_m \in \mathfrak{M}$ и, как и ранее,

$$D(\mathfrak{V}_p) \leqslant \sum_{q=p}^{\infty} D(\mathfrak{W}_q),$$

$$D(F_p) \leqslant \sum_{q=p}^{\infty} D(E_q) \leqslant \sum_{q=p}^{\infty} \frac{1}{4^q} = \frac{1}{3 \cdot 4^{p-1}},$$

$$D(F_p) \leqslant \frac{1}{3 \cdot 4^{p-1}}. \tag{23}$$

По построению $\mathfrak{V}_p$, $\mathfrak{V}_p \supset \mathfrak{V}_{p+1}$, так что $\mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \ldots$ и

$$\mathfrak{H} - \mathfrak{V}_1 \subset \mathfrak{H} - \mathfrak{V}_2 \subset \ldots \tag{24}$$

Рассмотрим теперь $f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{B}_q$. Тогда согласно (24) для каждого $p \geqslant q$ мы также имеем $f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{B}_p$, значит, $(I - E_p) f = f$. Поэтому (22) дает для таких f

$$\| A_{i_p} f - A_{i_{p+1}} f \| \leqslant \frac{1}{2^p} \| f \|.$$

Если $r > s \geqslant q$, то это неравенство приложимо для $p = s, s+1, \ldots, r-1$.

Сложение дает

$$\| A_{i_s} f - A_{i_r} f \| = \left\| \sum_{p=s}^{r-1} (A_{i_p} f - A_{i_{p+1}} f) \right\| \leqslant \sum_{p=s}^{r-1} \| A_{i_p} f - A_{i_{p+1}} f \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=s}^{r-1} \frac{1}{2^p} \| f \| \leqslant \frac{1}{2^{s-1}} \| f \|,$$

$$\| A_{i_s} f - A_{i_r} f \| \leqslant \frac{1}{2^{s-1}} \| f \|. \tag{25}$$

Далее, из $\lim \mathrm{str}_{n \to \infty} A_n = 0$ следует $\lim_{n \to \infty} \| A_n f \| = 0$, и a fortiori $\lim_{r \to \infty, r > s} \| A_{i_r} f \| = 0$. Значит, если для фиксированного $s \geqslant q$ мы положим $r \to \infty$ с $r > s$, то (25) даст

$$\| A_{i_s} f \| \leqslant 1/2^{s-1} \| f \| \quad \text{для } s \geqslant q. \tag{26}$$

Это справедливо для каждого $f \in \mathfrak{H} - \mathfrak{B}_q$, т. е. для каждого $f = (I - F_q) g$. Подстановка последнего равенства в (26) дает

$$\| A_{i_s} (I - F_q) g \| \leqslant 1/2^{s-1} \| (I - F_q) g \| \leqslant 1/2^{s-1} \| g \|.$$

Иными словами,

$$||| A_{i_s} (I - F_q) ||| \leqslant 1/2^{s-1}. \tag{27}$$

Получив (27), мы можем перейти к общей оценке A_n.

Поскольку согласно (iii) из определения 1.4 1 числа $||| A_1 |||$, $||| A_2 |||$, ... ограничены, найдется постоянное число a с

$$||| A_n ||| \leqslant a \quad \text{для } n = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

При этом (23) и (28) дают

$$[[A_{i_s} F_q]] \leqslant ||| A_{i_s} ||| \, [[F_q]] = ||| A_{i_s} ||| \cdot (D(F_q))^{1/2} \leqslant a (3 \cdot 4^{q-1})^{-1/2},$$

$$[[A_{i_s} F_q]] \leqslant a (3 \cdot 4^{q-1})^{-1/2}. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь любой конечный проектор $G \in \mathfrak{M}$. Тогда из (27), (29) следует

$$[[G A_{i_s}]] \leqslant [[G A_{i_s} F_q]] + [[G A_{i_s} (I - F_q)]] \leqslant ||| G ||| \, [[A_{i_s} F_q]] + ||| A_{i_s} (I - F_q) ||| \times$$

$$\times [[G]] \leqslant a (3 \cdot 4^{q-1})^{-1/2} + (D(G))^{1/2} / 2^{s-1},$$

$$[[G A_{i_s}]] \leqslant a (3 \cdot 4^{q-1})^{-1/2} + \frac{(D(G))^{1/2}}{2^{s-1}}. \tag{30}$$

Положим $\mathfrak{P}_q = [\text{Range}\, A_{i_q}]$, $G_q = P_{\mathfrak{P}_q}$. Снова $\mathfrak{P}_q \eta \mathfrak{M}$, $G_q \in \mathfrak{M}$. Кроме того, всегда $A_{i_q} f \in \mathfrak{P}_q$, $G_q A_{i_q} f = A_{i_q} f$, т. е. $G_q A_{i_q} = A_{i_q}$. Значит, $(I - G_q) A_{i_q} = 0$ и, следовательно,

$$(I - G_q)(A_{i_s} - A_{i_q}) = (I - G_q) A_{i_s}.$$

Тогда, учитывая наше исходное построение $i_1, i_2, \ldots$,

$$[[(I - G_q) A_{i_s}]] = [[(I - G_q)(A_{i_s} - A_{i_q})]] \leqslant |||\, I - G_q\, |||\, [[A_{i_s} - A_{i_q}\, ||| \leqslant 1 \cdot 4^{-q} = 4^{-q},$$

$$[[(I - G_q) A_{i_s}]] \leqslant 4^{-q}, \quad \text{если } s \geqslant q. \tag{31}$$

Теперь скомбинируем (30) с $G = G_q$ и (31), памятуя о том, что $D(G_q) = D(\mathfrak{P}_q) = \text{Rank}\,(A_{i_q})$. Мы получим

$$[[A_{i_s}]] \leqslant 4^{-} + a (3 \cdot 4^{q-1})^{-1/2} + 2^{1-s} (\text{Rank}\,(A_{i_q}))^{1/2}, \quad \text{если } s \geqslant q. \tag{32}$$

Наконец, пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое $q = q(\varepsilon)$, что $4^{-q} + a(3 \cdot 4^{q-1})^{-1/2} \leqslant \varepsilon/2$, а затем такое $s_0 = s_0(\varepsilon, q)$, что $s_0 \geqslant q$ и $(\text{Rank}\,(A_{i_q}))^{1/2}/2^{s_0 - 1} \leqslant \varepsilon/2$. Тогда (32) немедленно дает $[[A_{i_s}]] \leqslant \varepsilon$ для $s \geqslant s_0$. Иными словами,

$$\lim_{s \to \infty} [[A_{i_s}]] = 0.$$

Таким образом, доказательство закончено.

Прежде чем двигаться дальше, отметим следующее: обе леммы — 1.4.1 и 1.4.3 — легко могли бы быть усилены путем замены подпоследовательности A_{i_1}, A_{i_2}, ... самой последовательностью A_1, A_2, ... Но их теперешней формы вполне достаточно для наших непосредственных нужд, а наши основные результаты (см. теорему III) немедленно влекут за собой и усиленные формы.

Теорема III. (i) *Для любой фундаментальной последовательности* A_1, A_2, ... *существует* $\lim \text{str}_{n \to \infty} A_n$, *который принадлежит* $\mathfrak{M}$.

(ii) *Для двух фундаментальных последовательностей* A_1, A_2, ... *и* B_1, B_2, ... *равенство*

$$\lim \text{str}_{n \to \infty} A_n = \lim \text{str}_{n \to \infty} B_n$$

выполнено, если и только если они эквивалентны.

(iii) *Для любой фундаментальной последовательности* A_1, A_2, ... *существует* (*числовой!*) $\lim_{n \to \infty} [[A_n]]$, *он зависит только от* $\lim \text{str}_{n \to \infty} A_n$ (*но не от последовательности* A_1, A_2 ...!).

Доказательство. Мы докажем эти утверждения в несколько измененном порядке.

(i). *Существование* $\lim \text{str}_{n \to \infty} A_n$: совпадает с леммой 1.4.2.

(i). $\lim \text{str}_{n \to \infty} A_n \in \mathfrak{M}$: ясно, ибо $A_1, A_2 \ldots \in \mathfrak{M}$, а $\mathfrak{M}$, будучи кольцом, замкнуто в сильной топологии.

(ii). *Достаточность*: пусть A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... — две эквивалентные фундаментальные последовательности. Тогда A_1, B_1, A_2, B_2, ... — тоже фундаментальная последовательность; обозначим ее через C_1, C_2, ... Согласно (i) существует $\lim \text{str}_{n \to \infty} C_n$. Значит, $\lim \text{str}_{n \to \infty} C_{2n-1} = \lim \text{str}_{n \to \infty} C_{2n}$, т. е. $\lim \text{str}_{n \to \infty} A_n = \lim \text{str}_{n \to \infty} B_n$.

(iii). *Существование* $\lim_{n\to\infty}[[A_n]]$: поскольку $A_1, A_2, \ldots$ — фундаментальная последовательность, мы имеем $\lim_{m,n\to\infty}[[A_m - A_n]]=0$. Далее, $|[[A_m]]-[[A_n]]|\leqslant \leqslant [[A_m - A_n]]$[6], откуда $\lim_{m,n\to\infty}([[A_m]] - [[A_n]]) = 0$. Поэтому существует (числовой) предел $\lim_{n\to\infty}[[A_n]]$.

Докажем (ii). *Необходимость*: мы можем заменить $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ на $A_1 - B_1, A_2 - B_2, \ldots$ и $0, 0, \ldots$. Иначе говоря, мы можем предположить, что $B_1 = B_2 = \ldots = 0$. Итак, $A_1, A_2, \ldots$ фундаментальна, и мы предполагаем, что $\lim\operatorname{str}_{n\to\infty}A_n = 0$. Тогда лемма 1.4.3 исключает существование предела $\lim_{n\to\infty}[[A_n]]$, если он в то же время $\neq 0$. Но мы только что доказали часть (iii), которая утверждает существование $\lim_{n\to\infty}[[A_n]]$. Значит, $\lim_{n\to\infty}[[A_n]] = 0$. Иными словами, $A_1, A_2, \ldots$ и $0, 0, \ldots$ эквивалентны. Докажем (iii): $\lim\operatorname{str}_{n\to\infty}A_n$ определяет $\lim_{n\to\infty}[[A_n]]$: мы имеем две фундаментальные последовательности $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ с $\lim\operatorname{str}_{n\to\infty}A_n = \lim\operatorname{str}_{n\to\infty}B_n$ и хотим доказать, что $\lim_{n\to\infty}[[A_n]] = \lim_{n\to\infty}[[B_n]]$. Мы только что доказали необходимость критерия (ii), значит, $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ во всяком случае эквивалентны, т. е. $\lim_{n\to\infty}[[A_n - B_n]] = 0$. Но $|[[A_n]] - [[B_n]]| \leqslant [[A_n - B_n]]$ (см. примеч. 6), значит, $\lim_{n\to\infty}([[A_n]] - [[B_n]]) = 0$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty}[[A_n]] = \lim_{n\to\infty}[[B_n]]$.

Теперь мы можем ввести

Определение 1.4.5. *Тот факт, что* $A_1, A_2 \ldots$ — *фундаментальная последовательность и что* $\lim\operatorname{str}_{n\to\infty}A_n = A$, *будет обозначаться*

$$(A_1, A_2, \ldots) \sim A.$$

Определение 1.4.6. *Мы будем говорить, что оператор* A *«нормирован», если существует последовательность* $A_1, A_2, \ldots$ *с* $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$. *Согласно* (iii) *из теоремы* III *существует* $\lim_{n\to\infty}[[A_n]]$ *для любой такой последовательности, причем он зависит только от* A (*но не от самой последовательности* $A_1, A_2, \ldots$!). *Мы положим «норму»* A, *число* $[[A]]$, *по определению равным этому пределу*: $[[A]] = \lim_{n\to\infty}[[A_n]]$.

Замечания. (i) Каждый A, имеющий конечный ранг, нормирован, ибо тогда мы имеем $(A, A, \ldots) \sim A$. Это устанавливает также, что в таком случае, т. е. когда определено старое $[[A]]$, новое $[[A]]$ совпадает с ним.

(ii) Согласно (i) теоремы III каждый нормированный $A \in \mathfrak{M}$.

(iii) Согласно (i), (ii) теоремы III соотношение

$$(A_1, A_2, \ldots) \sim A$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности взаимно эквивалентных фундаментальных последовательностей $A_1, A_2, \ldots$, с одной стороны, и всеми нормированными A — с другой.

Повсюду в дальнейшем мы будем пользоваться результатами теоремы III, определениями 1.4.5, 1.4.6 и помещенными выше замечаниями, не ссылаясь на них явно.

1.5 Лемма 1.5.1 (i) *Для любого комплексного* a *из* $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$ *следует* $(aA_1, aA_2, \ldots) \sim aA$.

---

[6] Всегда верно $|[[A]] - [[B]]| \leqslant [[A - B]]$. Доказательство: $[[A]] = [[B + (A - B)]] \leqslant \leqslant [[B]] + [[A - B]]$, $[[A]] - [[B]] \leqslant [[A - B]]$. Перестановка A и B дает $[[B]] - [[A]] \leqslant [[A - B]]$. Значит, $\pm([[A]] - [[B]]) \leqslant [[A - B]]$, т. е. $|[[A]] - [[B]]| \leqslant [[A - B]]$.

(ii) *Из* $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$, $(B_1, B_2, \ldots) \sim B$ *следует* $(A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots) \sim A+B$.
(iii) *Из* $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$ *следует* $(A_1B, A_2B, \ldots) \sim AB$ *и* $(BA_1, BA_2, \ldots) \sim BA$ *для любого* $B \in \mathfrak{M}$.
(iv) $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$ *эквивалентно* $(A_1^*, A_2^*, \ldots) \sim A^*$.

Доказательство. (i) $(aA_1, aA_2, \ldots)$ фундаментальна вместе с $(A_1, A_2, \ldots)$, ибо $[[aA_m - aA_n]] = [[a(A_m - A_n)]] = |a|\,[[A_m - A_n]]$. Тогда из $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} A_n = A$ следует $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} aA_n = aA$.

(ii) $(A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots)$ фундаментальна вместе с $(A_1, A_2, \ldots)$ и $(B_1, B_2, \ldots)$, ибо $[[(A_m + B_m) - (A_n + B_n)]] = [[(A_m - A_n) + (B_m - B_n)]] \leqslant [[A_m - A_n]] + [[B_m - B_n]]$. Тогда из $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} B_n = B$ следует $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty}(A_n + B_n) = A + B$.

Докажем (iii). $(A_1B, A_2B, \ldots)$ и $(BA_1, BA_2, \ldots)$ фундаментальны вместе с $(A_1, A_2, \ldots)$, потому что

$$[[A_mB - A_nB]] = [[(A_m - A_n)B]] \leqslant |||B|||\,[[A_m - A_n]],$$

$$[[BA_m - BA_n]] = [[B(A_m - A_n)]] \leqslant |||B|||\,[[A_m - A_n]].$$

Тогда из $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} A_n = A$ следует $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} A_nB = AB$ и $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} BA_n = BA$.

Докажем (iv). Поскольку ** совпадает с тождественным преобразованием, достаточно доказать лишь импликацию вперед. $(A_1^*, A_2^*, \ldots)$ фундаментальна вместе с $(A_1, A_2, \ldots)$, ибо $[[A_m^* - A_n^*]] = [[(A_m - A_n)^*]] = [[A_m - A_n]]$. Значит, существует B с $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} A_n^* = B$, и мы знаем, что $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} A_n = A$[7]. Значит, для каждого $f \in \mathfrak{H}$ мы имеем $\lim_{n\to\infty} \|A_nf - Af\| = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|A_n^*f - Bf\| = 0$. Но тогда и для всех $f, g \in \mathfrak{H}$ $\lim_{n\to\infty}(A_nf, g) = (Af, g)$, $\lim_{n\to\infty}(A_n^*f, g) = (Bf, g)$. Заменяя f, g на g, f в первом соотношении и применяя $\overline{}$, получим $\lim_{n\to\infty}(A_n^*f, g) = (A^*f, g)$. Значит, $(A^*f, g) = (Bf, g)$ для всех $f, g \in \mathfrak{H}$. Поэтому $A^* = B$, и, следовательно, $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} A_n^* = A$. Это завершает доказательство.

Теперь легко доказать основные свойства класса нормированных A и их нормы $[[A]]$.

Теорема IV. $[[A]]$ (*для нормированных* A) *обладает характеристическими свойствами нормы в линейном пространстве. Именно*:

(i) *Всегда* $[[A]] \geqslant 0$ *и* $=0$, *если и только если* $A = 0$.

(ii) aA *нормирован вместе с* A *и* $[[aA]] = |a|\,[[A]]$ *для любого комплексного числа* a.

(iii) $A + B$ *нормирован вместе с* A *и* B *и* $[[A + B]] \leqslant [[A]] + [[B]]$

Справедливы также следующие утверждения:

(iv) A^* *нормирован, если и только если нормирован* A, *при этом* $[[A^*]] = [[A]]$.

(v) AB *нормирован, если нормирован* A *или* B (*и оба* $\in \mathfrak{M}$), *тогда*

$$[[AB]] \leqslant \begin{cases} |||A|||\,[[B]], & \text{если нормирован } B, \\ |||B|||\,[[A]], & \text{если нормирован } A. \end{cases}$$

---

[7] $\lim\mathrm{str}_{n\to\infty}(A_n^*) = (\lim\mathrm{str}_{n\to\infty} A_n)^*$ неверно в общем случае в том смысле, что существование каждой из сторон влечет за собой существование другой (см. [5, с. 382]).

(vi) *Если $A_1, A_2, \ldots$ — регулярная последовательность и A нормирован, то* $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$ *эквивалентно* $\lim_{n\to\infty}[[A_n - A]] = 0$.

Доказательство. (i) Выберем $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$. Тогда $[[A]] = \lim_{n\to\infty}[[A_n]]$. Поскольку все $[[A_n]] \geqslant 0$, то и $[[A]] \geqslant 0$. Но $[[A]] = 0$ означает, что $\lim_{n\to\infty}[[A_n]] = 0$, т. е. эквивалентность $(A_1, A_2, \ldots)$ и $(0, 0, \ldots)$. Поскольку $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$, $(0, 0, \ldots) \sim 0$, это значит, что $A = 0$.

Утверждения (ii), (iii), (iv), (v) немедленно следуют из утверждений (ii), (iii), (iv), (v) теоремы II соответственно. (Во второй части (v) переставить A и B.)

Докажем (vi). *Достаточность.* Предположим, что $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$. Ясно, что $(-A_n, -A_n, \ldots) \sim -A_n$, значит, согласно (ii) из леммы 1.5.1 $(A_1 - A_n, A_2 - A_n, \ldots) \sim A - A_n$. Поэтому $\lim_{m\to\infty}[[A_m - A_n]] = [[A - A_n]]$. Последовательность $A_1, A_2, \ldots$ должна быть фундаментальной, значит, $\lim_{m,n\to\infty}[[A_m - A_n]] = 0$. Поскольку существует $\lim_{m\to\infty}[[A_m - A_n]]$, мы a fortiori имеем

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}[[A_m - A_n]]) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}[[A - A_n]] = 0, \text{ т. е.}$$

$$\lim_{n\to\infty}[[A_n - A]] = 0.$$

Необходимость. Пусть $\lim_{n\to\infty}[[A_n - A]] = 0$. Согласно (iii) выше $[[A_m - A_n]] = [[(A_m - A) - (A_n - A)]] \leqslant [[A_m - A]] + [[A_n - A]]$. Поэтому из сделанного предположения следует, что $\lim_{m,n\to\infty}[[A_m - A_n]] = 0$. Значит, $(A_1, A_2, \ldots)$, будучи регулярной, является даже фундаментальной. Поэтому существует нормированный A' с $(A_1, A_2, \ldots) \sim A'$. Тогда согласно предыдущему результату $\lim_{n\to\infty}[[A_n - A']] = 0$. Опять-таки, используя (iii), имеем $[[A - A']] = [[(A_n - A') - (A_n - A)]] \leqslant [[A_n - A']] + [[A_n - A]]$. Поскольку $\lim_{n\to\infty}[[A_n - A']] = \lim_{n\to\infty}[[A_n - A]] = 0$, это доказывает, что $[[A' - A]] = 0$. Значит, согласно (i) $A - A' = 0$, $A = A'$. Следовательно, $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$.

Лемма 1.5.2. *Если* $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$, $(B_1, B_2, \ldots) \sim B$, *то существует* $\lim_{n\to\infty}\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*)$ *и он зависит только от* A, B *(но не от самих последовательностей* $(A_1, A_2, \ldots)$, $(B_1, B_2, \ldots)$!).

Доказательство. Достаточно доказать это отдельно для $\lim_{n\to\infty}\Re\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*)$ и $\lim_{n\to\infty}\Im\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*)$. А поскольку второе утверждение получается из первого заменой A и A_n на iA и iA_n, нам достаточно рассмотреть только $\lim_{n\to\infty}\Re\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*)$.

Теперь имеем

$$\begin{aligned} {}^1/_2([[A_n + B_n]]^2 - [[A_n]]^2 - [[B_n]]^2) &= {}^1/_2(\overline{T}_{\mathfrak{M}}((A_n + B_n)(A_n + B_n)^*) - \\ &- \overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nA_n^*) - \overline{T}_{\mathfrak{M}}(B_nB_n^*)) = {}^1/_2(\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*) + \overline{T}_{\mathfrak{M}}(B_nA_n^*)) = \\ &= {}^1/_2(\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*) + \overline{\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*)}) = \Re\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*), \end{aligned}$$

$$\Re\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*) = {}^1/_2([[A_n + B_n]]^2 - [[A_n]]^2 - [[B_n]]^2). \tag{33}$$

Мы имеем $(A_1, A_2, \ldots) \sim A$, $(B_1, B_2, \ldots) \sim B$, а значит, согласно (iii) леммы 1.5.1 и $(A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots) \sim A + B$. Поэтому $\lim_{n\to\infty}[[A_n]] = [[A]]$, $\lim_{n\to\infty}[[B_n]] =$

$= [[B]]$, следовательно, (33) дает

$$\lim_{n\to\infty}\Re\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*) = {}^1/_2([[A+B]]^2 - [[A]]^2 - [[B]]^2).$$

Этим завершается доказательство.

Определение 1.5.1. *Пусть A, B нормированы. Согласно лемме* 1.5.2 *для любых двух последовательностей A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... с $(A_1, A_2, \ldots) \sim \sim A$ и $(B_1, B_2, \ldots) \sim B$ существует $\lim_{n\to\infty}\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*)$, который зависит только от A, B (а не от самих последовательностей $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$!). Определим «внутреннее произведение» A и B — число $\langle\langle A, B\rangle\rangle$ — равным этому пределу: $\langle\langle A, B\rangle\rangle = \lim_{n\to\infty}\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A_nB_n^*)$.*

Повсюду в дальнейшем мы будем пользоваться результатами теоремы IV и определения 1.5.1, не ссылаясь на них явно.

Теорема V. (i) *$\langle\langle A, B\rangle\rangle$ линейно по A и антилинейно по B, оно эрмитово, симметрично по A, B. Точнее говоря,*

$$\langle\langle aA, B\rangle\rangle = a\langle\langle A, B\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle A' + A'', B\rangle\rangle = \langle\langle A', B\rangle\rangle + \langle\langle A'', B\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle A, aB\rangle\rangle = \bar{a}\langle\langle A, B\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle A, B' + B''\rangle\rangle = \langle\langle A, B'\rangle\rangle + \langle\langle A, B''\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle = \overline{\langle\langle BA\rangle\rangle}.$$

(ii)
$$\langle\langle A, A\rangle\rangle = [[A]]^2.$$

(iii)
$$\langle\langle AD, B\rangle\rangle = \langle\langle A, BD^*\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle DA, B\rangle\rangle = \langle\langle A, D^*B\rangle\rangle,$$

где A, B нормированы, а $D \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Все эти утверждения немедленно следуют из определения 1.5.1 и свойств $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(X)$ для X с конечным рангом. (Вспомним, в частности, что $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(XY) = \overline{T}_{\mathfrak{M}}(YX)$, если X или Y имеет конечный ранг и оба $\in \mathfrak{M}$.)

Теперь мы в состоянии доказать такую лемму.

Лемма 1.5.3. *Проектор E нормирован, если и только если он конечен.*

Доказательство. *Достаточность.* Если E конечен, он имеет конечный ранг, следовательно, он нормирован.

Необходимость. Предположим, что E нормирован. Мы хотим доказать, что он конечен, т. е. что если $F \in \mathfrak{M}$ — проектор $\leqslant E$ и $F \sim E$ $(\ldots \mathfrak{M})$ (см. [1, с. 151, определение 6.1.1]), то $F = E$ (см. [1, с. 155, определение 7.1.1]). Итак, предположим, что F обладает указанными выше свойствами (за исключением, конечно, $F = E$).

$$F \sim E\,(\ldots \mathfrak{M}) \text{ означает, что } F = U^*U,\ E = UU^*$$

для некоторого частично изометрического $U \in \mathfrak{M}$ (см. [1, с. 151, определение 6.1.1]), т. е. для U с $UU^*U = U$, $U^*UU^* = U^*$ (см. [1, с. 142, лемма 4. 3. 2]).

Тогда $U = UU^*U = EU$ и $F = U^*U$ нормирован вместе с E. $F \leqslant E$ означает, что $FE = F$.

Теперь с помощью (i) — (iii) из теоремы V мы получаем:

$$\langle\langle E, F\rangle\rangle = \langle\langle E, F^*F\rangle\rangle = \langle\langle FE, F\rangle\rangle = \langle\langle F, F\rangle\rangle = [[F]]^2,$$

$$\langle\langle F, E\rangle\rangle = \overline{\langle\langle E, F\rangle\rangle} = \overline{[[F]]^2} = [[F]]^2,$$

$$[[E - F]]^2 = \langle\langle E - F, E - F\rangle\rangle = \langle\langle E, E\rangle\rangle + \langle\langle F, F\rangle\rangle - \langle\langle E, F\rangle\rangle - \langle\langle F, E\rangle\rangle = [[E]]^2 - [[F]]^2,$$

$$[[E - F]]^2 = [[E]]^2 - [[F]]^2. \tag{34}$$

Кроме того,

$$[[E]]^2 = \langle\langle E, E\rangle\rangle = \langle\langle UU^*, UU^*\rangle\rangle = \langle\langle UU^*U, U\rangle\rangle = \langle\langle U, U\rangle\rangle,$$

$$[[F]]^2 = \langle\langle F, F\rangle\rangle = \langle\langle U^*U, U^*U\rangle\rangle = \langle\langle UU^*U, U\rangle\rangle = \langle\langle U, U\rangle\rangle,$$

$$[[E]]^2 = [[F]]^2. \tag{35}$$

Комбинируя (34) и (35), получаем $[[E - F]]^2 = 0$, $[[E - F]] = 0$ и, следовательно, $E = F$.

Таким образом, доказательство закончено.

Теперь мы могли бы полностью определить нормированный A путем исследования A^*A в спектральной форме и проекторов $E(\lambda)$, образующих его разложение единицы, $-\infty < \lambda < +\infty$. Мы, однако, не будем этого делать здесь, ибо для наших дальнейших надобностей (в частности, для леммы 2.2.1) достаточно леммы 1.5.3.

1.6. Мы хотим сказать несколько слов о значении введенных выше понятий *нормы* и *нормированности* в факторах $\mathfrak{M}$ разных классов. Содержание этого пункта, однако, не является необходимым для понимания дальнейших рассуждений.

(A) $\mathfrak{M}$ *принадлежит классу* (I_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ *или* (II_1). В этом случае $\mathfrak{M}$ лежит в конечном классе, а, значит, каждое $\mathfrak{W}\eta\mathfrak{M}$ конечно и каждый $A \in \mathfrak{M}$ имеет конечный ранг. $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(A)$ определен для всех $A \in \mathfrak{M}$ и совпадает с относительным следом $T_{\mathfrak{M}}(A)$. (В определениях 1. 2. 3 и 1. 2. 4 мы можем выбрать $\mathfrak{W} = \mathfrak{H}$ и стандартную нормировку для $D(\mathfrak{W})$). Поэтому все A нормированы и $[[A]]$, $\langle\langle A, B\rangle\rangle$ означают то же самое, что и в [2, с. 241, определение 4.3.1 и лемма 4.3.2].

(B) $\mathfrak{M}$ *принадлежит классу* (I_∞). Мы можем считать, что $\mathfrak{M}$ совпадает с кольцом $\mathbf{B}$ всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$ (см. [1, с. 173, лемма 8.6.1]). Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — полная нормированная ортогональная система в $\mathfrak{H}$ и каждый $A \in \mathfrak{M} = \mathbf{B}$ представлен своей матрицей:

$$A = \{a_{ij}\}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

$$a_{ij} = (A\varphi_i, \varphi_j).$$

Выберем $D(\mathfrak{W})$ в стандартной нормировке, тогда она совпадает с обычным понятием размерности (см. там же). При этом $\mathrm{Rank}\,(A)$ тоже имеет обычный смысл. Теперь мы покажем, что:

В.1. (i) *Если* Rank (A) *конечен, то* $\sum_1^\infty a_{ii}$ *абсолютно сходится и* $\bar{T}_{\mathrm{B}}(A) = \sum_1^\infty a_{ii}$.

(ii) *Если* Rank (A) *конечен, то* $\sum_{i,j=1}^\infty |a_{ij}|^2$ *абсолютно сходится и* $[[A]]^2 = \sum_{i,j=1}^\infty |a_{ij}|^2$.

Доказательство. (i). Если Rank (A) конечен, то Rank $(A) = D([\mathrm{Range}\, A]) = k = 0, 1, 2, \ldots$, следовательно, $[\mathrm{Range}\, A] = [\psi_1, \ldots \psi_k]$, где $\psi_1, \ldots, \psi_k$ образуют нормированную ортогональную систему. Положим $E_l = P_{[\psi_l]}$, $l = 1, 2, \ldots, k$, тогда $P_{[\mathrm{Range} A]} = E_1 + \ldots + E_k$, так что $A = P_{[\mathrm{Range} A]} A = E_1 A + \ldots + E_k A$. Каждый $E_l A$ имеет ранг не больше 1; так что достаточно доказать (i) для ранга, не большего 1. Как легко видеть, в этом случае $A \approx \{a_{ij}\}$ с $a_{ij} = \alpha_i \beta_j$. Если все $\alpha_i = 0$ или все $\beta_j = 0$, то и все $a_{ij} = 0$, в таком случае наше утверждение тривиально верно. Предположим поэтому, что какое-либо $\alpha_i \neq 0$ и какое-либо $\beta_j \neq 0$. Поскольку каждая сумма $\sum_{i=1}^\infty |a_{ij}|^2$ и каждая сумма $\sum_{i=1}^\infty |a_{ij}|^2$ должны быть конечны [8], отсюда следует, что $\sum_{i=1}^\infty |\alpha_i|^2$, $\sum_{i=1}^\infty |\beta_i|^2$ конечны. Таким образом, мы имеем

$$0 < \sum_{i=1}^\infty |\alpha_i|^2, \quad \sum_{i=1}^\infty |\beta_i|^2 < +\infty.$$

Это сразу же доказывает, что $\sum_{i=1}^\infty a_{ii} = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \beta_i$ абсолютно сходится (по хорошо известному неравенству Шварца). Положим теперь $B = \{b_{ij}\}$, $C = \{c_{ij}\}$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{для } j = 1, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \qquad c_{ij} = \begin{cases} \beta_j & \text{для } i = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $BC = A$, $CB = \{d_{ij}\}$, где

$$d_{ij} = \begin{cases} \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \beta_i & \text{для } i, j = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, $CB = \left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \beta_i\right) E_1$, где $E_1 = P_{[\varphi_1]}$. B, C, очевидно, имеют конечный ранг ($= 1$). Теперь мы имеем (если вспомнить, что $D(E_1) = 1$, а значит, и $\bar{T}_{\mathfrak{M}}(E_1) = 1$):

$$\bar{T}_{\mathfrak{M}}(A) = \bar{T}_{\mathfrak{M}}(BC) = \bar{T}_{\mathfrak{M}}(CB) = \left(\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \beta_i\right) \bar{T}_{\mathfrak{M}}(E_1) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \beta_i.$$

Таким образом, доказательство закончено.

---

[8] $\sum_{j=1}^\infty |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^\infty |(A\varphi_i, \varphi_j)|^2 = \|A\varphi_i\|^2$, так что сумма $\sum_{j=1}^\infty |a_{ij}|^2$ конечна. Рассматривая $A^* \approx \{\overline{a_{ji}}\}$ вместо $A \approx \{a_{ij}\}$, получаем то же для $\sum_{i=1}^\infty |a_{ij}|^2$.

Утверждение (ii) немедленно следует из (i), ибо $A^*A \approx \{g_{ij}\}$, $g_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{ki} a_{kj}$, а, значит, $g_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ki}|^2$, $\sum_{i=1}^{\infty} g_{ii} = \sum_{k,i=1}^{\infty} |a_{ki}|^2$.

В. 2. *A нормирован, если и только если сумма $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$ конечна. Снова* $[[A]]^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$.

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что A нормирован. Положим $E_n = P_{[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]}$. Тогда $|||E_n||| = 1$, значит, $E_n A E_n$ нормирован и $[[E_n A E_n]] \leqslant [[A]]$. Теперь $E_n A E_n$ вместе с E_n имеет конечный ранг, а из $A \approx \{a_{ij}\}$ следует $E_n A E_n \approx \{a_{ij}^{(n)}\}$, где

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} a_{ij} & \text{для } i, j = 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, согласно (ii) из В.1

$$[[E_n A E_n]]^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}^{(n)}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

и $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \leqslant [[A]]$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ Это доказывает конечность $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$.

Достаточность и значение $[[A]]^2$. Предположим, что $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$ конечна. Образуем, как и ранее, E_n и положим $A_n = E_n A E_n$. Каждый A_n имеет конечный ранг, и $|||A_n||| = |||E_n A E_n||| \leqslant |||A|||$. Таким образом, последовательность $A_1, A_2, \ldots$ регулярна. Кроме того, она фундаментальна: если $m \geqslant n$, то $A_m - A_n \approx \{a_{ij}^{(m)} - a_{ij}^{(n)}\}$ и

$$a_{ij}^{(m)} - a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} a_{ij} & \text{для } i, j = 1, \ldots, m, \text{ но не } i, j = 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

следовательно, (используя (ii) из В.1)

$$[[A_m - A_n]]^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}^{(m)} - a_{ij}^{(n)}|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

Значит, для $m \gtreqless n$

$$[[A_m - A_n]]^2 = \left| \sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right|,$$

и поэтому из конечности $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$ следует, что $\lim_{m,n\to\infty} [[A_m - A_n]] = 0$.

Наконец, $\lim \operatorname{str}_{n\to\infty} E_n = I$, а, значит, $\lim \operatorname{str}_{n\to\infty} A_n = \lim \operatorname{str}_{n\to\infty} E_n A E_n = A$. Таким образом, мы имеем

$$(A_1, A_2, \ldots) \sim A.$$

Итак, A нормирован и (используя (ii) из В.1)

$$[[A]]^2 = \lim_{n\to\infty} [[A_n]]^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}^{(n)}|^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2.$$

Доказательство закончено.

B.2 показывает, что класс нормированных A совпадает с хорошо известным классом операторов Е. Шмидта.

Отметим еще, что в этом случае условие $\lim_{m,n\to\infty}[[A_m - A_n]] = 0$ из определения 1.4.2 (из которого следует существование $\lim_{n\to\infty}[[A_n]]$, а значит, и ограниченность последовательности $[[A_1]], [[A_2]], \ldots$) влечет за собой и (iii) из определения 1.4.1. Таким образом, в рассматриваемом сейчас случае (I_∞) условие (iii) из определения 1.4.1 излишне, что неверно в случае (II_∞), как мы увидим в C.1 ниже.

В самом деле, мы имеем:

B.3. $|||\, A\, ||| \leqslant [[A]]$, *если A нормирован.*

Доказательство. Наше неравенство эквивалентно условию $\|Af\| \leqslant [[A]]\,\|f\|$ для каждого $f \in \mathfrak{H}$. Мы, конечно, можем считать, что $\|f\| = 1$ и затем выбрать полную нормированную ортогональную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ с $\varphi_1 = f$. Итак, мы хотим доказать, что $\|\alpha\varphi_1\| \leqslant [[A]]$, т. е. что $\|A\varphi_1\|^2 \leqslant [[A]]^2$. Но это очевидно [9].

(C). $\mathfrak{M}$ *принадлежит классу* (II_∞). В этом случае наши понятия на самом деле новы. Мы хотим только отметить, что B. 3 теперь несправедливо, что оправдывает наши формулировки определений 1.4.1 и 1.4.2 (см. обсуждение выше, перед B.3). В самом деле, мы имеем:

C.1. *Даже для A с конечным рангом $|||\, A\, ||| \,/\, [[A]]$ может оказаться сколь угодно большим.*

Доказательство. Задавшись произвольным $C > 0$, выберем проектор $E \in \mathfrak{M}$ с $D(E) > 0, \leqslant 1/C^2$. Тогда E конечен, а значит, имеет конечный ранг. $|||\, E\, ||| = 1$, $[[E]] = (D(E))^{1/2} \leqslant 1/C$, и, следовательно, $|||\, E\, ||| \,/\, [[E]] \geqslant C$.

(D) $\mathfrak{M}$ *принадлежит классу* (III_∞). Если A имеет конечный ранг, то $[\mathrm{Range}\ A]$ конечен, а значит (ведь $\mathfrak{M}$ принадлежит классу (III_∞)!), $[\mathrm{Range}\ A] = 0$, $A = 0$. Следовательно, для любой регулярной и a fortiori для любой фундаментальной последовательности $A_1, A_2, \ldots$ обязательно $A_1 = A_2 = \ldots = 0$. Поэтому единственным нормированным A является $A = 0$.

Таким образом, в этом случае все введенные нами понятия оказываются бессодержательными

Несмотря на это, именно введенные выше понятия помогут нам доказать, что примеры факторов, которые будут построены в пунктах 4.3, 4.4, в некоторых случаях принадлежат классу (III_∞) (см., в частности, п. 4. 3, теорему IX). Процедура по существу будет обращением предыдущего пункта (C): мы докажем, что в этих факторах $\mathfrak{M}$ каждый конечный проектор E должен быть равен нулю, причем доказательство в основном будет опираться на свойства понятия нормированности. Из этого факта мы затем выведем, что такие $\mathfrak{M}$ должны принадлежать классу (III_∞). Любая прямая попытка доказать это показывает, что изо всех альтернативных (III_∞) возможностей труднее всего исключить случай (II_∞). Это вполне соответствует тому, что в этом случае наши понятия нормы и нормированности существенно новые.

---

[9] Согласно примеч. 8 $\|A\varphi_1\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{1j}|^2$, а из B. 2 $[[A]]^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$.

Отметим также, что теоремы IV, V показывают, что нормированные операторы в $\mathfrak{M}$ образуют (возможно) неполное гильбертово пространство. На самом деле это пространство полно в следующих случаях: (I_n) — очевидно, (I_∞) — ясно благодаря (B), (III_∞) — ясно, ибо оно содержит только 0 (см. (D) выше). В случаях (II_1), (II_∞) оно не полно, но может быть пополнено до пространства $Q(\mathfrak{M})$ путем присоединения к $\mathfrak{M}$ некоторых (но не всех) неограниченных операторов $\eta\mathfrak{M}$. Этот процесс для случая (II_1) детально описан в [2, с. 236—242]. В связи с этим важную роль играет C1. Сейчас мы не будем далее углубляться в этот вопрос.

Глава II

МАКСИМАЛЬНЫЕ АБЕЛЕВЫ КОЛЬЦА И ОПЕРАЦИЯ $A^{|E_1|E_2|\dots}$

2.1. Определение 2.1.1. *Для любого ограниченного оператора A и любого проектора E определим*

$$A^{|E} = EAE + (I - E)A(I - E).$$

Тогда

$$A - A^{|E} = (I - E)AE + EA(I - E).$$

Лемма 2.1.1. (i) *Если $A, E \in \mathfrak{M}$, то и $A^{|E} \in \mathfrak{M}$.* (ii) *Если $A, E \in \mathfrak{M}$ и A имеет конечный ранг, то и $A^{|E}$ имеет конечный ранг.*

Доказательство. Оба утверждения очевидны.

Лемма 2.1.2. *$A^{|E}$ коммутирует с E.*

Доказательство. Это следует из очевидных вычислений.

Лемма 2.1.3. *Если $E_1, E_2, \dots, E_n$ коммутируют друг с другом и если $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ — перестановка чисел $(1, 2, \dots, n)$, то*

$$A^{|E_1|E_2|\dots|E_n} = A^{|E_{\pi_1}|\dots|E_{\pi_n}}.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ сводится к транспозиции двух соседей, скажем m и $m+1$ ($m = 1, \dots, n-1$). Тогда мы должны доказать, что $B^{|E_m|E_{m+1}} = B^{|E_{m+1}|E_m}$, положить $B = A^{|E_1|\dots|E_{m-1}}$ и к результату применить операцию $^{|E_{m+2}|\dots|E_n}$. Обозначив B, E_m, E_{m+1} через A, E, F соответственно, мы видим, что нужно доказать равенство

$$A^{|E|F} = A^{|F|F}$$

для коммутирующих E и F. Но оно следует из очевидных вычислений.

Следствие. *Если $E_1, \dots, E_n$ коммутируют друг с другом, то $A^{|E_1|\dots|E_n}$ коммутирует с ними со всеми.*

Доказательство. Рассмотрим $i = 1, \dots, n$. Пусть $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ — перестановка $(1, \dots, n)$ с $\pi_n = i$. Тогда по лемме 2.1.3 $A^{|E_1|\dots|E_n} = A^{|E_{\pi_1}|\dots|E_{\pi_n}}$, а согласно лемме 2.1.2 он коммутирует с $E_{\pi_n} = E_i$.

Лемма 2.1.4. $|||A^{|E_1|\dots|E_n}||| \leqslant |||A|||$.

Доказательство. Мы докажем, что $|||A^{|E_1|\ldots|E_{m-1}|E_m}||| \leqslant |||A^{|E_1|\ldots|E_{m-1}}|||$. Отсюда требуемый результат получится, если последовательно полагать $m = 1, \ldots, n$. Обозначим в предыдущем неравенстве $A^{|E_1|\ldots|E_{m-1}}$ и E_m через A и E соответственно. Тогда оно примет вид $|||A^{|E}||| \leqslant |||A|||$. Иными словами, мы хотим доказать, что

$$|(A^{|E}f, g)| \leqslant |||A||| \, \|f\| \, \|g\|. \tag{36}$$

Ясно, что

$$(A^{|E}f, g) = (EAEf, g) + ((I-E)A(I-E)f, g) = \\ = (AEf, Eg) + (A(I-E)f, (I-E)g).$$

Следовательно,

$$|(A^{|E}f, g)| \leqslant |||A||| (\|Ef\| \, \|Eg\| + \|(I-E)f\| \, \|(I-E)g\|). \tag{37}$$

Согласно известному неравенству Шварца

$$\|Ef\| \, \|Eg\| + \|(I-E)f\| \, \|(I-E)g\| \leqslant [(\|Ef\|^2 + \|(I-E)f\|^2) \times \\ \times (\|Eg\|^2 + \|(I-E)g\|^2)]^{1/2}.$$

Но

$$\|Ef\|^2 + \|(I-E)f\|^2 = (Ef, Ef) + ((I-E)f, (I-E)f) = \\ = (Ef, f) + ((I-E)f, f) = (f, f) = \|f\|^2$$

и аналогичным образом

$$\|Eg\|^2 + \|(I-E)g\|^2 = \|g\|^2.$$

Поэтому

$$\|Ef\| \, \|Eg\| + \|(I-E)f\| \, \|(I-E)g\| \leqslant \|f\| \, \|g\|.$$

Вместе с (37) это неравенство дает (36) и тем самым завершает доказательство.

Лемма 2.1.5. *Предположим, что $A, E_1, E_2, \ldots \in \mathfrak{M}$, A имеет конечный ранг и $E_1, E_2, \ldots$ коммутируют друг с другом. Тогда*

$$[[A^{|E_1|\ldots|E_m} - A^{|E_1|\ldots|E_n}]]^2 = [[A^{|E_1|\ldots|E_m}]]^2 - [[A^{|E_1|\ldots|E_n}]]^2,$$

если $m \leqslant n$, $m, n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Согласно лемме 2.1.1, (ii) все $A^{|E_1|E_2|\ldots}$ имеют конечный ранг, поэтому все величины, возникающие в рассматриваемом выражении, имеют смысл. Мы хотим доказать, что

$$[[X+Y]]^2 = [[X]]^2 + [[Y]]^2 \tag{38}$$

для $X = A^{|E_1|\ldots|E_n}$, $Y = A^{|E_1|\ldots|E_m} - A^{|E_1|\ldots|E_n}$.

Имеем

$$[[X+Y]]^2 = \langle\langle X+Y, X+Y\rangle\rangle = \langle\langle X, X\rangle\rangle + \langle\langle X, Y\rangle\rangle + \langle\langle Y, X\rangle\rangle + \langle\langle Y, Y\rangle\rangle = \\ = [[X]]^2 + [[Y]]^2 + 2\mathfrak{R}\langle\langle X, Y\rangle\rangle,$$

значит, (38) является следствием

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = 0. \tag{39}$$

Мы докажем (39) для указанных выше X, Y. Поскольку

$$A^{|E_1|\dots|E_m} - A^{|E_1|\dots|E_n} = \sum_{p=m}^{n-1} (A^{|E_1|\dots|E_p} - A^{|E_1|\dots|E_p|E_{p+1}}),$$

мы можем доказывать (39) для $X = A^{|E_1|\dots|E_n}$, $Y = A^{|E_1|\dots|E_p} - A^{|E_1|\dots|E_p|E_{p+1}}$ с $p < n$, $p+1 \leqslant n$.

Пусть $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ — перестановка $(1, \dots, n)$ с $\pi_n = p+1$. Тогда лемма 2. 1. 3 дает $A^{|E_1|\dots|E_n} = A^{|E_{\pi_1}|\dots|E_{\pi_{n-1}}|E_{\pi_n}} = A^{|E_{\pi_1}|\dots|E_{\pi_{n-1}}|E_{p+1}}$. Обозначив E_{p+1}, $A^{|E_{\pi_1}|\dots|E_{\pi_{n-1}}}$, $A^{|E_1|\dots|E_p}$ через E, B, C, мы увидим, что достаточно доказать (39) только для $X = B^{|E}$, $Y = C - C^{|E}$. Согласно определению 2. 1. 1 $B^{|E} = EBE + (I - E)B(I - E)$, $C - C^{|E} = (I - E)CE + EC(I - E)$. Значит, нам нужно доказать (39) только для таких комбинаций X, Y:

$$\begin{cases} X = EBE & \text{или } (I-E)B(I-E), \\ Y = (I-E)CE & \text{или } EC(I-E). \end{cases} \tag{40}$$

Из (40) мы получаем различные альтернативы:

$$\begin{cases} \text{или } FX = X,\ FY = 0 & \text{для } F = E \text{ или } I - E, \\ \text{или } XF = X,\ YF = 0 & \text{для } F = E \text{ или } I - E. \end{cases} \tag{41}$$

Благодаря (41) мы теперь имеем:

$$\text{или } \langle\langle X, Y\rangle\rangle = \langle\langle FX, Y\rangle\rangle = \langle\langle X, FY\rangle\rangle = 0,$$

$$\text{или } \langle\langle X, Y\rangle\rangle = \langle\langle XF, Y\rangle\rangle = \langle\langle X, YF\rangle\rangle = 0.$$

Итак, в любом случае (39) выполняется.

Таким образом, доказательство закончено.

Лемма 2. 1. 6. *Пусть A, E_1, E_2, ... такие же, как и в лемме 2. 1. 5. Для $n = 1, 2, \dots$ положим $A_n = A^{|E_1|\dots|E_n}$. Тогда A_1, A_2, ... образуют фундаментальную последовательность.*

Доказательство. A_1, A_2, ...— регулярная последовательность: нам нужно проверить условия (i)—(iii) из определения 1.4.1.

(i) очевидно.

(ii) немедленно получается повторным применением леммы 2.1.1, (ii).

(iii) — немедленное следствие леммы 2.1.4.

A_1, A_2, ... — фундаментальная последовательность: мы должны проверить теперь условие определения 1.4.2, т. е. равенство

$$\lim_{m,n\to\infty} [[A_m - A_n]]^2 = 0 \tag{42}$$

Лемма 2. 1. 5 дает $[[A_m]]^2 \geqslant [[A_n]]^2$ для $m \leqslant n$,

$$[[A_1]]^2 \geqslant [[A_2]]^2 \geqslant \dots \geqslant 0.$$

Поэтому предел $\lim_{n\to\infty}[[A_n]]^2$ существует. Следовательно,

$$\lim_{m,n\to\infty}|[[A_m]]^2-[[A_n]]^2|=0. \tag{43}$$

Но

$$[[A_m-A_n]]^2=|[[A_m]]^2-[A_n]]^2|. \tag{44}$$

В самом деле, благодаря симметрии относительно m, n нам достаточно доказать (44) лишь для $m\leqslant n$, но это следует из леммы 2.1.5.

Наконец, (43) и (44) вместе дают (42).

Определение 2.1.2. *Пусть* A, E_1, E_2, ... *такие же, как в лемме* 2.1.5. *Тогда согласно лемме* 2.1.6 *существует единственный* $\bar{A}$, *для которого*

$$(A_1, A_2, \ldots)\sim\bar{A} \text{ с } A_n=A^{|E_1|\ldots|E_n}.$$

Мы будем записывать это так:

$$\bar{A}=A^{|E_1|E_2|\ldots}.$$

Теорема VI. *Пусть* A, E_1, E_2, ... *такие же, как в лемме* 2. 1. 5. *Тогда*

(i) $A^{|E_1|E_2|\ldots}$ *нормирован.*

(ii) $A^{|E_1|E_2|\ldots}$ *коммутирует с* E_1, E_2, ...

Доказательство. (i) очевидно следует из определения 2. 1. 2.

(ii) Рассмотрим фиксированное $i=1, 2, \ldots$ Для $n\geqslant i$ согласно следствию к лемме 2. 1. 3 $A_n=A^{|E_1|\ldots|E_n}$ коммутирует с E_i. Но по определению 2. 1. 2 $A^{|E_1|E_2|\ldots}=\lim\mathrm{str}_{n\to\infty}A_n$, следовательно, $A^{|E_1|E_2|\ldots}$ тоже коммутирует с E_i.

2. 2. Определение 2. 2. 1. *Кольцо* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{M}$ *называется «чисто бесконечным», если любой проектор* $E\in\mathfrak{L}$ *или* $=0$, *или бесконечен (относительно* $\mathfrak{M}$, *см.* [1, *с.* 155, *определение* 7. 1. 1]).

Отметим, что термины «конечный, бесконечный» (см. там же), «имеют конечный ранг» (определение 1.2.1), «нормированный» (определение 1.4.6) всегда должны пониматься относительно $\mathfrak{M}$. Понятие чисто бесконечного кольца, однако, дано в определении 2. 2. 1 для любого кольца $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{M}$. Но оно, конечно, совпадает для $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}$ со старым значением того, что $\mathfrak{M}$ чисто бесконечно (см. [1, с. 172, теорема VIII]), т. е. что $\mathfrak{M}$ принадлежит классу (III_∞).

Теперь будет доказана

Лемма 2. 2. 1. *Кольцо* $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{M}$ *чисто бесконечно, если и только если единственный нормированный* $A\in\mathfrak{L}$ *есть* $A=0$.

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что единственный нормированный $A\in\mathfrak{L}$ —это $A=0$. Применим это к проекторам $E\in\mathfrak{L}$. Они должны быть или равны нулю, или бесконечны. Следовательно, $\mathfrak{L}$ чисто бесконечно.

Необходимость. Предположим, что $\mathfrak{L}$ чисто бесконечно. Рассмотрим нормированный $A\in\mathfrak{L}$. Тогда A^*A тоже нормирован и вместе с A принадлежит $\mathfrak{L}$.

Далее мы поступаем так же, как при доказательстве леммы 1.3.2, и вводим спектральное представление A^*A, и в частности равенства:

$$(A^*Af, g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\,(E(\lambda)f, g), \tag{6}$$

$$\|Af\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\,(\|E(\lambda)f\|^2), \tag{7}$$

$$\lambda<0 \text{ влечет за собой } E(\lambda)=0, \tag{8}$$

где $E(\lambda)$ при $-\infty < \lambda < \infty$ является разложением единицы (см. там же).

Зафиксируем теперь $\lambda_0 > 0$. Образуем ограниченную функцию

$$\alpha(\lambda) = \begin{cases} 1/\lambda & \text{для } \lambda \geqslant \lambda_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Мы можем построить оператор $B = \alpha(A^*A)$, характеризуемый равенством

$$(Bf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda)\, d(E(\lambda) f, g) \tag{45}$$

[6, с. 202—205] и принадлежащий $\mathfrak{L}$ вместе с A^*A ([6, с. 213, теорема 6], причем нужна только достаточность — простая часть этой теоремы). Теперь $B \cdot A^*A = \beta(A^*A)$, где

$$\beta(\lambda) = \lambda\alpha(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{для } \lambda \geqslant \lambda_0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

[6, с. 205—206, свойство e]; следовательно,

$$(B \cdot A^*Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda)\, d(E(\lambda) f, g) = ((I - E(\lambda_0)) f, g)$$

[6, с. 202—205], и потому

$$B \cdot A^*A = I - E(\lambda_0).$$

Оба оператора B и A^*A принадлежат $\mathfrak{L}$, а A^*A еще и нормирован, поэтому $B \times A^*A = I - E(\lambda_0)$ тоже принадлежит $\mathfrak{L}$ и нормирован. Итак, мы доказали, что

$$\lambda > 0 \text{ влечет за собой } E(\lambda) = I. \tag{46}$$

(8), (46) и (7) вместе дают $\| Af \|^2 = 0$ и $Af = 0$ для всех $f \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $A = 0$

Этим завершается доказательство.

Лемма 2. 2. 2. *Рассмотрим абелево кольцо* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$. *Существует последовательность проекторов* $E_1, E_2, \dots \in \mathfrak{A}$, *для которой* $\mathfrak{A} = R(E_1, E_2, \dots)$ (см. [5, с. 401, внизу]). *Поскольку* $\mathfrak{A}$ *абелево, эти* $E_1, E_2, \dots$ *коммутируют друг с другом. Поэтому для каждого* A *конечного ранга мы можем построить* $A^{|E_1|E_2|\dots}$ (определение 2. 1. 2)[10]. *Мы будем считать, что* $\mathfrak{A}$ *и* $E_1, E_2, \dots$ *нам заданы.*

Сделаем следующие предположения.

(i) *кольцо* $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{A}'$ ($\subset \mathfrak{M}$) *чисто бесконечно;*

(ii) *для любого конечного проектора* F ($\in \mathfrak{M}$)

$$F^{|E_1|E_2|\dots} = 0 \text{ влечет за собой } F = 0.$$

Тогда $\mathfrak{M}$ *принадлежит классу* (III$_\infty$).

[10] Мы могли бы доказать, что $A^{|E_1|E_2|\dots}$ зависит только от A и $\mathfrak{A}$ (а не от самой последовательности $E_1, E_2, \dots$). Мы опускаем доказательство, так как этот факт несуществен для наших дальнейших целей.

Доказательство. Пусть $F (\in \mathfrak{M})$ — конечный проектор. Тогда мы можем образовать $F^{|E_1|E_2|\ldots}$. $F^{|E_1|E_2|\ldots}$ нормирован ((i) теоремы VI), а потому $\in \mathfrak{M}$. Кроме того, $F^{|E_1|E_2|\ldots}$ коммутирует с $E_1, E_2, \ldots$ ((ii) теоремы VI), а значит, и со всем $\mathfrak{A} = R(E_1, E_2, \ldots)$, следовательно, он $\in \mathfrak{A}'$. Поэтому $F^{|E_1|E_2|\ldots} \in \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{A}'$. Но если $F^{|E_1|E_2|\ldots}$ нормирован, а $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{A}'$ чисто бесконечно согласно (i), то из леммы 2. 2. 1 следует, что $F^{|E_1|E_2|\ldots} = 0$. Тогда (ii) позволяет нам заключить, что и $F = 0$.

Иными словами, проектор $F \in \mathfrak{M}$ или равен нулю, или бесконечен. Следовательно, $\mathfrak{M}$ принадлежит классу (III_∞).

Приведенная выше лемма 2.2.2 и является тем средством, при помощи которого мы собираемся установить, что некоторые из наших примеров $\mathfrak{M}$ относятся к классу (III_∞) (см. лемму 4.3.5). Мы будем применять ее к кольцам $\mathfrak{A}$, которые $= \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{A}'$,— к так называемым максимальным абелевым кольцам в $\mathfrak{M}$. Общая теория таких колец и сама по себе представляет некоторый интерес, но мы не собираемся углубляться в нее в этой связи.

Глава III
ПОСТРОЕНИЕ КОЛЕЦ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$

3.1. Эта глава будет посвящена построению и исследованию семейства примеров факторов $\mathfrak{M}$ в соответствующих гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}$. Некоторые из них, как будет показано, лежат в классе (III_∞). Точнее говоря, мы установим класс каждого $\mathfrak{M}$ из этого семейства и увидим, что среди них встречаются все классы (I_n)—(III_∞).

Примеры, которые мы будем рассматривать, являются обобщениями примеров из [1, с. 192—209], которые принадлежат классам (I_n)—(II_∞). Мы хотим, однако, ввести появляющееся там понятие (обобщенной) лебеговой меры несколько иным образом, чем это было сделано в цитированной выше статье. Кроме того, эту часть наших рассуждений придется сделать на более широкой основе, чем это было необходимо там. По этим причинам мы начинаем с обсуждения свойств (обобщенной) лебеговой меры и интегрирования на произвольном пространстве S.

3.2. Определение 3.2.1. *Пусть S — фиксированное множество. Система Γ подмножеств S будет называться борелевской системой, если она обладает следующими свойствами:*

(i) Θ (*пустое множество*) $\in \Gamma$;

(ii) *из* $M \in \Gamma$ *следует* $S - M \in \Gamma$;

(iii) *из* $M_1, M_2, \ldots \in \Gamma$ *следует* $M_1 + M_2 + \ldots \in \Gamma$.

Лемма 3.2.1. *Для борелевской системы Γ в S мы имеем также*:

(i) $S \in \Gamma$;

(ii) *из* $M, N \in \Gamma$ *следует* $M - N \in \Gamma$;

(iii) *из* $M_1, M_2, \ldots \in \Gamma$ *следует* $M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \in \Gamma$.

Доказательство. Мы докажем эти утверждения в несколько измененном порядке.

(i) следует из (i), (ii) определения 3.2.1, ибо $S = S - \Theta$.

(iii) следует из (ii), (iii) определения 3.2.1, ибо

$$M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots = S - ((S - M_1) + (S - M_2) + \ldots).$$

(ii) следует из (ii) определения 3.2.1 и (iii), ибо $M - N = M \cdot (S - N)$.

Определение 3.2.2. *Пусть* Δ — *произвольная система подмножеств* S. *Тогда существует минимальная борелевская система* $\Gamma \supset \Delta$ *в* S[11], *которая будет обозначаться* $\Gamma(\Delta)$.

Определение 3.2.3. *Борелевская система* Γ *в* S *будет называться «сепарабельной», если существует система* Δ *подмножеств* S, *обладающая следующими свойствами*:

(i) $\Gamma = \Gamma(\Delta)$;

(ii) *если* x $y, \in S$ *и если* $x \in M$ *эквивалентно* $y \in M$ *для всех* $M \in \Delta$, *то* $x = y$;

(iii) Δ *конечна или счетна.*

Теперь мы можем ввести понятие (обобщенной) лебеговой меры (которая будет называться Г-*мерой*, см. ниже).

Определение 3.2.4. *Пусть в* S *задана сепарабельная борелевская система* Γ. *Функция* $\mu(M)$ *называется «Г-мерой», если она обладает следующими свойствами*:

(i) $\mu(M)$ *определена для всех* $M \in \Gamma$ *и только для них*;

(ii) *значениями* $\mu(M)$ *являются вещественные числа* $\geqslant 0, \leqslant +\infty$;

(iii) *существует последовательность* $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots \in \Gamma$ *с* $T^{(1)} + T^{(2)} + \ldots = S$, *для которой все* $\mu(T^{(i)}) < +\infty$;

(iv) *если* $M_1, M_2, \ldots \in \Gamma$ *и из* $i \neq j$ *следует* $M_i \cdot M_j = \Theta$, *то*

$$\mu(M_1 + M_2 + \ldots) = \mu(M_1) + \mu(M_2) + \ldots$$

Мы всегда будем рассматривать меры с $\mu(S) \neq 0$.

Определение 3.2.5. *Комплекснозначная функция* $f(x)$, *определенная для всех* $x \in S$, *называется «Г-измеримой», если для любого вещественного* a *множества*

$$(x; \mathfrak{R} f(x) > a), \quad (x; \mathfrak{J} f(x) > a)$$

принадлежат Γ.

Нет надобности рассматривать и свойства класса всех Г-измеримых функций, так как они те же и получаются точно таким же способом, что и свойства класса всех функций одной вещественной переменной, измеримых по Лебегу. (См. любое стандартное изложение этого предмета. Систематическое обсуждение классов функций, подобных нашему, см., например, в [8, с. 232—247]. Наши Г-измеримые функции в терминологии loc. cit. можно характеризовать следующим образом: $\mathfrak{R} f(x)$, $\mathfrak{J} f(x)$ являются обе функциями класса $(\Gamma, *)$, или, что в данном случае эквивалентно, класса (Γ, Γ).) Нам достаточно отметить, что, в частности, следующие функции являются Г-измеримыми:

(i) *характеристическая функция* $\theta_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$ любого множества $M \in \Gamma$;

(ii) $af(x)$, $\overline{f(x)}$ вместе с $f(x)$, где a — комплексная константа;

(iii) $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$, $\operatorname{Max}(f(x), g(x))$, $\operatorname{Min}(f(x), g(x))$ вместе с $f(x)$, $g(x)$;

(iv) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (если этот предел существует для всех $x \in S$) вместе с $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...

---

[11] Пересечение всех борелевских систем $\Gamma \supset \Delta$ в S.

Теперь для Г-измеримых функций $f(x)$ мы обычным образом введем понятие Г, μ-*интегрируемости* (относительно Г-меры μ!) и численное значение Г, μ-*интеграла*

$$\int_M f(x)\, d_\mu x \quad (M \in \Gamma). \tag{47}$$

(См. любое стандартное изложение интегрирования по Лебегу. Замечания из [1, верх с. 194] приложимы к настоящему случаю.) Опять-таки нет надобности повторять хорошо известные детали. Упомянем, однако, следующие: с общих комплекснозначных $f(x)$ мы, как обычно, ограничиваем (47) на случай, когда $f(x)$ Г, μ-суммируема на M, т. е. $\int_M |f(x)|\, d_\mu x$ существует и конечен. В тех случаях, когда рассматриваются функции $f(x)$, вещественные и неотрицательные, мы будем считать, что (47) имеет смысл для всех Г-измеримых функций $f(x)$, явно разрешая в этом случае интегралу принимать значение $+\infty$. Это соглашение тоже совпадает с общепринятым.

Повсюду далее в этом пункте, а также в следующих пунктах 3.3—3.7 мы считаем, что нам заданы S, Г, μ, а также что Г — сепарабельная борелевская система. Остальные Г-меры ν, ν', ν'' и группы $\mathcal{G}$, которые будут рассматриваться, могут меняться.

Теперь мы построим гильбертово пространство функций на S.

Определение 3.2.6 *Пусть* $\mathfrak{H}_S = \mathfrak{H}_{S,\Gamma,\mu}$ — *множество всех (комплекснозначных) Г-измеримых функций* $f(x)$ $(x \in S)$, *для которых* $\int_S |f(x)|^2\, d_\mu x$ *конечен. Мы будем рассматривать* f, g *как идентичные функции, если* $f(x) \equiv g(x)$, *за исключением множества* x *с* μ-*мерой, равной* 0. *Положим*

$$(f, g)_S = (f, g)_{S,\Gamma,\mu} = \int_S f(x)\, \overline{g(x)}\, d_\mu x.$$

Лемма 3.2.2. *Пространство* $\mathfrak{H}_S$ *удовлетворяет постулатам A, B, C, E из* [4, с. 64—66]. (*Это включает в себя существование и конечность интеграла, определяющего* $(f, g)_S$ *для* f, $g \in \mathfrak{H}_S$.) *Таким образом,* $\mathfrak{H}_S$ *является конечномерным евклидовым или гильбертовым пространством.*

Доказательство. Существование и конечность $\int_S f(x)\, \overline{g(x)}\, d_\mu x$ доказываются буквально так же, как и в [4, с. 109].

A, *B*, *E*: Дословно так же, как в [4, с. 109, 111].

C: Доказывается так же, как и в [4, с. 109—111], за исключением того, что возникающая там система окрестностей (Ω — метрическое пространство, которое играет роль нашего S) должна быть заменена следующими подмножествами S (все они $\in \Gamma$): $T^{(i)}T_j$, i, $j = 1, 2, \ldots$, где $T^{(1)}$, $T^{(2)}, \ldots$ — множества из (iii) определения 3.2.4, а T_1, $T_2, \ldots$ — все множества, получаемые путем применения любого (конечного) числа раз операций $M - N$, $M + N$, $M \cdot N$ к элементам конечного или счетного базиса Δ системы Г в смысле определений 3.2.2, 3.2.3.

Теперь, может быть, уместно напомнить примеры a) и b) из [1, с. 193]. (Множества $T^{(1)}$, $T^{(2)}, \ldots$, описанные там, служат одновременно и для (iii) определения 3.2.4, и для образования Δ и Г с $\Delta = (T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots)$ и $\Gamma = \Gamma(\Delta)$. Оказывается, что в примере a) Г совпадает с системой всех подмножеств S, а в примере b) — с системой всех относительных борелевских подмножеств S в

обычном топологическом смысле.) Пример а) с конечным множеством $S=(x_1,\ldots,x_n)$ показывает, в частности, что $\mathfrak{H}_S$ может оказаться на самом деле конечномерным евклидовым пространством.

Мы завершим этот раздел доказательством «теоремы о дифференцировании» Лебега—Никодима (теорема VII ниже). Большую часть из того, что мы будем делать далее, можно было бы провести и без этой теоремы, но тогда пришлось бы делать излишние ограничения в предположениях последующих лемм и теорем.

Лемма 3.2.3. *Рассмотрим две* Г*-меры* μ *и* ν *в* S. *Тогда мы имеем*:

(i) *Если из* $\mu(M)=0$ *следует* $\nu(M)=0$, *то существует такая* Г*-измеримая функция* $k(x)\geqslant 0$, *что для всех* Г*-измеримых комплекснозначных функций* $f(x)$ *и всех множеств* $M\in\Gamma$

$$\int_M f(x)\,d_\mu x=\int_M f(x)\,k(x)\,d_\nu x.$$

(*В том смысле, что если одна сторона определена и конечна, то и другая тоже.*)

(ii) $k(x)$ *из* (i) *определена однозначно с точностью до* x*-множеств* μ*-меры* 0. *Это так, даже если* (i) *справедливо лишь для* $f(x)\equiv 1$ *и* $M\in\Gamma$.

(iii) *Эквивалентность* $\mu(M)=0$ *и* $\nu(M)=0$ *равносильна тому, что в* (i) $k(x)>0$ *всюду, за исключением* x*-множества* μ*-меры* 0.

Доказательство. (i) Рассмотрим множества $T^{(1)}, T^{(2)},\ldots$ из (iii) определения 3.2.4 сначала для $\mu: T_1^{(1)}, T_1^{(2)},\ldots$, а затем для $\nu: T_2^{(1)}, T_2^{(2)},\ldots$ Пусть $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)},\ldots$ — все множества вида $T_1^{(i)}\cdot T_2^{(j)}$, $i, j=1,2,\ldots$, упорядоченные в последовательность. Они удовлетворяют п. (iii) определения 3.2.4 для Г-меры, определенной как

$$\rho(M)=\mu(M)+\nu(M)\qquad (M\in\Gamma). \tag{48}$$

То же самое верно для $T_{00}^{(1)}, T_{00}^{(2)},\ldots$, если мы определим их как $T_{00}^{(i)}=T_0^{(i)}-(T_0^{(1)}+\ldots+T_0^{(i-1)})$, $i=1,2,\ldots$ Такие множества обладают дополнительным свойством: если $i\neq j$, то $T_{00}^{(i)}\cdot T_{00}^{(j)}=\Theta$.

Положим

$$L_i(f)=\int_{T_{00}^{(i)}}\overline{f(x)}\,d_\nu x \text{ для любого } f\in\mathfrak{H}_{S,\Gamma,\rho}. \tag{49}$$

(Отметим, что в интеграле фигурирует ν, а в $\mathfrak{H}_{S,\Gamma,\rho}$ — ρ!) Поскольку

$$\int_{T_{00}^{(i)}}|f(x)|^2 d_\nu x\leqslant\int_{T_{00}^{(i)}}|f(x)|^2 d_\rho x\leqslant\int_S|f(x)|^2 d_\rho x=\|f\|_{S,\Gamma,\rho}^2$$

и

$$\int_{T_{00}^{(i)}}1^2 d_\nu x=\nu(T_{00}^{(i)})$$

конечны, интеграл в (49) существует и конечен (согласно хорошо известному неравенству Шварца) и, более того,

$$|L_i(f)|=\left|\int_{T_{00}^{(i)}}\overline{f(x)}\,d_\nu x\right|\leqslant\left[\int_{T_{00}^{(i)}}|f(x)|^2 d_\nu x\cdot\int_{T_{00}^{(i)}}1^2 d_\nu x\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant[\nu(T_{00}^{(i)})]^{1/2}\,\|f\|_{S,\Gamma,\rho},$$

$$|L_i(f)| \leqslant C_i \|f\|_{S,\Gamma,\rho} \qquad (C_i = [\nu(T_{00}^{(i)})]^{1/2}). \tag{50}$$

Согласно (49) $L_i(f)$ является антилинейным функционалом на $\mathfrak{H}_{S,\Gamma,\rho}$, а из (50) следует, что он ограничен. Следовательно, к нему приложима лемма F.Riesz'а (см., например, [4, с. 94, сноска 52]): существует такой вектор $k_i' \in \mathfrak{H}_{S,\Gamma,\rho}$, что $L_i(f) = (k_i', f)$, т. е.

$$\int_{T_{00}^{(i)}} \overline{f(x)}\, d_\nu x = \int_S \overline{f(x)}\, k_i'(x)\, d_\rho x =$$

$$= \int_S \overline{f(x)}\, k_i'(x)\, d_\mu x + \int_S \overline{f(x)}\, k_i'(x)\, d_\nu x.$$

Рассмотрим теперь Г-измеримую функцию $f(x) \geqslant 0$, которая $= 0$ для $x \notin T_{00}^{(i)}$ и ограничена всюду в S. Тогда $f \in \mathfrak{H}_{S,\Gamma,\rho}$ (ибо $\rho(T_{00}^{(i)})$ конечна!) и предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$\int_{T_{00}^{(i)}} f(x)\,(1 - k_i'(x))\, d_\nu x = \int_{T_{00}^{(i)}} f(x)\, k_i'(x)\, d_\mu x. \tag{51}$$

Поскольку для (51) поведение $f(x)$ при $x \notin T_{00}^{(i)}$ не играет роли, мы можем опустить требование $f(x) = 0$ для $x \notin T_{00}^{(i)}$.

Рассмотрение вещественных частей обеих сторон (51) заменяет $k_i'(x)$ на $\Re k_i'(x)$ (ибо $f(x)$ вещественна). Значит, мы можем считать, что $k_i'(x)$ вещественна. Положим теперь

$$f(x) = \theta_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

сначала для $M = M_i' = T_{00}^{(i)} \cdot (x; k_i'(x) < 0)$, а затем для $M = M_i'' = T_{00}^{(i)} \cdot (x; k_i'(x) \geqslant 1)$. В обоих случаях $f(x)$ удовлетворяет требованиям (51). Левая сторона (51) становится $\geqslant 0$ и $\leqslant 0$ соответственно, так что мы получаем

$$\int_{M_i'} k_i'(x)\, d_\mu x \geqslant 0, \qquad \int_{M_i''} k_i'(x)\, d_\mu x \leqslant 0.$$

Но $k_i'(x) < 0$ для всех $x \in M_i'$ и $k_i'(x) > 0$ для всех $x \in M_i''$, следовательно, $\mu(M_i') = \mu(M_i'') = 0$. Отсюда также следует $\nu(M_i') = \nu(M_i'') = 0$. Таким образом, мы можем произвольным образом менять $k_i'(x)$ в $M_i' + M_i''$, не нарушая справедливости (51). Переопределим для $x \in M_i' + M_i''$ $k_i'(x) = 0$. Тогда мы получим

$$0 \leqslant k_i'(x) < 1 \qquad (x \in T_{00}^{(i)}) \tag{52}$$

Теперь в обеих сторонах (51) подынтегральные выражения $\geqslant 0$. Поэтому, если $f(x)$ просто Г-измерима и $\geqslant 0$, мы можем положить

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } f(x) \leqslant n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

заменить в (51) $f(x)$ на $f_n(x)$ и перейти к пределу $\lim_{n\to\infty}$: в результате мы получим (51) для исходной функции $f(x)$. Иными словами, (51) справедливо для всех Г-измеримых $f(x)\geqslant 0$. (Конечно, при этом обе стороны (51) могут оказаться бесконечными.)

Положим теперь $k_i(x)\equiv k_i'(x)(1-k_i'(x))^{-1}$. Тогда (52) даст нам

$$k_i(x)\geqslant 0 \qquad (x\in T_{00}^{(i)}). \tag{53}$$

Мы можем далее заменить $f(x)$ в (51) на $f(x)(1-k_i'(x))^{-1}$, тогда (51) превратится в

$$\int_{T_{00}^{(i)}} f(x)\, d_\nu x = \int_{T_{00}^{(i)}} f(x)\, k_i(x)\, d_\mu x \tag{54}$$

опять-таки для всех Г-измеримых $f(x)\geqslant 0$. Положим теперь, по определению, $k(x)\equiv k_i(x)$ для $x\in T_{00}^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots$ Тогда (53) даст

$$k(x)\geqslant 0 \qquad (x\in S). \tag{55}$$

Суммируя (54) по всем $i=1, 2, \ldots$, получим

$$\int_S f(x)\, d_\nu x = \int_S f(x)\, k(x)\, d_\mu x. \tag{56}$$

Рассмотрим теперь произвольную (комплексную) Г-измеримую $f(x)$. Применим (56) к функции $|f(x)|$ (которая $\geqslant 0$), это равенство показывает, что если один из интегралов $\int_S |f(x)|\, d_\nu x$, $\int_S |f(x)|\, k(x)\, d_\mu x$ конечен, то и оба конечны. Значит, если (для комплексной $f(x)$!) один из $\int_S f(x)\, d_\nu x$, $\int_S f(x)\, k(x)\, d_\mu x$ определен и конечен, то и оба интеграла конечны. Комбинируя это с (56), справедливым для Г-измеримых $f(x)\geqslant 0$, получим, что (56) справедливо для всех (комплексных) Г-измеримых $f(x)$, что включает в себя утверждение об определенности и конечности обеих сторон (56), если это справедливо для одной какой-нибудь из сторон. Положим теперь, по определению,

$$f'(x)=\begin{cases} f(x) & \text{для } x\in M,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$M\in\Gamma$. Тогда (56) (в том же смысле, что и выше) превращается в

$$\int_M f(x)\, d_\nu x = \int_M f(x)\, k(x)\, d_\mu x. \tag{57}$$

И (55), (57) завершают доказательство (i).

Докажем (ii). Предположим, что с ограничением, сделанным в (i), функции $k'(x)$ и $k''(x)$ удовлетворяют требованиям (ii). Рассмотрим $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ из (iii) определения 3.2.4 для ν и положим $M_{i,n}'=T^{(i)}\cdot(x;\ k'(x)<k''(x)\leqslant n)$. Пусть $f(x)=1$ и $M=M_{i,n}'$. Тогда $\nu(M_{i,n}')=\int_{M_{i,n}} k'(x)\, d_\mu x=\int_{M_{i,n}} k''(x)\, d_\mu x$. Поскольку $\nu(M_{i,n})\leqslant\nu(T^{(i)})$ конечна, мы заключаем, что $\int_{M_{i,n}} (k''(x)-k'(x))\, d_\mu x=$

$=0$. Но $k''(x)-k'(x)>0$ для $x\in M'_{i,n}$, следовательно, мы имеем $\mu(M'_{i,n})=0$. Положим $M'=\sum_{i,n=1}^{\infty}M'_{i,n}=(x;\,k'(x)<k''(x))$, тогда предыдущее равенство даст нам $\mu(M')=0$. Благодаря симметрии относительно $k'(x)$, $k''(x)$ мы аналогичным образом имеем $\mu(M'')=0$ для $M''=(x;\,k'(x)>k''(x))$. И для $M=M'+M''=(x;\,k'(x)\neq k''(x))$ снова $\mu(M)=0$. Таким образом, $k'(x)\equiv k''(x)$, за исключением множества x с нулевой μ-мерой (именно, M).

Докажем (iii). *Достаточность*. Предположим, что $k(x)>0$ всюду, за исключением множества x с μ-мерой 0. Из $\nu(M)=0$ следует, что $\int_M k(x)\,d_\mu x=0$, а поскольку $k(x)>0$ для $x\in M$ (за исключением множества x с μ-мерой 0), то $\mu(M)=0$. Следовательно, $\mu(M)=0$ эквивалентно $\nu(M)=0$.

Необходимость. Предположим, что $\mu(M)=0$ эквивалентно $\nu(M)=0$. Положим

$$f(x)\equiv\theta_M(x)=\begin{cases}1 & \text{для } x\in M,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$M=(x;\,k(x)=0)$. Тогда мы получим, что $\nu(M)=\int_M k(x)\,d_\mu x=0$, следовательно, $\mu(M)=0$ (согласно сделанному выше предположению). Таким образом, мы получаем, что $k(x)>0$, за исключением множества x с μ-мерой 0 (именно M).

Определение 3.2.7. *Мы обозначим единственную (с точностью до множества x нулевой μ-меры!) $k(x)$ из (i), (ii) леммы 3.2.3 через* $\frac{d_\nu}{d_\mu}(x)$.

Теорема VII. *Пусть μ — фиксированная Γ-мера на S. Тогда соотношение*

$$k(x)\equiv\frac{d_\nu}{d_\mu}(x)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми Γ-измеримыми функциями $k(x)\geqslant 0$, с одной стороны (рассматриваемыми с точностью до x-множеств μ-меры 0!), и всеми Γ-мерами ν, для которых из $\mu(M)=0$ следует $\nu(M)=$ $=0$ — с другой. Обратное соотношение таково:

$$\nu(M)=\int_M k(x)\,d_\mu x.$$

Доказательство. Если задана такая, как описано выше, мера $\nu(M)$, то существование и единственность функции $k(x)$ уже установлены в (i), (ii) леммы 3.2.3 и определении 3.2.7. Поэтому нам нужно рассмотреть случай, когда задана функция $k(x)$, описанная выше.

Рассмотрим множества $T^{(1)}, T^{(2)},\ldots$ из (iii) определения 3.2.4 и положим $T_0^{(1)}, T_0^{(2)},\ldots$ равными множествам $T^{(i)}\cdot(x;\,k(x)\leqslant n)$, $i,\ n=1,2,\ldots$, упорядоченным в некоторую последовательность. Они подойдут в части (iii) определения 3.2.4 для Γ-меры, определенной как

$$\nu(M)=\int_M k(x)\,d_\mu x \qquad (M\in\Gamma). \tag{58}$$

Из (58) ясно, что $\mu(M)=0$ влечет за собой $\nu(M)=0$. Значит, мы можем

построить $\frac{d_\nu}{d_\mu}(x)$.

Положим $f(x) = 1$, тогда $\nu(M) = \int_M d_\nu x = \int_M \frac{d_\nu}{d_\mu}(x)\, d_\mu x$. Поэтому (58) дает

$$\int_M \frac{d_\nu}{d_\mu}(x)\, d_\mu x = \int_M k(x)\, d_\mu x \qquad (M \in \Gamma).$$

Значит, согласно (ii) леммы 3.2.3 $\frac{d_\nu}{d_\mu}(x) \equiv k(x)$, за исключением множества x μ-меры 0. Вместе с (58) это завершает доказательство.

Следствие. (i) $\frac{d_\mu}{d_\mu}(x) \equiv 1$.

(ii) $\frac{d_\nu}{d_\mu}(x)\,\frac{d_\rho}{d_\nu}(x) \equiv \frac{d_\rho}{d_\mu}(x)$, *если из* $\mu(M) = 0$ *следует* $\nu(M) = 0$, *а из* $\nu(M) = 0$ *следует* $\rho(M) = 0$.

Доказательство. (i), (ii) являются немедленными следствиями характеризации $\frac{d_\nu}{d_\mu}(x)$, данной в (i), (ii) леммы 3.2.3.

3.3. Пусть S, Γ, μ такие же, как и в предыдущем пункте. Сейчас мы перейдем к описанию связи S и группы $\mathcal{G}$.

Определение 3.3.1. *$\mathcal{G}$ является S-группой, если она обладает следующими свойствами:*

(ii) *$\mathcal{G}$ является «группой», т. е. в ней определены «композиция» $\alpha\beta$, «обратный» элемент α^{-1} и «единица» 1, причем*

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \qquad \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1,\ \alpha 1 = 1\alpha = \alpha$$

(так что $\mathcal{G}$ «ассоциативна», но не обязательно «коммутативна»);

(ii) *каждый $\alpha \in \mathcal{G}$ задает некоторое взаимно однозначное отображение S на себя:*

$$x \rightleftarrows x\alpha \qquad (x, x\alpha \in S).$$

Эти отображения «представляют» $\mathcal{G}$, т. е.

$$(x\alpha)\beta = x(\alpha\beta) \qquad (x \in S,\ \alpha, \beta \in \mathcal{G});$$

(iii) *$\mathcal{G}$ конечна или счетна.*

Сразу же ясно (из (ii) выше), что $x1 \equiv x$ и $x \rightleftarrows x\alpha^{-1}$ — отображение, обратное к $x \rightleftarrows x\alpha$.

Мы, как обычно, будем обозначать через $M\alpha$ множество $(x\alpha;\ x \in M)$ $(M, M\alpha \subset S)$.

Определение 3.3.2. *S-группа $\mathcal{G}$ является «S, Γ-группой», если для любого $\alpha \in \mathcal{G}$ из $M \in \Gamma$ следует $M\alpha \in \Gamma$. При этом если μ — Γ-мера на S, то μ_α, определенная соотношением*

$$\mu_\alpha(M) \equiv \mu(M\alpha),$$

тоже является Γ-мерой на S.

Определение 3.3.3. S, Γ-*группа* $\mathcal{G}$ *является* «S, Γ, μ-*группой*» (μ — Γ-*мера на* S), *если для любого* $\alpha \in \mathcal{G}$ *из* $\mu(M) = 0$ *следует, что* $\mu(M\alpha) = 0$.

Лемма 3.3.1. *Пусть* $\mathcal{G}$ — «S, Γ, μ-*группа*». *Тогда*:

(i) $\mu(M) = 0$ *и* $\mu_\alpha(M) = 0$ (*т. е.* $\mu(M\alpha) = 0$) *эквивалентны. Следовательно, мы можем построить* $\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)$.

(ii) *Каждая из следующих формул выполняется всюду, за исключением множества* x *с* μ-*мерой* 0:

$$\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x) > 0, \qquad \frac{d_{\mu_1}}{d_\mu}(x) \equiv \frac{d_\mu}{d_\mu}(x) \equiv 1, \qquad \frac{d_{\mu_\beta}}{d_\mu}(x\alpha)\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\upsilon}(x) \equiv \frac{d_{\mu_{\alpha\beta}}}{d}(x).$$

(iii) $\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)$ *с точностью до множества* μ-*меры* 0 *однозначно характеризуется следующим свойством*:

$$\int_{M\alpha^{-1}} f(x\alpha)\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)\,d_\mu x = \int_M f(x)\,d_\mu x$$

($f(x)$ — *любая* Γ-*измеримая функция*, $M \in \Gamma$, *все понимается в том же смысле, как и в* (i) *леммы* 3.2.3).

Доказательство. Мы докажем эти утверждения в несколько измененном порядке.

(i). Из $\mu(M) = 0$ следует, что $\mu(M\alpha) = 0$, а из $\mu(M\alpha) = 0$ следует, что $\mu(M\alpha\cdot\alpha^{-1}) = 0$, $\mu(M) = 0$. Значит, $\mu(M) = 0$ эквивалентно $\mu(M\alpha) = 0$, т. е. $\mu_\alpha(M) = 0$.

(ii), первая формула. Немедленно следует из (i) выше и (iii) леммы 3.2.3.

(iii). Согласно определению 3.2.7 $\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)$ с точностью до множества x μ-меры 0 однозначно характеризуется соотношением

$$\int_M f(x)\,d_{\mu_\alpha}x = \int_M f(x)\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\upsilon}(x)\,d_\mu x \tag{59}$$

($f(x)$ Γ-измерима, $M \in \Gamma$). Но, очевидно, $\int_M f(x)\,d_{\mu_\alpha}x = \int_{M\alpha} f(x\alpha^{-1})\,d_\mu x$. Поэтому (59) превращается в

$$\int_{M\alpha} f(x\alpha^{-1})\,d_\mu x = \int_M f(x)\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)\,d_\mu x. \tag{60}$$

Замена M, $f(x)$ на $M\alpha^{-1}$, $f(x\alpha)$ в (60) дает требуемую формулу.

(ii), вторая формула. Совпадает с (i) в следствии после теоремы VII.

(ii), третья формула. Двукратное применение (см. выше) показывает, что $\frac{d_{\mu_\beta}}{d_\mu}(x\alpha)\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)$ отвечает характеризации $\frac{d_{\mu_{\alpha\beta}}}{d_\mu}$, данной в (iii) выше.

Определение 3.3.4. S, Γ, μ-*группа* $\mathcal{G}$ «*свободна*», *если она обладает таким свойством*:

если $\alpha \in \mathcal{G}$ *и* $\neq 1$, *то* $x\alpha = x$ *может выполняться только на множестве* x μ*-меры* 0.

Определение 3.3.5. S, Γ, μ*-группа «эргодична», если она обладает следующим свойством:*
если $M \in \Gamma$ — *такое множество, что для каждого* $\alpha \in \mathcal{G}$ *симметрическая разность множеств* M *и* $M\alpha$ (*т. е. множество* $(M + M\alpha) - (M \cdot M\alpha)$) *имеет* μ*-меру* 0, *то или* $\mu(M) = 0$, *или* $\mu(S - M) = 0$.

См. комментарии в [1, с. 195, внизу], относящиеся к такому определению эргодичности.

Лемма 3.3.2. S, Γ, μ*-группа* $\mathcal{G}$ *эргодична, если и только если она обладает таким свойством:*

Если $f(x)$ — *такая* Γ*-измеримая функция, что для любого* $\alpha \in \mathcal{G}$ $f(x\alpha) \equiv f(x)$ (*за исключением множества* x μ*-меры* 0), *то* $f(x) \equiv a$ (*константе, за исключением множества* μ*-меры* 0).

Доказательство. *Достаточность.* Если $f(x)$ пробегает только характеристические функции

$$f(x) \equiv \theta_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

наше утверждение совпадает с определением 3.3.5.

Необходимость. Рассматривая $\mathfrak{R} f(x)$ и $\mathfrak{I} f(x)$ вместо $f(x)$, мы можем считать, что $f(x)$ вещественна. Кроме того, рассматривая $f(x)(1 + |f(x)|)^{-1}$ вместо $f(x)$, мы можем считать, что

$$-1 < f(x) < 1. \tag{61}$$

Для любого вещественного a множество $M_a = (x;\ f(x) < a)$, очевидно, обладает свойством, описанным в определении 3.3.5, следовательно, или $\mu(M_a) = 0$, или $\mu(S - M_a) = 0$. Пусть Σ — множество всех a, для которых $\mu(M_a) = 0$. Из (61) следует, что $-1 \in \Sigma$, $1 \notin \Sigma$, а так как $M_a \subset M_b$ при $a \leqslant b$, то в этом случае $b \in \Sigma$ влечет за собой $a \in \Sigma$. Тогда Σ обладает наименьшей верхней гранью, скажем a_0, и $a_0 - 1/n \in \Sigma$, $a_0 + 1/n \notin \Sigma$ для $n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, множества $(x;\ f(x) < a_0) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{a_0 - 1/n}$ и $(x;\ f(x) > a_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (S - M_{a_0 + 1/n})$ имеют μ-меру 0, а значит, такую же меру имеет и их объединение, множество $(x;\ f(x) \neq a_0)$. Таким образом, $f(x) \equiv a_0$, за исключением множества x с нулевой μ-мерой.

Введенное нами здесь понятие свободной эргодической S, Γ, μ-группы соответствует тому, что называлось в [1, с. 195, определение 12.1.5] эргодической m-группой (для S, μ), но там наше требование о том, что из $\mu(M) = 0$ следует $\mu(M\alpha) = 0$, было заменено на более сильное: $\mu(M) = \mu(M\alpha)$.

Эта ситуация оправдывает следующее

Определение 3.3.6. S, Γ, μ*-группа* $\mathcal{G}$*-«измерима», если существует* Γ*-мера* ν, *обладающая следующими свойствами:*

(i) $\mu(M) = 0$ *эквивалентно* $\nu(M) = 0$;

(ii) *всегда* $\nu(M) = \nu(M\alpha)$.

Мы завершим этот раздел доказательством двух свойств введенных выше понятий.

Лемма 3.3.3. *Свойства* Γ-*меры* ν, *приведенные в определении* 3.3.6, *эквивалентны следующим свойствам плотности* $k(x) \equiv \frac{d_\nu}{d_\mu}(x)$ (см. теорему VII), *справедливым по модулю множеств* x μ-*меры* 0:

(i) $k(x) > 0$;

(ii) $\frac{k(x)}{k(x\alpha)} \equiv \frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)$.

Доказательство. (i) эквивалентно (i) определения 3.3.6, что составляет утверждение (iii) леммы 3.2.3.

(ii) эквивалентно (ii) определения 3.3.6: $\frac{d_\nu}{d_\mu}(x) \equiv k(x)$, следовательно, $\frac{d_{\nu_\alpha}}{d_{\mu_\alpha}}(x) = k(x\alpha)$. Поэтому (ii) из следствия к теореме VII дает (путем вычисления $\frac{d_{\nu_\alpha}}{d_\mu}(x)$ двумя способами)

$$k(x)\frac{d_{\nu_\alpha}}{d_\nu}(x) \equiv k(x\alpha)\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x). \tag{62}$$

Тогда (ii) определения 3.3.6 означает, что $\nu = \nu_\alpha$, т. е. согласно (i) из следствия к теореме VII $\frac{d_{\nu_\alpha}}{d_\nu}(x) \equiv 1$. При этом (62) превращается в требуемое равенство $\frac{k(x)}{k(x\alpha)} \equiv \frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)$.

Лемма 3.3.4. *Пусть* $\mathcal{G}$ — *эргодическая* S, Γ, μ-*группа. Тогда* Γ-*мера* ν *из определения* 3.3.6 *определена однозначно с точностью до постоянного множителя* $a > 0$.

Доказательство. Пусть ν′, ν″ — две такие Γ-меры. В соответствии с леммой 3.3.3 образуем $k'(x) = \frac{d_{\nu'}}{d_\mu}(x)$ и $k''(x) = \frac{d_{\nu''}}{d_\mu}(x)$. Тогда (ii) из леммы 3.3.3 дает $k'(x)/k'(x\alpha^{-1}) \equiv k''(x)/k''(x\alpha^{-1})$, $k'(x)/k''(x) \equiv k'(x\alpha^{-1})/k''(x\alpha^{-1})$. Положим $f(x) \equiv k'(x)/k''(x)$ и заменим α на α^{-1}, тогда мы получим $f(x) \equiv \equiv f(x\alpha)$. Все это, конечно, справедливо всюду, за исключением множества x μ-меры 0. Теперь лемма 3.3.2 дает $f(x) \equiv a$, $k'(x) \equiv ak''(x)$ (в том же смысле) с некоторой константой a. Следовательно, $\nu'(M) = a\nu''(M)$, причем, очевидно, $a > 0$.

3.4. Определение 3.4.1. (i) *Пусть* $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}$ — *множество всех (комплекснозначных) функций* $f(\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{G})$ *с конечной суммой* $\sum_{\alpha\in\mathcal{G}} |f(\alpha)|^2$ *(напомним, что* $\mathcal{G}$ *конечна или счетна!). Положим, по определению,*

$$(f, g)^{\mathcal{G}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} f(\alpha)\overline{g(\alpha)}.$$

(ii) *Пусть* $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}} = \mathfrak{H}_{S,\Gamma,\mu}^{\mathcal{G}}$ — *множество всех (комплекснозначных) функций* $\mathcal{F}(x, \alpha)$ $(x \in S,\ \alpha \in \mathcal{G})$, *которые* Γ-*измеримы по* x *при каждом* $\alpha \in \mathcal{G}$ *и имеют*

конечную сумму

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{G}}\int_S |\mathcal{F}(x,\alpha)|^2\, d_\mu x.$$

Мы будем считать $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ *идентичными, если для каждого* $\alpha\in\mathcal{G}$ *всюду, за исключением x-множества нулевой* μ*-меры,* $\mathcal{F}(x,\alpha)\equiv\mathcal{H}(x,\alpha)$. *Положим, по определению,*

$$(\mathcal{F},\mathcal{H})_S^{\mathcal{G}} = (\mathcal{F},\mathcal{H})_{S,\Gamma,\mu}^{\mathcal{G}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}}\int_S \mathcal{F}(x,\alpha)\,\overline{\mathcal{H}(x,\alpha)}\, d_\mu x.$$

Лемма 3.4.1. (i) *Пространства* $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}$, $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$ *удовлетворяют постулатам A, B, C, E из* [4, с. 64—66]. (*Это включает в себя существование и конечность сумм и интегралов, входящих в определение* $(f,g)^{\mathcal{G}}$, $(\mathcal{F},\mathcal{H})_S^{\mathcal{G}}$.) *Таким образом,* $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}$, $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$ *представляют из себя конечномерные евклидовы или гильбертовы пространства.*

(ii) *Используя полную нормированную ортогональную систему функций*

$$\varphi_{\alpha_0}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{для } \alpha=\alpha_0 \\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases} \qquad \alpha_0\in\mathcal{G},$$

в $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}$ *и устанавливая соответствие*

$$\mathcal{F}(x,\alpha)\sim\langle\mathcal{F}(x,\bar\alpha_1),\ \mathcal{F}(x,\bar\alpha_2),\ \ldots\rangle$$

($\bar\alpha_1, \bar\alpha_2, \ldots$ — *некая нумерация* $\mathcal{G}$, *так что выше* α_0 *пробегает* $\bar\alpha_1$, $\bar\alpha_2, \ldots$), *мы получаем изоморфизм* $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$ *с* $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}\otimes\mathfrak{H}_S$ *в смысле* [1, *с.* 135, *определение* 2.4.1 *и лемма* 2.4.1].

В дальнейшем мы будем использовать более симметричную форму записи:

$$\mathcal{F}(x,\alpha)\sim\langle\mathcal{F}(x,\alpha);\ \ \alpha\in\mathcal{G}\rangle.$$

Доказательство. Мы докажем эти утверждения в несколько измененном порядке.

(i). Вид $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}$. Положим $f(\bar\alpha_n)=\xi_n$, $n=1,2,\ldots$ ($\bar\alpha_1,\bar\alpha_2,\ldots$ — нумерация $\mathcal{G}$!) и $f(\alpha)\sim\{\xi_1,\xi_2,\ldots\}$, тогда наше определение совпадает с исходным определением конечномерного евклидова или гильбертова пространства ([1, с. 69, нижняя часть]).

(ii). Получается немедленно путем сравнения нашего определения 3.4.1 с определением 2.4.1 и леммой 2.4.1 из [1, с. 135].

(i). Вид $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$. С учетом того, что мы уже выяснили выше относительно $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}$ и относительно $\mathfrak{H}_S$ в лемме 3.2.2, это следует из (ii) выше, поскольку $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$ изоморфно $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}\otimes\mathfrak{H}_S$.

Теперь мы в состоянии предпринять систематическое изучение некоторых операций в $\mathfrak{H}_S$ и $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$.

3.5. Повсюду в дальнейшем мы считаем $\mathcal{G}$ фиксированной S, Γ, μ-группой. Отныне и далее в пунктах 3.5—3.7 мы считаем, что $\mathcal{G}$ свободна и эргодична, но не предполагаем ее измеримости.

Мы начнем с некоторых конструкций в $\mathfrak{H}_S$.

Лемма 3.5.1. *Определим операторы:*

(i) $U_\alpha f(x) \equiv \left[\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)\right]^{1/2} f(x\alpha)$ *для любого* $\alpha \in \mathcal{G}$;

(ii) $L_{\varphi(x)} f(x) \equiv \varphi(x) f(x)$ *для любой (комплекснозначной)* Γ-*измеримой ограниченной функции* $\varphi(x)$. *Эти операторы ограничены, а* U_α *даже унитарен.*

Доказательство. U_α ограничен и унитарен согласно (iii) из леммы 3.3.1:

$$\int_S |U_\alpha f(x)|^2 d_\mu x = \int_S |f(x\alpha)|^2 \frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x)\, d_\mu x = \int_S |f(x)|^2 d_\mu x.$$

Поэтому из $f \in \mathfrak{H}_S$ следует $U_\alpha f \in \mathfrak{H}_S$ и $\|U_\alpha f\|_S = \|f\|_S$.

$L_{\varphi(x)}$ ограничен: для всех $x \in S$ мы имеем $|\varphi(x)| \leqslant C$ с подходящей константой $C > 0$. Следовательно,

$$\int_S |L_{\varphi(x)} f(x)|^2 d_\mu x = \int_S |\varphi(x)|^2 |f(x)|^2 d_\mu x \leqslant C^2 \int_S |f(x)|^2 d_\mu x.$$

Поэтому из $f \in \mathfrak{H}_S$ следует $L_{\varphi(x)} f \in \mathfrak{H}_S$ и $\|L_{\varphi(x)} f\|_S \leqslant C\|f\|_S$.

Лемма 3.5.2. (i) $U_1 = 1$.

(ii) $U_{\alpha^{-1}} = U_\alpha^{-1} = U_\alpha^*$.

(iii) $U_{\alpha\beta} = U_\alpha U_\beta$.

Доказательство. Мы докажем эти утверждения в несколько измененном порядке.

(i), (iii) немедленно следуют из (ii) леммы 3.3.1.

(ii): (i), (iii) выше дают $U_{\alpha^{-1}} = U_\alpha^{-1}$, а поскольку U_α унитарен, то $U_\alpha^{-1} = U_\alpha^*$.

Лемма 3.5.3. *Пусть* $\mathfrak{L}$ — *множество всех операторов* $L_{\varphi(x)}$ *из* (ii) *леммы* 3.5.1. *Тогда* $\mathfrak{L}$ — *кольцо и* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{L}'$ обязательно является кольцом, достаточно доказать, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$. Поскольку $L_{\varphi(x)} L_{\psi(x)} = L_{\varphi(x)\psi(x)}$, то $L_{\varphi(x)}$ коммутирует с каждым $L_{\psi(x)}$. Поскольку $L^*_{\psi(x)} = L_{\bar{\psi}(x)}$, то $L_{\varphi(x)}$ также коммутирует и с каждым $L^*_{\psi(x)}$. Значит, $L_{\varphi(x)} \in \mathfrak{L}'$, т. е. $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}'$. Итак, нам осталось доказать только, что $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$.

Рассмотрим для этого $A \in \mathfrak{L}'$. A коммутирует с каждым $L_{\varphi(x)}$, т. е. $AL_{\varphi(x)} f = L_{\varphi(x)} Af$. Иначе говоря,

$$A(\varphi(x) f(x)) \equiv \varphi(x) Af(x). \tag{63}$$

При этом предполагается, что $\varphi(x)$, $f(x)$ Γ-измеримы, $\varphi(x)$ ограничена и $\int_S |f(x)|^2 d_\mu x$ конечен. (63), так же как и остальные соотношения в доказательстве, выполняются всюду, за исключением множества x с μ-мерой 0.

Рассмотрим $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ из (iii) определения 3.2.4; мы можем заменить их на $T_0^{(1)}, T_0^{(2)}, \ldots$, где $T_0^{(i)} = T^{(i)} - (T^{(1)} + \ldots + T^{(i-1)})$, и при этом получить $T_0^{(i)} \cdot T_0^{(j)} = \Theta$ при $i \neq j$. Положим, по определению,

$$e_i(x) \equiv \theta_{T_0^{(i)}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in T_0^{(i)}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\int_S |e_i(x)|^2 d_\mu x = \mu(T_0^{(i)})$ конечен, так что мы можем в (63) положить $f(x) \equiv e_i(x)$. При этом мы получим

$$A(\varphi(x)\, e_i(x)) \equiv \varphi(x)\,(Ae_i(x)). \tag{64}$$

Поскольку $e_i(x)$ ограничена, мы можем в (64) положить $\varphi(x) \equiv e_i(x)$ и получить $A(e_i(x)) \equiv (Ae_i(x))\, e_i(x)$, т. е.

$$Ae_i(x) = 0 \qquad \text{для } x \notin T_0^{(i)}. \tag{65}$$

Пусть теперь $\rho(x) = Ae_i(x)$ для $x \in T_0^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда (65) означает, что

$$Ae_i(x) \equiv \rho(x) \cdot e_i(x), \tag{66}$$

и, следовательно, (64) превращается в

$$A(\varphi(x)\, e_i(x)) \equiv \rho(x)\, \varphi(x)\, e_i(x). \tag{67}$$

Суммируя (67) по $i = 1, \ldots, n$ и записывая $f(x)$ вместо $\varphi(x) \sum_1^n e_i(x)$, мы получим

$$Af(x) \equiv \rho(x)\, f(x), \tag{68}$$

если $f(x)$ ограничена и равна нулю при $x \notin T_0^{(1)} + \ldots + T_0^{(n)}$ с произвольным $n = 1, 2, \ldots$

A ограничен, значит, $\|Af\|_S \leqslant C\|f\|_S$ при подходящей константе $C > 0$. Положим $M_n = (x;\ |\rho(x)| \geqslant C + 1,\ x \in T_0^{(1)} + \ldots + T_0^{(n)})$, $n = 1, 2, \ldots$ Мы можем использовать в (68)

$$f(x) = \theta_{M_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M_n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда мы получим

$$\|A\theta_{M_n}\|_S^2 = \int_S |A\theta_{M_n}(x)|^2 d_\mu x = \int_{M_n} |\rho(x)|^2 d_\mu x \geqslant$$

$$\geqslant \int_{M_n} (C+1)^2 d_\mu x = (C+1)^2 \mu(M_n),$$

$$\|\theta_{M_n}\|_S^2 = \int_S |\theta_{M_n}(x)|^2 d_\mu x = \int_{M_n} d_\mu x = \mu(M_n).$$

Таким образом, $\|A\theta_{M_n}\|_S \leqslant C\|\theta_{M_n}\|_S$ дает $\mu(M_n) = 0$. Следовательно, для $M = \sum_1^\infty M_n = (x;\ |\rho(x)| \geqslant C + 1)$ тоже $\mu(M) = 0$. Значит, мы имеем (с обычным исключением)

$$|\rho(x)| \leqslant C + 1. \tag{69}$$

Поэтому $\rho(x)$ ограничена, и мы можем построить $L_{\rho(x)}$. Тогда (68) превращается в

$$Af(x) \equiv L_{\rho(x)} f(x) \tag{70}$$

для всех $f(x)$ из (68). Но такие $f(x)$ образуют множество, всюду плотное в

$\mathfrak{H}_S$. В самом деле, если задана произвольная $f \in \mathfrak{H}_S$, положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } |f(x)| \leqslant n, \quad x \in T_0^{(1)} + \ldots + T_0^{(n)}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда все $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют требованиям, сформулированным после (68), и, очевидно, $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_S = 0$.

Поскольку A и $L_{\rho(x)}$ оба ограничены, это означает, что (70) по непрерывности распространяется на все $f \in \mathfrak{H}_S$. Следовательно, $A = L_{\rho(x)} \in \mathfrak{L}$. Итак, мы установили включение $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$ и тем самым завершили доказательство.

Лемма 3.5.4. *$L_{\varphi(x)} = L_{\psi(x)}U_\alpha$ имеет место, если и только если выполнено одно из условий: или $\alpha = 1$, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ (за исключением x-множества с μ-мерой 0), или $\alpha \neq 1$, $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$ (за исключением x-множества с μ-мерой 0).*

Доказательство. *Достаточность* очевидна.

Необходимость. Предположим, что $L_{\varphi(x)} = L_{\psi(x)}U_\alpha$. Это означает

$$\varphi(x) f(x) \equiv \psi(x) \left[\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x) \right]^{1/2} f(x\alpha), \tag{71}$$

если только $\int_S |f(x)|^2 d_\mu x$ конечен; (71), так же как и все последующие соотношения в этом доказательстве, выполняется всюду, за исключением x-множества μ-меры 0.

Рассмотрим $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ из (iii) определения 3.2.4. Поскольку $\mu(T^{(1)} + \ldots + T^{(n)})$ конечна, мы можем в (71) положить

$$f(x) \equiv \theta_{T^{(1)}+\ldots+T^{(n)}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in T^{(1)} + \ldots + T^{(n)}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда из (71) следует

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \left[\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x) \right]^{1/2} \tag{72}$$

для тех x, для которых x, $x\alpha \in T^{(1)} + \ldots + T^{(n)}$. Суммирование по $n = 1, 2, \ldots$ дает (72) для всех x.

Благодаря (ii) леммы 3.3.1 (72) исчерпывает случай $\alpha = 1$. Предположим поэтому, что $\alpha \neq 1$. Подстановка $\psi(x)$ из (72) в (71) дает $\varphi(x) f(x) \equiv \varphi(x) f(x\alpha)$, т. е.

$$\int_S |\varphi(x)|^2 |f(x) - f(x\alpha)|^2 d_\mu x = 0. \tag{73}$$

Рассмотрим теперь систему Δ из определения 3.2.3. Согласно (iii) оттуда же мы имеем $\Delta = (M_1, M_2, \ldots)$. Мы можем положить для i, $j = 1, 2, \ldots$

$$f(x) \equiv \theta_{T^{(i)}\cdot M_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in T^{(i)} \cdot M_j, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(потому что $\mu(T^{(i)}\cdot M_j)\leqslant\mu(T^{(i)})$ конечна). Теперь ясно, что

$$|f(x)-f(x\alpha)|=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{если обе точки } x,\ x\alpha\in T^{(i)}\cdot M_j \text{ или ни одна из них не } \in T^{(i)}\cdot M_j,\\ 1 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

а последнее множество x-в совпадает с

$$K_{ij}=((T^{(i)}\cdot M_j)+(T^{(i)}\cdot M_j)\alpha^{-1})-((T^{(i)}\cdot M_j)\cdot(T^{(i)}\cdot M_j)\alpha^{-1}).$$

При этом (73) превращается в

$$\int_{K_{ij}}|\varphi(x)|^2\,d_\mu x=0. \tag{74}$$

Рассмотрим теперь $K=\sum_{i,j=1}^{\infty}K_{ij}$. Если $x=x\alpha$, то $x\in K_{ij}$ исключается и, следовательно, $x\notin K$. Если же $x\neq x\alpha$, то из (ii) определения 3.2.3 мы знаем, что для некоторого $j=1,2,\ldots$ одна из точек x, $x\alpha\in M_j$, но не обе одновременно. Та, которая $\in M_j$, также и $\in T^{(i)}$ для некоторого $i=1,2,\ldots$, значит, одна, но не обе точки x, $x\alpha\in T^{(i)}\cdot M_j$. Это означает, что $x\in K_{ij}$. Следовательно, $x\in K$. Итак, мы видим, что

$$K=(x;\ x\neq x\alpha). \tag{75}$$

Поскольку $\mathcal{G}$ свободна, а $\alpha\neq 1$, из определения 3.3.4 мы видим, что $x\neq x\alpha$, за исключением множества μ-меры 0. Иначе говоря,

$$\mu(S-K)=0. \tag{76}$$

Суммирование по i, $j=1,2,\ldots$ превращает (74) в $\int_K|\varphi(x)|^2\,d_\mu x=0$, так что согласно (76) $\int_S|\varphi(x)|^2\,d_\mu x=0$, т. е.

$$\varphi(x)\equiv 0. \tag{77}$$

Таким образом, из (72), (77) для $\alpha\neq 1$ мы имеем $\varphi(x)\equiv\psi(x)\equiv 0$, и доказательство окончено.

Лемма 3.5.5. Пусть $\mathfrak{L}$ *такое же, как в лемме* 3.5.3, *а* $\mathfrak{A}$ — *множество всех* U_α *с* $\alpha\in\mathcal{G}$ *Тогда* $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{A}'=(aI)$ (*a* — *произвольное комплексное число*).

Доказательство. aI, очевидно, принадлежит $\mathfrak{A}'$, а поскольку $aI=L_a\in\mathfrak{L}$, то $aI\in\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{A}'\supset(aI)$. Поэтому мы должны доказать только $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{A}'\subset(aI)$.

Предположим для этого, что $A\in\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{A}'$. Тогда $A\in\mathfrak{A}'$, так что для любого $\alpha\in\mathcal{G}$ $U_\alpha A=AU_\alpha$ и $U_\alpha AU_\alpha^{-1}=A$. Кроме того, $A\in\mathfrak{L}$, $A=L_{\varphi(x)}$, $U_\alpha AU_\alpha^{-1}=L_{\varphi(x\alpha)}$, следовательно, $L_{\varphi(x\alpha)}=L_{\varphi(x)}$. Согласно лемме 3.5.4 это означает, что $\varphi(x\alpha)=\varphi(x)$, за исключением x-множества μ-меры 0. Поскольку $\mathcal{G}$ эргодична, согласно лемме 3.3.2 отсюда следует, что $\varphi(x)\equiv a$ (константе!), за исключением x-множества μ-меры 0. Следовательно, $A=L_a=aI$. Таким образом, $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{A}'\subset(aI)$, что и завершает доказательство.

3.6. Теперь мы переходим к конструкциям в $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$.

Лемма 3.6.1. *Определим операторы*

(i) $\bar{U}_{\alpha_0}\mathscr{F}(x,\alpha) = \left[\frac{d_{\mu_{\alpha_0}}}{d_\mu}(x)\right]^{1/2}\mathscr{F}(x\alpha_0, \alpha\alpha_0),$

(ii) $\bar{V}_{\alpha_0}\mathscr{F}(x,\alpha) \equiv \mathscr{F}(x, \alpha_0^{-1}\alpha),$

} *для каждого* $\alpha_0 \in \mathscr{G}$.

(iii) $\bar{\bar{W}}\mathscr{F}(x,\alpha) \equiv \left[\frac{d_{\mu_{\alpha^{-1}}}}{d_\mu}(x)\right]^{1/2}\mathscr{F}(x\alpha^{-1}, \alpha^{-1}),$

(iv) $\bar{L}_{\varphi(x)}\mathscr{F}(x,\alpha) \equiv \varphi(x)\mathscr{F}(x,\alpha),$

(v) $\bar{\bar{M}}_{\varphi(x)}\mathscr{F}(x,\alpha) \equiv \varphi(x\alpha^{-1})\mathscr{F}(x,\alpha)$

} *для любой ограниченной* Г-*измеримой* $\varphi(x)$, *определенной для всех* $x \in S$.

Эти операторы ограничены, а $\bar{U}_{\alpha_0}$, $\bar{V}_{\alpha_0}$, $\bar{\bar{W}}$ *даже унитарны.*

Доказательство. $\bar{U}_{\alpha_0}$, $\bar{V}_{\alpha_0}$, $\bar{\bar{W}}$ ограничены и унитарны, согласно (iii) из леммы 3.3.1

$$\sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\bar{U}_{\alpha_0}\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x = \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x\alpha_0, \alpha\alpha_0)|^2 \frac{d_{\mu_{\alpha_0}}}{d_\mu}(x)\, d_\mu x =$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x, \alpha\alpha_0)|^2 d_\mu x = \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x,$$

и

$$\sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\bar{\bar{W}}\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x = \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x\alpha^{-1}, \alpha^{-1})|^2 \frac{d_{\mu_{\alpha^{-1}}}}{d_\mu}(x)\, d_\mu x =$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x, \alpha^{-1})|^2 d_\mu x = \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x.$$

Очевидно,

$$\sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\bar{V}_{\alpha_0}\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x = \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x, \alpha_0^{-1}\alpha)|^2 d_\mu x =$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x.$$

Поэтому из $\mathscr{F} \in \mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$ следует $\bar{U}_{\alpha_0}\mathscr{F}$, $\bar{V}_{\alpha_0}\mathscr{F}$, $\bar{\bar{W}}\mathscr{F} \in \mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$ и $\|\bar{U}_{\alpha_0}\mathscr{F}\|_S^{\mathscr{G}} = \|\bar{V}_{\alpha_0}\mathscr{F}\|_S^{\mathscr{G}} = \|\bar{\bar{W}}\mathscr{F}\|_S^{\mathscr{G}} = \|\mathscr{F}\|_S^{\mathscr{G}}$.

$\bar{L}_{\varphi(x)}$, $\bar{\bar{M}}_{\varphi(x)}$ ограничены: мы имеем $|\varphi(x)| \leqslant C$ для всех $x \in S$ и подходящего $C > 0$. Следовательно,

$$\sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\bar{L}_{\varphi(x)}\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x = \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\varphi(x)|^2 |\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x$$

и

$$\sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\bar{\bar{M}}_{\varphi(x)}\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x = \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\varphi(x\alpha^{-1})|^2 |\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \sum_{\alpha\in\mathscr{G}}\int_S |\mathscr{F}(x,\alpha)|^2 d_\mu x.$$

Поэтому из $\mathscr{F} \in \mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$ следует $\overline{L}_{\varphi(x)}\mathscr{F}, \overline{M}_{\varphi(x)}\mathscr{F} \in \mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$ и $\| \overline{L}_{\varphi(x)}\mathscr{F} \|_S^{\mathscr{G}}, \| \overline{M}_{\varphi(x)}\mathscr{F} \|_S^{\mathscr{G}} \leqslant \leqslant C \| \mathscr{F} \|_S^{\mathscr{G}}$.

Лемма 3.6.2. (i) $\overline{U}_1 = I$. (i)′ $\overline{V}_1 = I$.

(ii) $\overline{U}_{\alpha_0^{-1}} = \overline{U}_{\alpha_0}^{-1} = \overline{U}_{\alpha_0}^*$. (ii)′ $\overline{V}_{\alpha_0^{-1}} = \overline{V}_{\alpha_0}^{-1} = \overline{V}_{\alpha_0}^*$.

(iii) $\overline{U}_{\alpha_0}\overline{U}_{\beta_0} = \overline{U}_{\alpha_0\beta_0}$. (iii)′ $\overline{V}_{\alpha_0}\overline{V}_{\beta_0} = \overline{V}_{\alpha_0\beta_0}$.

(iv) $\overline{W} = \overline{W}^{-1} = \overline{W}^*$.

(v) $\overline{W}\overline{U}_{\alpha_0}\overline{W} = \overline{V}_{\alpha_0}$.

(vi) $\overline{W}\overline{L}_{\varphi(x)}\overline{W} = \overline{M}_{\varphi(x)}$.

Доказательство. Мы докажем эти утверждения в несколько измененном порядке.

(iv). Вычислим $\overline{W}^2$. Легко проверить, что $\overline{W}^2\mathscr{F}(x, \alpha) = \left[\frac{d_{\mu_{\alpha^{-1}}}}{d_\mu}(x)\frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x\alpha^{-1})\right]^{1/2} \times \times \mathscr{F}(x, \alpha)$. Согласно (ii) леммы 3.3.1 (с α^{-1}, α в качестве α, β) $\frac{d_{\mu_{\alpha^{-1}}}}{d_\mu}(x) \times \times \frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x\alpha^{-1}) \equiv \frac{d_{\mu_1}}{d_\mu}(x) \equiv 1$, так что $\overline{W}^2\mathscr{F}(x, \alpha) \equiv \mathscr{F}(x, \alpha)$, т. е. $\overline{W}^2 = I$.

Следовательно, $\overline{W} = \overline{W}^{-1}$, а поскольку $\overline{W}$ унитарен, то $\overline{W}^{-1} = \overline{W}^*$.

(v). Благодаря (iv) мы можем с равным успехом доказать, что $\overline{W}\overline{V}_{\alpha_0}\overline{W} = = \overline{U}_{\alpha_0}$. Тогда мы имеем $\overline{W}\overline{V}_{\alpha_0}\overline{W}\mathscr{F}(x, \alpha) \equiv \left[\frac{d_{\mu_{\alpha^{-1}}}}{d_\mu}(x)\frac{d_{\mu_{\alpha\alpha_0}}}{d_\mu}(x\alpha^{-1})\right]^{1/2} \mathscr{F}(x\alpha_0, \alpha\alpha_0)$.

Согласно (iii) леммы 3.3.1 (с $\alpha^{-1}, \alpha\alpha_0$ в качестве α, β) $\frac{d_{\mu_{\alpha^{-1}}}}{d_\mu}(x)\frac{d_{\mu_{\alpha\alpha_0}}}{d_\mu}(x\alpha^{-1}) \equiv \equiv \frac{d_{\mu_{\alpha_0}}}{d_\mu}(x)$, значит,

$$\overline{W}\overline{V}_{\alpha_0}\overline{W}\mathscr{F}(x, \alpha) = \left[\frac{d_{\mu_{\alpha_0}}}{d_\mu}(x)\right]^{1/2} \mathscr{F}(x\alpha_0, \alpha\alpha_0) \equiv \overline{U}_{\alpha_0}\mathscr{F}(x, \alpha),$$

т. е. $\overline{W}\overline{V}_{\alpha_0}\overline{W} = \overline{U}_{\alpha_0}$.

(vi). Благодаря (iv) мы можем доказывать, что $\overline{W}\overline{L}_{\varphi(x)} = M_{\varphi(x)}\overline{W}$. Последнее, однако, верно очевидным образом, ибо оба вектора $\overline{W}\overline{L}_{\varphi(x)}\mathscr{F}(x, \alpha)$, $\overline{M}_{\varphi(x)}\overline{W}\mathscr{F}(x,\alpha)$ тождественно равны $\left[\frac{d_{\mu_{\alpha^{-1}}}}{d_\mu}(x)\right]^{1/2} \varphi(x\alpha^{-1})\mathscr{F}(x\alpha^{-1}, \alpha^{-1})$.

Утверждения (i)′, (iii)′ очевидны.

(ii)′: (i)′ и (iii)′ выше дают $\overline{V}_{\alpha_0^{-1}} = \overline{V}_{\alpha_0}^{-1}$. А поскольку $\overline{V}_{\alpha_0}$ унитарен, то $\overline{V}_{\alpha_0}^{-1} = = \overline{V}_{\alpha_0}^*$.

(i) — (iii) Учитывая (iv), (v) выше, их легко получить из (i)′ — (iii)′ соответственно.

Лемма 3.6.3 *Пусть* $\mathfrak{J}$ — *множество всех* $\overline{U}_{\alpha_0}$ *и всех* $\overline{L}_{\varphi(x)}$, *а* $\mathfrak{J}$ — *множество всех* $\overline{V}_{\alpha}$ *и* $\overline{M}_{\varphi(x)}$ (*см. лемму* 3.6.1.) *Для каждого ограниченного оператора* $\overline{A}$ *из* $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}^0}$ *образуем разложение из* [1, *с.* 136, *определение* 2.4.2]: $\overline{A} \sim \langle A_{\alpha,\beta}\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$, *где каждый* $A_{\alpha,\beta}$ *является ограниченным оператором в* $\mathfrak{H}_S$. (*Ср. разложение* $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}} = \mathfrak{H}^{\mathcal{G}} \otimes \mathfrak{H}_S$ *из леммы* 3.4.1. *Как было описано там, мы заменяем индексы* $t, s = 1, 2, \ldots$ *на индексы* $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$, *с помощью которых там была заиндексирована полная ортогональная нормированная система функций* φ_{α_0}, $\alpha_0 \in \mathcal{G}$, *в* $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}$). *Тогда мы имеем*:

(i) $\overline{A} \in \mathfrak{J}'$, *если и только если* $A_{\alpha,\beta} = L_{\chi_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1})}$;

(ii) $\overline{A} \in \mathfrak{J}'$, *если и только если* $A_{\alpha,\beta} = L_{\chi_{\alpha^{-1}\beta}(x)} U_{\beta^{-1}\alpha}$. *Здесь* $\chi_\gamma(x)$ *для каждого* $\gamma \in \mathcal{G}$ — (*комплекснозначная*) Γ-*измеримая ограниченная функция переменной* x.

Мы не уточняем, для каких систем $\chi_\gamma(x)$, $\gamma \in \mathcal{G}$, *действительно существует ограниченный оператор* $\overline{A}$, *удовлетворяющий* (i) *или* (ii). *Тем не менее справедливо следующее*:

(iii) *системы функций* $\chi_\gamma(x)$, $\gamma \in \mathcal{G}$, *полученные из всех* $\overline{A} \in \mathfrak{J}$ *посредством* (i) *и из всех* $\overline{A} \in \mathfrak{J}$ *посредством* (ii) *идентичны*;

(iv) *операторы* $\overline{A}_1 \in \mathfrak{J}'$ *и* $\overline{A}_2 \in \mathfrak{J}'$, *задающие посредством* (i) *и* (ii) *соответственно один и тот же набор* $\chi_\gamma(x)$, $\gamma \in \mathcal{G}$, *получаются друг из друга применением инволютивного автоморфизма* $\mathcal{F} \rightleftarrows \overline{W}\mathcal{F}$ *пространства* $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$.

Доказательство. Напомним определение $A_{\alpha,\beta}$ ([1, с. 136, определение 2.4.2], мы используем обозначения настоящей статьи): $\overline{A}\langle f(x)\varphi_{\alpha'}(\alpha); \alpha \in \mathcal{G}\rangle = \langle A_{\alpha',\beta} f(x); \beta \in \mathcal{G}\rangle$; т. е. (если мы заменим α', α на α, β, так что теперь $x \in S$ и $\beta \in \mathcal{G}$ станут переменными, а $\alpha \in \mathcal{G}$ — параметром): $\overline{A} f(x)\varphi_\alpha(\beta) = A_{\alpha,\beta} f(x)$. Тогда определения $\overline{U}_{\alpha_0}$, $\overline{L}_{\varphi(x)}$, $\overline{W}$ дают: если $\overline{A} \sim \langle A_{\alpha,\beta}\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$, то

$$\overline{U}_{\alpha_0}^{-1}\overline{A}\,\overline{U}_{\alpha_0} \sim \langle U_{\alpha_0}^{-1} A_{\alpha\alpha_0^{-1},\beta\alpha_0^{-1}} U_{\alpha_0}\rangle, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{G}, \tag{78}$$

$$\overline{W}\,\overline{A}\,\overline{W} \sim \langle U_\beta^{-1} A_{\alpha^{-1},\beta^{-1}} U_\alpha\rangle, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{G}, \tag{79}$$

$$\overline{L}_{\varphi(x)}\overline{A} \sim \langle L_{\varphi(x)} A_{\alpha,\beta}\rangle, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{G}, \tag{80}$$

$$\overline{A}\,\overline{L}_{\varphi(x)} \sim \langle A_{\alpha,\beta} L_{\varphi(x)}\rangle, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{G}. \tag{81}$$

Теперь мы переходим к доказательству утверждений (i) — (iv) в несколько измененном порядке.

(i): $\overline{A} \in \mathfrak{J}'$ означает, что $\overline{A}$ коммутирует со всеми $\overline{L}_{\varphi(x)}$, $\overline{L}_{\varphi(x)}^*$, $\overline{U}_{\alpha_0}$, $\overline{U}_{\alpha_0}^*$. Поскольку $\overline{L}_{\varphi(x)}^* = \overline{L}_{\overline{\varphi(x)}}$, $\overline{U}_{\alpha_0}^* = \overline{U}_{\alpha_0^{-1}}$, достаточно рассмотреть $\overline{L}_{\varphi(x)}$, $\overline{U}_{\alpha_0}$. Иначе говоря,

$$\overline{L}_{\varphi(x)}\overline{A} = \overline{A}\,\overline{L}_{\varphi(x)}, \tag{82}$$

$$\bar{U}_{\alpha_0^{-1}}\bar{A}\bar{U}_{\alpha_0} = \bar{A}. \qquad (83)$$

С учетом (80) и (81), (82) означает, что все $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{L}'$, т. е. используя лемму 3.5.3, что $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{L}$. Поэтому

$$A_{\alpha,\beta} = L_{\omega_{\alpha,\beta}(x)}, \qquad (84)$$

где $\omega_{\alpha,\beta}(x)$ – (комплекснозначная) Г-измеримая ограниченная функция x.

Благодаря (78) из (83) следует, что

$$A_{\alpha,\beta} = U_{\alpha_0}^{-1} A_{\alpha\alpha_0^{-1},\beta\alpha_0^{-1}} U_{\alpha_0}. \qquad (85)$$

Подстановка (84) в (85) превращает его в $L_{\omega_{\alpha,\beta}(x)} = L_{\omega_{\alpha\alpha_0^{-1},\beta\alpha_0^{-1}}(x\alpha_0^{-1})}$, т. е.

$$\omega_{\alpha,\beta}(x) \equiv \omega_{\alpha\alpha_0^{-1},\beta\alpha_0^{-1}}(x\alpha_0^{-1}), \qquad (86)$$

за исключением множества x μ-меры 0. Если мы положим $\alpha_0 = \beta$ и вместо $\omega_{\gamma,1}(x)$ будем писать $\chi_\gamma(x)$, то (86) превратится в

$$\omega_{\alpha,\beta}(x) \equiv \chi_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1}), \qquad (87)$$

за исключением множества x μ-меры 0.

Из (87) с очевидностью следует (86).

Таким образом, $\bar{A} \in \mathfrak{J}'$ эквивалентно (84), (87), т. е. тому, что

$$A_{\alpha,\beta} = L_{\chi_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1})}. \qquad (88)$$

Этим и завершается доказательство (i).

(ii), (iv): Поскольку $\bar{W}$ унитарен, $\mathscr{F} \rightleftarrows \bar{W}\mathscr{F}$ является автоморфизмом $\mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$, а так как $\bar{W} = \bar{W}^{-1}$, $\bar{W}^2 = I$ (согласно (iv) леммы 3.6.2), этот автоморфизм инволютивен. Рассматриваемый автоморфизм переводит оператор $\bar{A}$ в $\mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$ в оператор $\bar{W}\bar{A}\bar{W}$. Следовательно (согласно (iv) — (vi) леммы 3.6.2), он переводит $\bar{U}_{\alpha_0}$, $\bar{L}_{\varphi(x)}$ в $\bar{V}_{\alpha_0}$, $M_{\varphi(x)}$, а потому $\mathfrak{J}$ в $\mathfrak{J}$. Значит, он переводит $\mathfrak{J}'$ в $\mathfrak{J}'$.

Таким образом, общий элемент $\bar{A}_2 \in \mathfrak{J}'$ получается как $\bar{A}_2 = \bar{W}\bar{A}_1\bar{W}^{-1}$ для общего элемента $\bar{A}_1 \in \mathfrak{J}'$, или, что эквивалентно (благодаря (iv) леммы 3.6.2), как $\bar{W}\bar{A}_1\bar{W}$. Формула (88) дает $A_{\alpha,\beta}$ произвольного $\bar{A}_1 \in \mathfrak{J}'$, следовательно, (79) позволяет нам получить $A_{\alpha,\beta}$ для общего элемента $\bar{A}_2 \in \mathfrak{J}'$. Таким способом мы получаем для последнего $A_{\alpha,\beta}$

$$A_{\alpha,\beta} = U_\beta^{-1} L_{\chi_{\alpha^{-1}\beta}(x\beta)} U_\alpha. \qquad (89)$$

Но поскольку $U_\alpha = U_\beta U_{\beta^{-1}\alpha}$, $L_{\chi_{\alpha^{-1}\beta}(x\beta)} U_\beta = U_\beta L_{\chi_{\alpha^{-1}\beta}(x)}$, (89) может быть также пере исано в виде

$$A_{\alpha,\beta} = L_{\chi_{\alpha^{-1}\beta}(x)} U_{\beta^{-1}\alpha}. \qquad (90)$$

Это завершает доказательство (ii).

Кроме того, мы установили все свойства автоморфизма $\mathscr{F} \rightleftarrows \overline{W}\mathscr{F}$, перечисленные в (iv).

(iii): Немедленное следствие (iv).

Замечание: мы видели выше (при доказательстве (ii) и (iv)), что $\mathscr{F} \rightleftarrows \rightleftarrows \overline{W}\mathscr{F}$ переводит $\mathfrak{J}$ в $\mathfrak{I}$. Поскольку этот автоморфизм инволютивен (см. (iv) выше), он также переводит $\mathfrak{I}$ в $\mathfrak{J}$.

Определение 3.6.1. (i) *мы обозначим множество всех систем* $\chi_\gamma(x)$, $\gamma \in \mathscr{G}$, *которые возникают в* (i) *или* (ii) *леммы* 3.6.3 (*согласно* (iii) *оттуда же они совпадают*) *через* X_0. (ii) *Мы обозначим связь между* $\bar{A} \in \mathfrak{J}'$ *или* $\bar{A} \in \mathfrak{I}'$ *и системой* $\chi_\gamma(x)$, $\gamma \in \mathscr{G}$, *из* X_0, *описанную в* (i) *и* (ii) *леммы* 3.6.3 *соответственно, через*

$$\bar{A} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathscr{G}\}$$

(*в обоих случаях*).

Лемма 3.6.4. $R(\mathfrak{J}) = \mathfrak{I}'$, $R(\mathfrak{I}) = \mathfrak{J}'$.

Доказательство. Поскольку инволютивный автоморфизм $\mathscr{F} \rightleftarrows \overline{W}\mathscr{F}$ в $\mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$ переставляет $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{I}$ (см. (iv) леммы 3.6.3 и замечание после этой леммы), а следовательно, переставляет также $R(\mathfrak{J}), \mathfrak{J}'$ с $R(\mathfrak{I}), \mathfrak{I}'$, нам достаточно доказать, что $R(\mathfrak{J}) = \mathfrak{I}'$.

Доказательство включения $R(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{I}'$: Для $\bar{A} = \bar{U}_{\alpha_0}$ немедленно проверяется, что

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{cases} U_{\alpha_0} & \text{для } \alpha = \beta\alpha_0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и для $\bar{A} = \bar{L}_{\varphi(x)}$, что

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{cases} L_{\varphi(x} & \text{для } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому мы имеем $A_{\alpha,\beta} = L_{\chi_{\alpha^{-1}\beta}(x)} U_{\beta^{-1}\alpha}$, где

$$\chi_\gamma(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{для } \gamma = \alpha_0^{-1}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{array} \right| , \quad \text{или } \chi_\gamma(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для } \gamma = 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

соответственно. Тогда согласно (ii) леммы 3.6.3 $\bar{A} \in \mathfrak{I}'$.

Таким образом, мы доказали, что $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}'$. Поскольку $\mathfrak{I}'$ является кольцом, отсюда следует, что $R(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{I}'$.

Доказательство включения $R(\mathfrak{J}) \supset \mathfrak{I}'$: Рассмотрим произвольные $\bar{A} \in \mathfrak{I}'$, $\bar{B} \in \mathfrak{I}'$, тогда согласно лемме 3.6.3 $A_{\alpha,\beta} = L_{\chi_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1})}$ и $B_{\alpha,\beta} = L_{\omega_{\alpha^{-1}\beta}(x)} U_{\beta^{-1}\alpha}$. Положим $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$, $\bar{D} = \bar{B}\bar{A}$, тогда (iv) леммы 2.4.3 из [1, с. 136 — 137] дает

$$C_{\alpha,\beta} = \sum\nolimits_{\gamma \in \mathscr{G}} A_{\gamma,\beta} B_{\alpha,\gamma} = \sum\nolimits_{\gamma \in \mathscr{G}} L_{\chi_{\gamma\beta^{-1}}(x\beta^{-1})} L_{\omega_{\alpha^{-1}\gamma}(x)} U_{\gamma^{-1}\alpha} =$$

$$= \sum\nolimits_{\gamma \in \mathscr{G}} L_{\chi_{\gamma\beta^{-1}}(x\beta^{-1})\omega_{\alpha^{-1}\gamma}(x)} U_{\gamma^{-1}\alpha} = \sum\nolimits_{\gamma \in \mathscr{G}} L_{\chi_{\alpha\gamma^{-1}\beta^{-1}}(x\beta^{-1})\omega_{\gamma^{-1}}(x)} U_\gamma$$

(мы заменили индекс суммирования γ на $\alpha\gamma^{-1}$) и

$$D_{\alpha,\beta} = \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} B_{\gamma,\beta}A_{\alpha,\gamma} = \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} L_{\omega_{\gamma^{-1}\beta}(x)} U_{\beta^{-1}\gamma} L_{\chi_{\alpha\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})} =$$
$$= \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} L_{\omega_{\gamma^{-1}\beta}(x)} L_{\chi_{\alpha\gamma^{-1}}(x\beta^{-1})} U_{\beta^{-1}\gamma} = \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} L_{\chi_{\alpha\gamma^{-1}}(x\beta^{-1})\omega_{\gamma^{-1}\beta}(x)} U_{\beta^{-1}\gamma} =$$
$$= \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} L_{\chi_{\alpha\gamma^{-1}\beta^{-1}}(x\beta^{-1})\omega_{\gamma^{-1}}(x)} U_{\gamma}$$

(мы заменили индекс суммирования γ на $\beta\gamma$). Вспоминая, что в этих суммах $\sum_{\gamma\in\mathcal{G}}$ порядок суммирования не играет роли (см. loc. cit выше), из приведенного выше равенства мы видим, что $C_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\beta}$ для всех $\alpha, \beta\in\mathcal{G}$. Это значит, что $\bar{C} = \bar{D}$, или, другими словами, $\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A}$. Поскольку $\mathfrak{J}'$ является кольцом, а $\bar{A}\in\mathfrak{J}'$ выбран произвольно, отсюда следует, что $\bar{B}\in\mathfrak{J}''$. Поскольку $\bar{B}\in\mathfrak{J}'$ тоже был выбран произвольно, мы имеем $\mathfrak{J}'\subset\mathfrak{J}''$.

Так как $I\in\mathfrak{J}'$ ($I = \bar{U}_1$), то по теореме 7 из [5, с. 397] $R(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J}''$. Следовательно, $\mathfrak{J}'\subset R(\mathfrak{J})$.

Таким образом, доказательство закончено.

Лемма 3.6.5. *Положим* $\mathfrak{M} = R(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J}''$. *Тогда* $\mathfrak{M}' = R(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J}'$, *и* $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ *являются факторами* (*в смысле определения* 3.1.2 *из* [1, с. 138]).

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{M}' = R(\mathfrak{J})' = \mathfrak{J}'$, это, вместе с леммой 3.6.4, доказывает все требуемые равенства. Нам осталось проверить, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ являются факторами, т. е. что из $\bar{A}\in\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'$ следует $\bar{A} = aI$.

Рассмотрим $\bar{A}\in\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}'$. Тогда $\bar{A}\in\mathfrak{M} = \mathfrak{J}'$ и $\bar{A}\in\mathfrak{M}' = \mathfrak{J}'$, значит, из леммы 3.6.3 одновременно следуют равенства

$$A_{\alpha,\beta} = L_{\chi_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1})} \qquad (91)$$

и

$$A_{\alpha,\beta} = L_{\omega_{\alpha^{-1}\beta}(x)} U_{\beta^{-1}\alpha}. \qquad (92)$$

Сравнение (91) и (92) и использование леммы 3.5.4 дает следующее:

Для $\beta^{-1}\alpha \neq 1$, т. е. $\alpha\neq\beta$: $\chi_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1}) \equiv \omega_{\alpha^{-1}\beta}(x) \equiv 0$, за исключением множества x μ-меры 0. В этом случае (91) дает $A_{\alpha,\beta} = 0$.

Для $\beta^{-1}\alpha = 1$, т. е. $\alpha = \beta$: $\chi_1(x\beta^{-1}) \equiv \omega(x)$, за исключением множества x μ-меры 0. Сравнивая здесь $\beta = 1$ с остальными $\beta\in\mathcal{G}$, получаем $\chi_1(x\beta^{-1}) \equiv \chi_1(x)$ с прежними исключениями. Поскольку $\mathcal{G}$ эргодична, это вместе с леммой 3.3.2 (с $\chi_1(x)$, β^{-1} в качестве $f(x), \alpha$) дает: $\chi_1(x) \equiv a$, за исключением множества x μ-меры 0. Тогда из (91) следует, что $A_{\alpha,\alpha} = L_a = aI$.

Итак, мы видим, что

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{cases} aI & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. $\bar{A} = aI$. Этим завершается доказательство.

3.7. Теперь мы выведем основные правила алгебраических вычислений в факторах $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$.

Лемма 3.7.1. *Как в $\mathfrak{M}$, так и в $\mathfrak{M}'$ справедливы следующие правила вычислений: если* $\bar{A} \approx \{\chi_\gamma(x), \gamma \in \mathcal{G}\}$, $\bar{B} \approx \{\xi_\gamma(x); \gamma \in \mathcal{G}\}$, $\bar{C} \approx \{\eta_\gamma(x); \gamma \in \mathcal{G}\}$ (*каждый из которых принадлежит* $\mathfrak{M}$ *или каждый из которых принадлежит* $\mathfrak{M}'$!), *то мы имеем*

(i) *если* $\bar{C} = a\bar{A}$, *то* $\eta_\gamma(x) \equiv a\chi_\gamma(x)$;

(ii) *если* $\bar{C} = \bar{A}^*$, *то* $\eta_\gamma(x) \equiv \overline{\chi_{\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})}$;

(iii) *если* $\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$, *то* $\eta_\gamma(x) \equiv \chi_\gamma(x) + \xi_\gamma(x)$;

(iv) *если* $\bar{C} = \bar{A}\cdot\bar{B}$, *то* $\eta_\gamma(x) \equiv \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} \chi_\alpha(x)\,\xi_{\gamma\alpha^{-1}}(x\alpha^{-1})$. *Сумма* $\sum_{\alpha\in\mathcal{G}}$ *сходится «по мере» (см. точное определение этого понятия в конце доказательства), вне зависимости от порядка, в котором пробегаются* $\alpha \in \mathcal{G}$.

Доказательство. Принимая во внимание (iv) леммы 3.6.3, достаточно рассмотреть случай, когда $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in \mathfrak{M}$. Для этого случая мы докажем утверждения (i)—(iv) в несколько измененном порядке.

(i), (iii): Немедленно следуют из (i), (iii) леммы 2.4.3 из [1, с. 136—137].

(ii): Выводится из (ii) loc. cit. путем следующих рассуждений: $C_{\alpha,\beta} = L_{\eta_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1})}$, $C_{\alpha,\beta} = A^*_{\beta,\alpha} = L_{\overline{\chi_{\beta\alpha^{-1}}(x\alpha^{-1})}}$, $\eta_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1}) \equiv \overline{\chi_{\beta\alpha^{-1}}(x\alpha^{-1})}$, т. е. $\eta_\gamma(x) \equiv \overline{\chi_{\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})}$. Докажем (iv). Применим (iv) loc. cit. выше. Мы получим

$$C_{\alpha,\beta} = L_{\eta_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1})},\quad C_{\alpha,\beta} = \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} A_{\gamma,\beta}B_{\alpha,\gamma} = \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} L_{\chi_{\gamma\beta^{-1}}(x\beta^{-1})} L_{\xi_{\alpha\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})} = $$
$$= \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} L_{\chi_{\gamma\beta^{-1}}(x\beta^{-1})\xi_{\alpha\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})}$$

в смысле сильной сходимости, вне зависимости от порядка суммирования по $\gamma \in \mathcal{G}$. Таким образом, мы имеем $L_{\eta_{\alpha\beta^{-1}}(x\beta^{-1})} = \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} L_{\chi_{\gamma\beta^{-1}}(x\beta^{-1})\xi_{\alpha\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})}$. Полагая $\beta = 1$ и меняя γ, α на α, γ, получим

$$L_{\eta_\gamma(x)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}} L_{\chi_\alpha(x)\xi_{\gamma\alpha^{-1}}(x\alpha^{-1})} \tag{93}$$

в смысле сильной сходимости и независимо от порядка суммирования по $\alpha \in \mathcal{G}$.

Рассмотрим теперь $M \in \Gamma$ с конечной $\mu(M)$ и образуем

$$\theta_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\theta_M \in \mathfrak{H}_S$, а потому из (93) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \| L_{\eta_\gamma(x)}\theta_M - \sum_{i=1}^{n} L_{\chi_{\bar{\alpha}_i}(x)\xi_{\gamma\bar{\alpha}_i^{-1}}(x\bar{\alpha}_i^{-1})}\theta_M \|_S^2 = 0,$$

где $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots$ — некая нумерация элементов $\mathcal{G}$. Расписывая это подробнее, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int_S | \eta_\gamma(x)\theta_M(x) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{\bar{\alpha}_i}(x)\,\xi_{\gamma\bar{\alpha}_i^{-1}}(x\bar{\alpha}_i^{-1})\,\theta_M(x)|^2 d_\mu x = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_M \Big| \eta_\gamma(x) - \sum_{i=1}^{n} \chi_{\bar{\alpha}_i}(x)\,\xi_{\gamma\bar{\alpha}_i^{-1}}(x\bar{\alpha}_i^{-1})\Big|^2 d_\mu x = 0. \tag{94}$$

Таким образом, благодаря (94) мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\left(x;\, \left|\eta_\gamma(x) - \sum_{i=1}^{n}\chi_{\bar{\alpha}_i}(x)\,\xi_{\gamma\bar{\alpha}_i^{-1}}(x\bar{\alpha}_i^{-1})\right| \geqslant \varepsilon\right)\cdot M\right) = 0 \qquad (95)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $M \in \Gamma$ с конечной $\mu(M)$. Последнее равенство означает, что $\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{\bar{\alpha}_i}(x)\,\xi_{\gamma\bar{\alpha}_i^{-1}}(x\bar{\alpha}_i^{-1})$ сходится «по мере» к $\eta_\gamma(x)$. Поскольку нумерация $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots$ была выбрана произвольно, это доказывает (iv). (Очевидно, если группа $\mathcal{G}$ конечна, рассмотрение вопросов, связанных со сходимостью излишне, ибо конечная сумма $\sum_{\alpha\in\mathcal{G}}$ просто равна $\eta_\gamma(x)$.)

Подытожим полученные до сих пор результаты.

Теорема VIII. *Пусть S — фиксированное множество, Γ — сепарабельная борелевская система в S (определения 3.2.1, 3 2 3), μ — Γ-мера в S (определение 3.2.4), а $\mathcal{G}$ — S, Γ, μ-группа (определения 3.3.1—3.3.3; в частности, отсюда следует, что $\mathcal{G}$ конечна или счетна), являющаяся эргодичной и свободной (определения 3.3.4, 3.3.5). Построим унитарные (конечномерные евклидовы или гильбертовы) пространства $\mathfrak{H}_S$, $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}$, $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$ (определения 3.2.6, 3.4.1). В $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$ построим операторы $\bar{U}_{\alpha_0}$, $\bar{V}_{\alpha_0}$, $\bar{W}$, $\bar{L}_{\varphi(x)}$, $\bar{M}_{\varphi(x)}$ (лемма 3.6.1). Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех $\bar{U}_{\alpha_0}$, $\bar{L}_{\varphi(x)}$, а $\mathfrak{I}$ — множество всех $\bar{V}_{\alpha_0}$, $\bar{M}_{\varphi(x)}$. Тогда мы имеем:*

$$\mathfrak{M} = R(\mathfrak{F}) = \mathfrak{I}' \text{ является кольцом, его 'равен } \mathfrak{M}' = R(\mathfrak{I}) = \mathfrak{F}'.$$

$\mathcal{F} \rightleftarrows \overline{W}\mathcal{F}$ — инволютивный автоморфизм $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$, который переставляет $\mathfrak{F}$, $R(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{M}$ с $\mathfrak{I}$, $R(\mathfrak{I})$, $\mathfrak{I}'$, $\mathfrak{M}'$ соответственно. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ являются факторами. Общий элемент $\bar{A} \in \mathfrak{M}$ или $\bar{A} \in \mathfrak{M}'$ имеет представление $\bar{A} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$ (определение 3.6.1), для которого известны правила алгебраических вычислений (лемма 3.7.1).

Доказательство. Все это представляет собой просто перечисление основных результатов различных определений и лемм из пунктов 3.2—3.7. Кроме упомянутых в тексте, см. также леммы 3.6.4, 3.6.5, (iv) из леммы 3.6.3 и, наконец, пункты (i), (iii) из леммы 3.6.3.

Повсюду в дальнейшем мы будем пользоваться понятиями и результатами теоремы VIII, не ссылаясь на нее явно.

Мы завершим этот раздел двумя леммами о некоторых специальных операторах в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ (Все утверждения в них должны пониматься в смысле истинности всюду, за исключением множества x-ов с μ-мерой 0.)

Лемма 3.7.2. *Пусть $\bar{A} \in \mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}'$, $\bar{A} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$. Тогда мы имеем:*

(i) *$\bar{A}'$ эрмитов, если и только если $\chi_\gamma(x) \equiv \overline{\chi_{\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})}$ для всех $\gamma \in \mathcal{G}$. Отсюда следует вещественность $\chi_1(x)$.*

(ii) *Если $\bar{A}$ положительно определен, то $\chi_1(x) \geqslant 0$.*

(iii) *Если $\bar{A}$ положительно определен и $\chi_1(x) \equiv 0$, то $\bar{A} = 0$.*

Доказательство. Учитывая изоморфизм $\mathcal{F} \rightleftarrows \overline{W}\mathcal{F}$ факторов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ (см., например, (iv) в лемме 3.6.3), достаточно разобрать случай $\bar{A} \in \mathfrak{M}'$. (i): $\bar{A} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$, значит, $\bar{A}^* \approx \{\overline{\chi_{\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})},\ \gamma \in \mathcal{G}\}$. Эрмитовость $\bar{A}$ означает, что

$\bar{A} = \bar{A}^*$, т. е. что $\chi_\gamma(x) \equiv \overline{\chi_{\gamma-1}(x\gamma^{-1})}$. При $\gamma = 1$ это превращается в $\chi_1(x) \equiv \overline{\chi_1(x)}$, так что $\chi_1(x)$ должна быть вещественной.

(ii): Рассмотрим $f \in \mathfrak{H}_S$ и положим по определению

$$\mathcal{F}(x, \alpha) = \begin{cases} f(x) & \text{для } \alpha = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{F} \in \mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$, и поскольку $\bar{A}$ положительно определен, $(\bar{A}\mathcal{F}, \mathcal{F})_S^{\mathcal{G}} \geqslant 0$. Но, как легко видеть, $(\bar{A}\mathcal{F}, \mathcal{F})_S^{\mathcal{G}} = \int_S \chi_1(x) |f(x)|^2 d_\mu x$. Поэтому мы получаем

$$\int_S \chi_1(x) |f(x)|^2 d_\mu x \geqslant 0 \quad \text{для любого } f \in \mathfrak{H}_S. \tag{96}$$

Если $M \in \Gamma$ и $\mu(M)$ конечна, мы можем положить

$$f(x) \equiv \theta_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

тогда $f \in \mathfrak{H}_S$, и (96) превращается в

$$\int_M \chi_1(x)\, d_\mu x \geqslant 0. \tag{97}$$

Согласно (i) выше, $\chi_1(x)$ вещественна. Рассмотрим $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ из (iii) определения 3.2.4 и положим $M = (x;\ \chi_1(x) < 0) \cdot T^{(i)}$. Тогда $\mu(M) \leqslant \mu(T^{(i)})$, а значит, конечна, так что справедливо (97). Но поскольку $\chi_1(x) < 0$ для всех $x \in M$, то $\mu(M) = 0$. Таким образом, $\chi_1(x) \geqslant 0$ для всех $x \in T^{(i)}$ (исключение, как и всюду, см. выше!). Суммирование по $i = 1, 2, \ldots$ дает $\chi_1(x) \geqslant 0$ для всех x.

(iii): Рассмотрим $\alpha_0 \in \mathcal{G}$, $\alpha_0 \neq 1$ и два вектора $f, g \in \mathfrak{H}_S$. Положим по определению

$$\mathcal{F}(x, \alpha) = \begin{cases} f(x) & \text{для } \alpha = 1, \\ g(x) & \text{для } \alpha = \alpha_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{F} \in \mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$, и поскольку $\bar{A}$ положительно определен, $(\bar{A}\mathcal{F}, \mathcal{F})_S^{\mathcal{G}} \geqslant 0$. Теперь, учитывая, что $\chi_1(x) \equiv 0$, легко проверить, что

$$(\bar{A}\mathcal{F}, \mathcal{F})_S^{\mathcal{G}} = \int_S \chi_{\alpha_0}(x) f(x) \overline{g(x)}\, d_\mu x + \int_S \chi_{\alpha_0^{-1}}(x\alpha_0^{-1})\, g(x) \overline{f(x)}\, d_\mu x. \tag{98}$$

Согласно (i) $\chi_{\alpha_0}(x) \equiv \overline{\chi_{\alpha_0^{-1}}(x\alpha_0^{-1})}$, поэтому в (98) второе слагаемое получается из первого комплексным сопряжением. Тогда (98) превращается в

$$(\bar{A}\mathcal{F}, \mathcal{F})_S^{\mathcal{G}} = 2\Re \int_S \chi_{\alpha_0}(x) f(x) \overline{g(x)}\, d_\mu x. \tag{99}$$

Благодаря (99) $(\bar{A}\mathcal{F}, \mathcal{F})_S^{\mathcal{G}} \geqslant 0$ означает, что

$$\Re \int_S \chi_{\alpha_0}(x) f(x) \overline{g(x)}\, d_\mu x \geqslant 0. \tag{100}$$

Если $M \in \Gamma$ и $\mu(M)$ конечна, мы можем положить

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} \chi_{\alpha_0}(x) & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$ [12]

тогда $f, g \in \mathfrak{H}_S$, и (100) превращается в

$$\int_M |\chi_{\alpha_0}(x)| \, d_\mu x \leqslant 0. \tag{101}$$

Таким образом, $\chi_{\alpha_0}(x) \equiv 0$ для всех $x \in M$ (с прежними исключениями!). Наконец, мы можем положить $M = T^{(i)}$ с $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots$ из (iii) определения 3.2.4 и просуммировать по $i = 1, 2, \dots$ Это даст нам $\chi_{\alpha_0}(x) \equiv 0$ всюду.

Итак, мы получили $\chi_\alpha(x) \equiv 0$ при $\alpha \neq 1$. Для $\alpha = 1$ это так по предположению. Значит, $\overline{A} = 0$.

Следующие утверждения будут сформулированы только для $\mathfrak{M}$, но автоморфизм $\mathscr{F} \leftrightarrows \overline{W}\mathscr{F}$ в $\mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$ (см., в частности, (iv) леммы 3.6.3) немедленно распространяет их и на $\mathfrak{M}'$.

Определение 3.7.1. (i) *Мы обозначим через* $\overline{\mathfrak{L}}$ *множество всех* $\overline{L}_{\varphi(x)}$.

(ii) *для каждого* $M \in \Gamma$ *положим* $\overline{E}(M) = \overline{L}_{\theta_M(x)}$, *где*

$$\theta_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 3.7.3. (i) $\overline{\mathfrak{L}}$ — *абелево кольцо* $\subset \mathfrak{M}$, *кроме того,*

$$\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{L}}'.$$

(ii) *Проекторы в* $\overline{\mathfrak{L}}$ *имеют вид* $\overline{E}(M)$.

Доказательство (i): Достаточно доказать, что $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{L}}'$. Поскольку $\mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{L}}'$, очевидно, кольцо, из приведенного равенства следует, что $\overline{\mathfrak{L}}$ тоже кольцо, а также что $\overline{\mathfrak{L}} \subset \mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{L}} \subset \overline{\mathfrak{L}}'$, т. е. абелевость $\overline{\mathfrak{L}}$.

Доказательство включения $\overline{\mathfrak{L}} \subset \mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{L}}'$: $\overline{L}_{\varphi(x)} \in \mathfrak{J} \subset R(\mathfrak{J}) = \mathfrak{M}$, так что $\overline{\mathfrak{L}} \subset \mathfrak{M}$. Каждый $\overline{L}_{\varphi(x)}$ коммутирует с любым $\overline{L}_{\psi(x)}$, и $\overline{L}^*_{\psi(x)} = \overline{L}_{\overline{\psi(x)}}$, значит, он $\in \overline{\mathfrak{L}}'$, значит, $\overline{\mathfrak{L}} \subset \overline{\mathfrak{L}}'$. Таким образом, $\overline{\mathfrak{L}} \subset \mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{L}}'$.

Доказательство включения $\overline{\mathfrak{L}} \supset \mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{L}}'$: Рассмотрим $\overline{A} \in \mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{L}}'$. Поскольку $A \in \mathfrak{M}$, то $\overline{A} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathscr{G}\}$. Так как $\overline{A} \in \overline{\mathfrak{L}}'$, $\overline{A}$ коммутирует с любым $\overline{L}_{\varphi(x)}$. Пусть $\overline{L}_{\varphi(x)} \approx \{\varphi(x)\,\delta_\gamma;\ \gamma \in \mathscr{G}\}$, где

$$\delta_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{для } \gamma = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

---

[12] Для любого комплексного a $\operatorname{sgn} a = \begin{cases} a/|a| & \text{при } a \neq 0, \\ 0 & \text{при } a = 0. \end{cases}$ При этом всегда $|\operatorname{sgn} a| \leqslant 1$ и $a\,\overline{\operatorname{sgn} a} = |a|$.

При этом $\overline{L}_{\varphi(x)}\overline{A} \approx \{\varphi(x)\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$, $\overline{A}\overline{L}_{\varphi(x)} \approx \{\varphi(x\gamma^{-1})\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$, иначе говоря,

$$\varphi(x)\chi_\gamma(x) \equiv \varphi(x\gamma^{-1})\chi_\gamma(x). \tag{102}$$

Положим для $M \in \Gamma$

$$\varphi(x) \equiv \theta_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

тогда (102) превратится в

$$\chi_\gamma(x) \equiv 0 \qquad \text{для } x \in M, \quad x\gamma^{-1} \notin M \qquad \text{или} \quad x\gamma^{-1} \in M, \quad x \notin M. \tag{103}$$

Пусть теперь M пробегает все элементы конечной или счетной системы Δ из определения 3.2.3; благодаря (ii) оттуда же после просмотра по всем $M \in \Delta$ (103) превращается в

$$\chi_\gamma(x) \equiv 0 \tag{104}$$

для $x\gamma^{-1} \neq x$, т. е. $x \neq x\gamma$. Поскольку $\mathcal{G}$ свободна, это означает, что при $\gamma \neq 1$ (104) справедливо без каких-либо дальнейших ограничений. Таким образом, $\chi_\gamma(x) \equiv \chi_1(x)\delta_\gamma$ (δ_γ то же, что и ранее), а потому $\overline{A} = \overline{L}_{\chi_1(x)}$ (см. выше) и $\overline{A} \in \overline{\mathfrak{L}}$.

Итак, мы доказали, что $\mathfrak{M}\cdot\overline{\mathfrak{L}}' \subset \overline{\mathfrak{L}}$, и тем самым завершили доказательство.

Докажем (ii). То, что $\overline{A} \in \overline{\mathfrak{L}}$ — проектор, означает следующее: $\overline{A} = \overline{L}_{\varphi(x)}$, $\overline{A} = \overline{A}^*$ и $\overline{A} = \overline{A}^2$. Но $\overline{A}^* = \overline{L}_{\overline{\varphi(x)}}$, $\overline{A}^2 = \overline{L}_{\varphi^2(x)}$, так что это равносильно $\varphi(x) \equiv \overline{\varphi(x)}$, $\varphi(x) \equiv \varphi(x)^2$. Это означает, что $\varphi(x) \equiv 0, 1$. Но такие $\varphi(x)$ — это в точности все функции вида

$$\varphi(x) \equiv \theta_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

со всеми $M \in \Gamma$, а потому $\overline{A}$ совпадают с $\overline{L}_{\theta_M(x)} = \overline{E}(M)$ со всеми возможными $M \in \Gamma$.

Глава IV.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$

4.1. Основное различие, которое должно быть сделано при определении классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, это различие между случаем, когда S, Γ, μ-группа $\mathcal{G}$ измерима, и случаем, когда она не измерима. (См. определение 3.3.6'.)

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{G}$ измерима. Это означает, что существует Γ-мера ν, описанная в определении 3.3.6, или, что то же самое, существует функция $k(x)$, описанная в лемме 3.3.3.

В этом случае можно повсюду заменить μ на ν: $\mathcal{G}$ является S, Γ, ν-группой точно так же, как и S, Γ, μ-группой, ее свойства свободы и эргодичности зависят только от множеств меры 0, которые одинаковы для ν и для μ. Пространства $\mathfrak{H}_{S,\Gamma,\mu}$ и $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}_{S,\Gamma,\mu}$ превратятся в $\mathfrak{H}_{S,\Gamma,\nu}$ и $\mathfrak{H}^{\mathcal{G}}_{S,\Gamma,\nu}$, если мы заменим $f(x)$ и $\mathcal{F}(x, \alpha)$ на $(k(x))^{1/2}f(x)$ и $(k(x))^{1/2}\mathcal{F}(x, \alpha)$ соответственно. Такие замены компен-

сируют изменения, внесенные в результате подстановки ν на место μ в $\mathfrak{H}_S$ и $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$. Наконец, (ii) леммы 3.3.3 показывает, какое влияние оказывает эта замена на определение $\overline{U}_{\alpha_0}$, $\overline{V}_{\alpha_0}$, $\overline{W}$, $\overline{L}_{\varphi(x)}$, $\overline{M}_{\varphi(x)}$.

Иначе говоря, если $\mathcal{G}$ вообще измерима, мы можем предполагать, что сама μ обладает свойствами, требуемыми для ν, в частности, (ii) из определения 3.3.6. Это означает:

$$\mu(M) = \mu(M\alpha) = \mu_\alpha(M), \qquad \frac{d_{\mu_\alpha}}{d_\mu}(x) \equiv 1. \tag{105}$$

Отсюда, однако, следует, что для измеримой $\mathcal{G}$ наши $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ по существу совпадают с построенными в [1, с. 192—204], так что исчерпывающее их описание, данное loc. cit., относится в этом случае и к нашим $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$. На самом деле данная работа была предпринята для изучения случая неизмеримой $\mathcal{G}$, который будет обсужден ниже в пунктах 4.3—4.4. (Он соответствует случаю (III_∞), см. теорему IX.)

Тем не менее для полноты изложения мы рассмотрим и измеримые $\mathcal{G}$, не заботясь о замене μ на ν. Мы постараемся, однако, сделать этот обзор как можно короче и не будем углубляться в вопросы, которые тоже можно было бы здесь рассматривать: находить критерии нормированности, выражения для $\overline{T}_{\mathfrak{M}}(\overline{A})$, $[[\overline{A}]]$, $\langle\langle \overline{A}, \overline{B}\rangle\rangle$ и т. п.

4.2 Повсюду в этом разделе мы предполагаем, что $\mathcal{G}$ измерима, и используем (в существенном однозначно определенные) ν и $k(x)$ из определения 3.3.6 и леммы 3.3.3.

В пунктах 4.2—4.4 все наши результаты будут сформулированы и доказаны только для $\mathfrak{M}$: автоморфизм $\mathcal{F} \rightleftarrows \overline{W}\mathcal{F}$ пространства $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$ (см., в частности, (iv) леммы 3.6.6) немедленно распространяет их также на $\mathfrak{M}'$.

Определение 4.2.1. *Если $\overline{A} \in \mathfrak{M}$ положительно определен, то для $\overline{A} \approx \{\gamma_\gamma(x): \gamma \in \mathcal{G}\}$ мы имеем (согласно (ii) леммы 3.7.2) $\chi_1(x) \geqslant 0$. Следовательно, можно написать интеграл*

$$\int_S \chi_1(x)\, k(x)\, d_\mu x.$$

Его численное значение неотрицательно, но оно может быть как конечным, так и бесконечным. Мы обозначим его значение через $T^0(\overline{A})$.

Лемма 4.2.1. *Если $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C} \in \mathfrak{M}$, а $\overline{A}$ и $\overline{B}$ положительно определены, то*

(i) $0 \leqslant T^0(\overline{A}) \leqslant +\infty$;

(ii) $T^0(\overline{A}) > 0$, *если только* $\overline{A} \neq 0$;

(iii) $T^0(\overline{A} + \overline{B}) = T^0(\overline{A}) + T^0(\overline{B})$;

(iv) $\overline{C} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$. *Оба оператора $\overline{C}^*\overline{C}$ и $\overline{C}\overline{C}^*$ положительно определены и $\in \mathfrak{M}$, кроме того,*

$$T^0(\overline{C}\overline{C}^*) = T^0(\overline{C}\overline{C}^*) = \sum_{\gamma\in\mathcal{G}} \int_S |\chi_\gamma(x)|^2 k(x)\, d_\mu x.$$

(Поскольку в этой $\sum_{\gamma\in\mathcal{G}}$ все слагаемые $\geqslant 0$, понятно, что она означает.)

Доказательство. (i): Немедленно следует из (ii) леммы 3.7.2.

(ii): Немедленно следует из (ii), (iii) леммы 3.7.2.

(iii): Очевидно.

(iv): $\bar{C}^*\bar{C}$, $\bar{C}\bar{C}^* \in \mathfrak{M}$ вместе с $\bar{C} \in \mathfrak{M}$, их положительная определенность очевидна. Мы имеем $\bar{C} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathscr{G}\}$, $\bar{C}^* \approx \{\overline{\chi_{\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})};\ \gamma \in \mathscr{G}\}$, следовательно, $\bar{C}\bar{C}^* \approx$ $\approx \{\rho_\gamma(x); \gamma \in \mathscr{G}\}$ с $\rho_\gamma(x) = \sum_{\alpha \in \mathscr{G}} \chi_\alpha(x)\, \overline{\chi_{\alpha\gamma^{-1}}(x\gamma^{-1})}$. Значит, для $\gamma = 1$

$$\rho_1(x) = \sum_{\alpha \in \mathscr{G}} |\chi_\alpha(x)|^2. \tag{106}$$

Эти $\sum_{\alpha \in \mathscr{G}}$ сходятся «по мере» в смысле (iv) леммы 3.7.1. Но в $\sum_{\alpha \in \mathscr{G}}$ из (106) все слагаемые $\geqslant 0$, следовательно, она сходится численно (к конечным или бесконечным значениям). Значит, оба предела совпадают и (106) верно в смысле числовой сходимости.

Так как $T^0(\bar{C}\bar{C}^*) = \int_S \rho_1(x)\, k(x)\, d_\mu x$, то (106) дает

$$T^0(\bar{C}\bar{C}^*) = \sum_{\alpha \in \mathscr{G}} \int_S |\chi_\alpha(x)|^2 k(x)\, d_\mu x. \tag{107}$$

Заменим $\bar{C}$ на $\bar{C}^*$, т. е. $\chi_\alpha(x)$ на $\overline{\chi_{\alpha^{-1}}(x\alpha^{-1})}$. Тогда, если еще заменить индекс суммирования α на α^{-1}, (107) превратится в

$$T^0(\bar{C}^*\bar{C}) = \sum_{\alpha \in \mathscr{G}} \int_S |\chi_\alpha(x\alpha)|^2 k(x)\, d_\mu x. \tag{108}$$

Согласно (iii) леммы 3.3.1 и (ii) леммы 3.3.3 мы всегда имеем $\int_S f(x\alpha) \times$ $\times k(x)\, d_\mu x = \int_S f(x)\, k(x)\, d_\mu x$, следовательно, правые части (107) и (108) равны. Поэтому их можно скомбинировать в

$$T^0(\bar{C}^*\bar{C}) = T^0(\bar{C}\bar{C}^*) = \sum_{\alpha \in \mathscr{G}} \int_S |\chi_\alpha(x)|^2 k(x)\, d_\mu x, \tag{109}$$

что и завершает доказательство.

Лемма 4.2.2. (i) *Когда $\bar{E}$ пробегает все проекторы $\in \mathfrak{M}$, $T^0(\bar{E})$ всегда определено и совпадает с функцией относительной размерности в смысле определения* 8.2.1 *из* [1, с. 165]. *Нормируем функцию относительной размерности $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E})$ следующим образом:*

$$D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}) = T^0(\bar{E}).$$

(ii) *Для $\bar{E}(M)$ из* (ii) *определения* 3.7.1 *и $M \in \Gamma$ мы имеем*

$$D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M)) = \int_M k(x)\, d_\mu x = \nu(M).$$

(iii) *Существует $M \in \Gamma$, для которого $\nu(M) \neq 0, \infty$.*

Доказательство. Мы докажем эти утверждения в несколько измененном порядке.

(ii): Имеем $\bar{E}(M) = \bar{L}_{\theta M(x)}$, где

$$\theta_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но это означает (см. также доказательство (i) в лемме 3.7.3), что $\bar{E}(M) = \bar{L}_{\theta_M(x)} \approx \{\theta_M(x)\delta_\gamma;\quad \gamma \in \mathcal{G}\}$, где

$$\delta_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{для } \gamma = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому согласно определению 4.2.1

$$T^0(\bar{E}(M)) = \int_S \theta_M(x)\, k(x)\, d_\mu x = \int_M k(x)\, d_\mu x = \nu(M). \tag{110}$$

Как только мы докажем (i) и тем самым установим, что $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M)) = T^0(\bar{E}(M))$, (110) превратится в формулу, которую мы хотели доказать.

(iii): Рассмотрим $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ... и (iii) определения 3.2.4. Если все $\nu(T^{(i)}) = 0$, то суммирование по $i = 1, 2, \ldots$ даст $\nu(S) = 0$, или, что эквивалентно, $\mu(S) = 0$, чего быть не может. Следовательно, существует $i = 1, 2, \ldots$, для которого $\nu(T^{(i)}) \neq 0$. Поскольку мы также имеем $\nu(T^{(i)}) \neq \infty$, это завершает доказательство.

(i): Поскольку каждый проектор положительно определен, то для каждого проектора $\bar{E} \in \mathfrak{M}$ определен $T^0(\bar{E})$ (см. определение 4.2.1), и он $\geqslant 0$, $\leqslant +\infty$ (см. (i) леммы 4.2.1). Кроме того, можно найти $T^0(\bar{E}) \neq 0, \infty$: положим $\bar{E} = \bar{E}(M)$ для M из (iii) выше и используем уже доказанную часть (ii), (110): $T^0(\bar{E}(M)) = \nu(M) \neq 0, \infty$.

С помощью леммы 8.3.5 из [1, с. 170] можно установить, что $T^0(\bar{E})$ обладает свойствами функции относительной размерности: достаточно проверить, что $T^0(\bar{E})$ удовлетворяет условиям (ii), (iii) из определения 8.2.1 [1, с. 165].

Доказательство (ii): мы должны доказать, что из $\bar{E} \sim \bar{F}(\ldots\mathfrak{M})$ следует $T^0(\bar{E}) = T^0(\bar{F})$. Согласно определению 6.1.1 на с. 151 и лемме 4.3.1 на с. 141 из [1] мы имеем $\bar{E} = \bar{U}^*\bar{U}$, $\bar{F} = \bar{U}\bar{U}^*$. Тогда согласно (iv) леммы 4.2.1 $T_0(\bar{E}) = T^0(\bar{F})$.

Доказательство (iii): Мы должны доказать, что для ортогональных $\bar{E}$, $\bar{F}$ имеет место равенство $T^0(\bar{E} + \bar{F}) = T^0(\bar{E}) + T^0(\bar{F})$. Но это немедленно следует из (iii) леммы 4.2.1.

Таким образом доказательство закончено.

Следствие: $\mathfrak{M}$ *принадлежит классам* (I) *или* (II). ($\mathcal{G}$ *предполагается измеримой*!)

Доказательство. (ii), (iii) выше вместе дают существование проектора $\bar{E} \in \mathfrak{M}$ с $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}) \neq 0, \infty$. Поэтому $\mathfrak{M}$ не принадлежит классу (III).

Теперь можно точно установить, к какому именно классу принадлежит $\mathfrak{M}$, когда $\mathcal{G}$ измерима. Согласно следствию, сформулированному выше, имеются следующие возможности: (I_n), $(n = 1, 2, \ldots)$, (I_∞), (II_1), (II_∞). Но поскольку обсуждение полностью совпадает с проведенным в [1] на стр. 204—208, мы опустим его. Читатель отсылается к этой работе и в особенности к теореме XII в [1, с. 208], где полностью перечислены все результаты. (Роль меры μ (в [1]) играет теперь ν.) Упомянутая теорема показывает, в частности, что все перечисленные выше случаи в самом деле возникают при подходящем выборе S, $\mathcal{G}$, μ.

4.3. Ниже в этом разделе мы сделаем предположение, что $\mathcal{G}$ не измерима. Не зная, к какому классу принадлежит $\mathfrak{M}$, мы тем не менее будем пользоваться функцией относительной размерности $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E})$ в нем. (См. определение 8,2.1 и теорему VII на с. 165 и 168 в [1] — нормировка теперь не играет роли.) Позднее, в лемме 4.3.5, мы увидим, что этот класс есть (III_∞), так что область значений $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E})$ состоит лишь из 0 и ∞, но пока это нас не касается.

Мы начнем с исследования $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M))$ с $M \in \Gamma$ (см. (ii) из определения 3.7.1).

Лемма 4.3.1. (i) *Если для* $M_1, M_2, \ldots \in \Gamma$ *из* $i \neq j$ *следует* $M_i \cdot M_j = \theta$, то

$$D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M_1 + M_2 + \ldots)) = D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M_1)) + D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M_2)) + \ldots$$

(ii) *Если* $M \in \Gamma$, *то для всех* $\alpha \in \mathcal{G}$

$$D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M)) = D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M\alpha)).$$

Доказательство. (i): Из (ii) определения 3.7.1 можно сразу заключить, что $\bar{E}(M)$ является проектором на замкнутое линейное множество $\mathfrak{W}(M)$ вида

$$\bar{E}(M) = P_{\mathfrak{W}(M)}, \qquad \mathfrak{W}(M) = \{\mathcal{F}; \mathcal{F}(x, \alpha) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin M\}. \tag{111}$$

Теперь ясно, что при принятых относительно $M_1, M_2, \ldots$ предположениях, $\mathfrak{W}(M_1 + M_2 + \ldots) = [\mathfrak{W}(M_1), \mathfrak{W}(M_2), \ldots]$ и $\mathfrak{W}(M_1)$, $\mathfrak{W}(M_2), \ldots$ взаимно ортогональны. Тогда лемма 8.3.2 из [1, с. 168] дает $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M_1 + M_2 + \ldots) = D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M_1)) + D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M_2)) + \ldots$, что и требовалось.

(ii): $\bar{U}_\alpha$ унитарен (см. (i) леммы 3.6.1), и $\in \mathfrak{J} \subset R(\mathfrak{J}) = \mathfrak{M}$, а из (111) ясно, что он отображает $\mathfrak{W}(M)$ на $\mathfrak{W}(M\alpha)$. Значит, $\bar{U}_\alpha \bar{E}(M)$ частично изометричен и имеет $\mathfrak{W}(M)$ в качестве начального и $\mathfrak{W}(M\alpha)$ — конечного множества. Поэтому $\mathfrak{W}(M) \sim \mathfrak{W}(M\alpha)$ $(\ldots\mathfrak{M})$ и, следовательно, $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M)) = D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M\alpha))$ согласно определению 6.1.1 на с. 151 и определению 8.2.1, (ii) на с. 165 в [1].

Лемма 4.3.2. *Имеет место одна из следующих двух альтернатив:*

(a) *Не существует такого* $M \in \Gamma$, *что* $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M)) \neq 0, \infty$.

(b) *Существует последовательность* $M_1, M_2, \ldots \in \Gamma$ *с* $M_1 + M_2 + \ldots = S$, *для которой все* $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M_i)) \neq 0, \infty$.

Доказательство. Определим подсистему K в Γ следующим образом: $M \in K$, если и только если существует такая последовательность $M_1, M_2, \ldots \in \Gamma$

с $M_1 + M_2 \ldots = M$, что все $D_{\mathfrak{M}}\overline{E}(M_i)) \neq 0, \infty$.

Заметим, что

$$\text{Из } M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots \in K \text{ следует, что } M^{(1)} + M^{(2)} + \ldots \in K. \tag{112}$$

В самом деле, построим для каждого $M^{(i)}$ последовательность $M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \ldots$ ($i = 1, 2, \ldots$ см. выше), тогда система $M_j^{(i)}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, упорядоченная в простую последовательность, годится как последовательность для $M^{(1)} + M^{(2)} + \ldots$ Далее:

$$\text{Из } M \in K \text{ следует } M\alpha \in K \text{ для всех } \alpha \in \mathcal{G}. \tag{113}$$

Действительно, если $M_1, M_2, \ldots$ подходит для M, то согласно (ii) леммы 4.3.1 $M_1\alpha, M_2\alpha, \ldots$ подходит для $M\alpha$. Наконец,

$$\text{Если } M \in K, \qquad M \subset M', \qquad \mu(M' - M) = 0, \qquad \text{то } M' \in K. \tag{114}$$

Действительно, выберем последовательность $M_1, M_2, \ldots$ для M и заменим в ней M_1 на $M_1 + (M' - M)$, оставив все $M_2, M_3, \ldots$ без изменения. Полученная последовательность подходит для M'.

Рассмотрим теперь $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ из (iii) определения 3.2.4 для μ. Положим по определению

$$a_i = \text{наименьшая верхняя грань } (\mu(M \cdot T^{(i)}); M \in K). \tag{115}$$

Для $i, j = 1, 2, \ldots$ мы можем выбрать такие $M_{i,j}$, что

$$M_{i,j} \in K, \qquad \mu(M_{i,j} \cdot T^{(i)}) \geqslant a_i - 1/j. \tag{116}$$

Переупорядочим $M_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, в простую последовательность $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots$ Тогда согласно (112) $\sum_{i,j=1}^{\infty} M_{i,j} = M^{(1)} + M^{(2)} + \ldots \in K$, т. е.

$$\overline{M} = \sum_{i,j=1}^{\infty} M_{i,j} \in K. \tag{117}$$

Мы имеем $\mu(\overline{M} \cdot T^{(i)}) \geqslant \mu(M_{i,j} \cdot T^{(i)}) \geqslant a_i - 1/j$. Поскольку это верно для всех $j = 1, 2, \ldots$, а $\mu(\overline{M} \cdot T^{(i)})$ от j не зависит, отсюда следует, что $\mu(\overline{M} \cdot T^{(i)}) \geqslant a_i$. Согласно (115) и (117) имеем также $\mu(\overline{M} \cdot T^{(i)}) \leqslant a_i$, а потому

$$\mu(\overline{M} \cdot T^{(i)}) = a_i. \tag{118}$$

Пусть теперь $M \in K$ и $M \supset \overline{M}$. Тогда $M \cdot T^{(i)} \supset \overline{M} \cdot T^{(i)}$ и оба множества $\subset T^{(i)}$, так что их μ-меры конечны. Вместе с (115), (118) это дает

$$\mu((M - \overline{M}) \cdot T^{(i)}) = \mu(M \cdot T^{(i)} - \overline{M} \cdot T^{(i)}) = \mu(M \cdot T^{(i)}) - \mu(\overline{M} \cdot T^{(i)}) \leqslant a_i - a_i = 0,$$

т. е.

$$\mu((M - \overline{M})\, T^{(i)}) = 0. \tag{119}$$

Суммируя по $i = 1, 2, \ldots$ и немного переформулировав нашу гипотезу, мы получаем:

$$\text{Если } M \in K \quad \text{и } M \supset \overline{M}, \quad \text{то } \mu(M - \overline{M}) = 0. \tag{120}$$

Из (117) и (113) следует, что $\overline{M}\alpha \in K$ для каждого $\alpha \in \mathcal{G}$. Тогда благодаря (112) $\overline{M} + \overline{M}\alpha \in K$ (положить $M^{(1)} = \overline{M}$, $M^{(2)} = M^{(3)} = \ldots = M\alpha$). При этом $M = \overline{M} + \overline{M}\alpha$ удовлетворяет гипотезе (120), а потому

$$\mu((\overline{M} + \overline{M}\alpha) - \overline{M}) = 0. \tag{121}$$

Замена α на α^{-} в (121) дает $\mu((\overline{M} + \overline{M}\alpha^{-1}) - \overline{M}) = 0$, следовательно, $\mu(((\overline{M} + \overline{M}\alpha^{-1}) - \overline{M})\alpha) = 0$, т. е.

$$\mu((\overline{M} + \overline{M}\alpha) - \overline{M}\alpha) = 0. \tag{122}$$

Складывая (121) и (122), получим

$$\mu((\overline{M} + \overline{M}\alpha) - (\overline{M} \cdot \overline{M}\alpha)) = 0. \tag{123}$$

Поскольку (123) справедливо для всех $\alpha \in \mathcal{G}$, а $\mathcal{G}$ эргодична, мы должны иметь или

$$\mu(\overline{M}) = 0, \tag{124a}$$

или

$$\mu(S - \overline{M}) = 0. \tag{124b}$$

Случай (124a): Рассмотрим произвольное $M \in \Gamma$ с $D_{\mathfrak{M}}(\overline{E}(M)) \neq 0, \infty$. Тогда, заменяя $M_1, M_2 \ldots$ множества $\overline{M}$ на $M, M_1, M_2, \ldots$, мы видим, что $M + \overline{M} \in K$. $M + \overline{M}$ удовлетворяет предположению (120), значит, $\mu((M + \overline{M}) - \overline{M}) = 0$. Вместе с (124a) это дает $\mu(M + \overline{M}) = 0$, следовательно, $\mu(M) = 0$. Теперь (ii) из определения 3.7.1 показывает, что $\overline{E}(M) = 0$, а потому и $D_{\mathfrak{M}}(\overline{E}(M)) = 0$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, не может быть $D_{\mathfrak{M}}(\overline{E}(M)) \neq 0, \infty$, что соответствует альтернативе (a).

Случай (124 b): (117), (114) и (124 b) вместе дают $S \in K$, что соответствует альтернативе (b).

Л е м м а 4.3.3. *Если выполняется альтернатива* (b) *леммы* 4.3.2, *то группа* $\mathcal{G}$ *измерима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $M \in \Gamma$ определим

$$\nu(M) = D_{\mathfrak{M}}(\overline{E}(M)).$$

Эта ν является Γ-мерой, поскольку удовлетворяет условиям (i)—(iv) определения 3.2.4. В самом деле,

(i), (ii): Очевидны.

(iii) : Немедленно следует из (b) леммы 4.3.2, если мы выберем M_1, M_2, ... в качестве $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ...

(iv): Совпадает с (i) леммы 4.3.1.

Теперь мы докажем измеримость $\mathcal{G}$, проверив, что указанная выше ν удовлетворяет также условиям (i), (ii) определения 3.3.6. Действительно,

Усл. (i): $\nu(M) = 0$ означает, что $D_{\mathfrak{M}}(\bar{E}(M)) = 0$, т. е. $\bar{E}(M) = 0$, откуда согласно (ii) определения 3.7.1 $\bar{L}_{\theta_{M}(x)} = 0$. Но это, очевидно, эквивалентно $\mu(M) = 0$.

(ii): Совпадает с (ii) леммы 4.3.1.

Это завершает доказательство.

Теперь мы установим одно свойство операции $\bar{A}^{|E_1|E_2|\dots}$ (см. определение 2.1.2)

Лемма 4.3.4. *Поскольку $\bar{\mathfrak{L}} \subset \mathfrak{M}$ — абелево кольцо (согласно* (i) *леммы* 3.7.3), *любая последовательность проекторов $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots \in \bar{\mathfrak{L}}$ коммутативна, а значит, для любого $\bar{A} \in \mathfrak{M}$ с конечным рангом можно образовать $\bar{A}^{|\bar{E}_1|\bar{E}_2|\dots}$, который $\in \mathfrak{M}$ (согласно определению* 2.1.2).

Положим $\bar{A} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$, $\bar{A}^{|\bar{E}_1|\bar{E}_2|\dots} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$. Тогда

$$\chi_1(x) \equiv \chi_1(x), \text{ за исключением } x\text{-множества } \mu\text{-меры } 0.$$

Доказательство. Все соотношения в этом доказательстве должны пониматься в том смысле, что они справедливы всюду, за исключением множества x с μ-мерой 0.

Положим по определению

$$\bar{A}^{|\bar{E}_1|\bar{E}_2|\dots|\bar{E}_n} \approx \{\chi_\gamma^{(n)}(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\} \qquad \text{для } n = 1, 2, \dots \tag{125}$$

и проведем несколько последовательных шагов доказательства

Доказательство равенства $\chi_1(x) \equiv \chi_1^{(1)}(x)$. Имеем

$$\bar{A}^{|\bar{E}_1} = \bar{E}_1\bar{A}\bar{E}_1 + (I - \bar{E}_1)\bar{A}(I - \bar{E}_1). \tag{126}$$

Так как $\bar{E} \in \mathfrak{L}$, то согласно (ii) леммы 3.7.3 $\bar{E}_1 = \bar{E}(M_1)$ для некоторого $M_1 \in \Gamma$. Иначе говоря, $\bar{E}_1 = \bar{L}_{\theta_{M_1}(x)}$,

$$\theta_{M_1}(x) = \begin{cases} 1 & x \in M_1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это, как мы знаем, означает, что $\bar{E}_1 \approx \{\theta_{M_1}(x)\,\delta_\gamma;\ \gamma \in \mathcal{G}\}$,

$$\delta_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{для } \gamma = 1 \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вместе с $\bar{A} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$ это благодаря (126) дает

$$\bar{A}^{|\bar{E}_1} \approx \{[\theta_{M_1}(x)\,\theta_{M_1}(x\gamma^{-1}) + (1 - \theta_{M_1}(x))(1 - \theta_{M_1}(x\gamma^{-1}))]\,\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$$

Отсюда согласно (125)

$$\chi_\gamma^{(1)}(x) \equiv [\theta_{M_1}(x)\,\theta_{M_1}(x\gamma^{-1}) + (1 - \theta_{M_1}(x))(1 - \theta_{M_1}(x\gamma^{-1}))]\,\chi_\gamma(x). \tag{127}$$

Положим в (127) $\gamma = 1$, тогда, поскольку $\theta_M(x) = 0,1$, оно переходит в $\chi_1^{(1)}(x) \equiv \chi_1(x)$.

Доказательство равенства $\chi_1^{(n)}(x) \equiv \chi_1^{(n+1)}(x)$ (для $n = 1, 2, \ldots$). Мы доказали, что $\chi_1(x) \equiv \chi_1^{(1)}(x)$. Заменим $\overline{A}, \overline{E}_1$ на $\overline{A}^{|\overline{E}_1|\ldots|\overline{E}_n}, \overline{E}_{n+1}$, тогда наше равенство превратится в $\chi_1^{(n)}(x) \equiv \chi_1^{(n+1)}(x)$.

Комбинируя два полученных выше результата, получим

$$\chi_1(x) \equiv \chi_1^{(1)}(x) \equiv \chi_1^{(2)}(x) \equiv \ldots \tag{128}$$

Доказательство равенства $\chi_1(x) \equiv \chi_1^*(x)$. Согласно определению 2.1.2, мы имеем

$$\lim \operatorname{str}_{n\to\infty} \overline{A}^{|\overline{E}_1|\ldots|\overline{E}_n} = \overline{A}^{|\overline{E}_1|\overline{E}_2|\ldots}.$$

Это означает, что $\lim_{n\to\infty} \| \overline{A}^{|\overline{E}_1|\ldots|\overline{E}_n}\mathscr{F} - \overline{A}^{|\overline{E}_1|\overline{E}_2|\ldots}\mathscr{F} \|_S^{\mathscr{G}} = 0$ для каждого $\mathscr{F} \in \mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$, а значит, для всех $\mathscr{F}, \mathscr{H} \in \mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left((\overline{A}^{|\overline{E}_1|\ldots|\overline{E}_n}\mathscr{F}, \mathscr{H})_S^{\mathscr{G}} - (\overline{A}^{|\overline{E}_1|\overline{E}_2|\ldots}\mathscr{F}, \mathscr{H})_S^{\mathscr{G}} \right) = 0. \tag{129}$$

Выберем произвольные $f, g \in \mathfrak{H}_S$ и определим

$$\mathscr{F}(x, \alpha) = \begin{cases} f(x) & \text{для } \alpha = 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\mathscr{H}(x, \alpha) = \begin{cases} g(x) & \text{для } \alpha = 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

тогда $\mathscr{F}, \mathscr{H} \in \mathfrak{H}_S^{\mathscr{G}}$, и

$$(\overline{A}^{|\overline{E}_1|\ldots|\overline{E}_n}\mathscr{F}, \mathscr{H})_S^{\mathscr{G}} = \int_S \chi_1^{(n)}(x) f(x) \overline{g(x)}\, d_\mu x,$$

$$(\overline{A}^{|\overline{E}_1|\overline{E}_2|\ldots}\mathscr{F}, \mathscr{H})_S^{\mathscr{G}} = \int_S \chi_1^*(x) f(x) \overline{g(x)}\, d_\mu x.$$

При этом (129) превращается в

$$\lim_{n\to\infty} \int_S (\chi_1^{(n)}(x) - \chi_1^*(x)) f(x) \overline{g(x)}\, d_\mu x = 0,$$

или, с учетом (128), в

$$\int_S (\chi_1(x) - \chi_1^*(x)) f(x) \overline{g(x)}\, d_\mu x = 0. \tag{130}$$

Если $M \in \Gamma$ и $\mu(M)$ конечна, мы можем положить

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\chi_1(x) - \chi_1(x)) & \text{для } x \in M, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(см. примеч. 12), тогда $f, g \in \mathfrak{H}_S$ и (130) переходит в

$$\int_M |\chi_1(x) - \chi_1^*(x)|\, d_\mu x = 0. \tag{131}$$

Таким образом, $\chi_1(x) \equiv \chi_1^*(x)$ для всех $x \in M$ (с обычными исключениями!). Теперь мы можем положить $M = T^{(i)}$ с $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ из определения 3.2.4. (iii) и просуммировать по $i = 1, 2, \ldots$ Это даст нам $\chi_1(x) \equiv \chi_1^*(x)$ всюду.

Таким образом, доказательство закончено.

Теперь мы в состоянии предпринять решающий шаг.

Лемма 4.3.5. *Если $\mathcal{G}$ неизмерима, то $\mathfrak{M}$ принадлежит классу* (III_∞).

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{G}$ неизмерима. Мы докажем, что $\mathfrak{M}$ принадлежит классу (III_∞), используя для этого лемму 2.2.2. В качестве упомянутого там кольца $\mathfrak{A}$ мы возьмем $\bar{\mathfrak{L}}$ из (i) определения 3.7.1. Поэтому нам нужно только доказать гипотезу леммы 2.2.2 для $\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{L}}$.

$\bar{\mathfrak{L}}$ — абелево кольцо $\subset \mathfrak{M}$: следует из (i) леммы 3.7.3.

Усл. (i): Кольцо $\mathfrak{M}\cdot\bar{\mathfrak{L}}'$ ($\subset \mathfrak{M}$) чисто бесконечно. Поскольку $\mathcal{G}$ неизмерима, согласно леммам 4.3.2 и 4.3.3 имеет место альтернатива (а) леммы 4.3.2. Но, если учесть (ii) леммы 3.7.3 и определение 2.2.1, это означает, что $\bar{\mathfrak{L}}$ чисто бесконечно.

Далее, согласно (i) леммы 3.7.3 $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}\cdot\bar{\mathfrak{L}}'$, значит, мы доказали, что $\mathfrak{M}\cdot\bar{\mathfrak{L}}'$ чисто бесконечно.

Усл. (ii): Для любого конечного проектора $\bar{F}$ ($\in \mathfrak{M}$) из $\bar{F}^{|\bar{E}_1|\bar{E}_2|\ldots} = 0$ следует, что $\bar{F} = 0$. Пусть задан $\bar{F}$, удовлетворяющий нашим предположениям. Положим $\bar{F} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$, $\bar{F}^{|\bar{E}_1|\bar{E}_2|\ldots} \approx \{\chi_\gamma^*(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$. Тогда из $\bar{F}^{|\bar{E}_1|\bar{E}_2|\ldots} = 0$ следует $\chi_1^*(x) \equiv \equiv 0$. (Все соотношения, включающие x, должны пониматься как истинные всюду, кроме множества с μ-мерой 0). Согласно лемме 4.3.4. $\chi_1(x) \equiv \chi_1^*(x)$, следовательно, $\chi_1(x) \equiv 0$. Будучи проектором, $\bar{F}$ положительно определен. Значит, согласно (iii) леммы 3.7.2 из $\chi_1(x) \equiv 0$ следует, что $\bar{F} = 0$.

Доказательство закончено.

Мы можем подытожить полученные результаты следующим образом.

Теорема IX. *Для таких же, как и в теореме* VIII, S, Γ, μ *образуем* $\mathfrak{H}_S$, $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$ *и* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, *описанные там же. Тогда если $\mathcal{G}$ измерима* (*см. определение* 3.3.6), *то факторы* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ *принадлежат классам* (I) *и* (II). *Точное определение их классов приведено в* [1, *с.* 204, *лемма* 13.1.1 *и с.* 206, *лемма* 13.2.1]. (*См. также конец нашего п.* 4.2.) *Если $\mathcal{G}$ неизмерима, то факторы* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ *принадлежат классу* (III) (*т. е.* (III_∞)).

Доказательство. Нам достаточно рассмотреть только $\mathfrak{M}$, поскольку автоморфизм $\mathcal{F} \rightleftarrows \bar{W}\mathcal{F}$ пространства $\mathfrak{H}_S^{\mathcal{G}}$ (см. теорему VIII) распространит наши результаты с $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'$.

Наши результаты, относящиеся к случаю измеримой $\mathcal{G}$, следуют из следствия к лемме 4.2.2 и обсуждения, которым завершается п. 4.2. Результаты, относящиеся к неизмеримым $\mathcal{G}$, следуют из леммы 4.3.5.

4.4. Примеры S, Γ, μ и $\mathscr{G}$, которые требуются в теоремах VIII и IX для получения классов (I)—(II), т. е. свободных измеримых и эргодических групп $\mathscr{G}$, были приведены в [1, с. 206—208, лемма 13.2.1], а также в конкретных примерах (α)—(γ). Поэтому нам остается сделать еще только одно: привести примеры S, Γ, μ и $\mathscr{G}$, которые требуются, чтобы согласно теоремам VIII—IX получить факторы класса (III_∞), т. е. примеры свободных эргодических, но неизмеримых групп $\mathscr{G}$.

Один класс таких примеров был упомянут во введении, п. 4, но мы не будем исследовать его здесь. Наши примеры будут основаны на следующей лемме.

Лемма 4.4.1. *Пусть S, Γ, μ и $\mathscr{G}$ такие, как описано в теореме* VIII. *Обозначим через $\mathscr{G}_0$ множество таких $\alpha \in \mathscr{G}$, для которых всегда $\mu(M) = \mu(M\alpha)$, $\mathscr{G}_0$ является подгруппой $\mathscr{G}$ и вместе с $\mathscr{G}$ свободной S, Γ, μ-группой. Она также измерима с μ, играющей роль ν.* (*См. определения* 3.3.3, 3.3.4 *и* 3.3.6.) *Предположим теперь, что*

(i) *$\mathscr{G}_0$ эргодична* (*см. определение* 3.3.5);

(ii) *$\mathscr{G}_0 \neq \mathscr{G}$. Тогда $\mathscr{G}$ неизмерима.*

Доказательство. Определения, на которые делаются ссылки при формулировке леммы, показывают, что все утверждения относительно $\mathscr{G}_0$, предшествующие (i) и (ii), очевидны.

Предположим теперь (i), (ii) и, per absurdum, измеримость $\mathscr{G}$. Рассмотрим меру ν из определения 3.3.6 для $\mathscr{G}$. Очевидно, эта мера подходит и для $\mathscr{G}_0$. Таким образом, для $\mathscr{G}_0$ подходят обе меры — μ и ν. Согласно (i) $\mathscr{G}_0$ эргодична, поэтому к $\mathscr{G}_0$ (в качестве $\mathscr{G}$) можно применить лемму 3.3.4, которая дает $\mu(M) = a\nu(M)$ с некоторой константой $a > 0$. Поскольку согласно определению ν мы имеем $\nu(M) = \nu(M\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathscr{G}$, то и $\mu(M) = \mu(M\alpha)$, т. е. $\alpha \in \mathscr{G}_0$. Таким образом, $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}$, что противоречит (ii).

Доказательство закончено.

Теперь мы можем привести конкретные примеры.

Пример (α). Пусть S — множество всех вещественных чисел, Γ — система всех борелевских множеств в S (в обычном смысле), а μ — обычная мера Лебега (на борелевских множествах). Рассмотрим следующие взаимно однозначные отображения S на себя:

$$\alpha_1(\rho, \sigma): x \rightleftarrows \rho x + \sigma, \qquad \rho, \sigma \text{ рациональны}, \qquad \rho > 0. \tag{132}$$

Эти отображения $\alpha_1(\rho, \sigma)$, очевидно, образуют счетную бесконечную группу. Обозначим ее через $\mathscr{G}$. Легко видеть, что $\mathscr{G}$ является S, Γ, μ-группой, и притом свободной.

Для $\alpha = \alpha_1(\rho, \sigma)$, очевидно, имеем $\mu(M\alpha) = \rho\mu(M)$, следовательно, множество $\mathscr{G}_0$ всех таких $\alpha \in \mathscr{G}$, для которых $\mu(M\alpha) = \mu(M)$ состоит из всех $\alpha = \alpha_1(\rho, \sigma)$ с $\rho = 1$. Таким образом, $\mathscr{G}_0 \neq \mathscr{G}$.

$\mathscr{G}_0$ тоже является S, Γ, μ-группой, и согласно лемме 13.2.1 на с. 206 и примеру (β) на с. 208 в [1] эргодична. Тогда и $\mathscr{G}$ a fortiori эргодична.

Итак, S, Γ, μ и $\mathscr{G}$ удовлетворяют условиям теорем VIII и IX, а $\mathscr{G}_0$ удовлетворяет условиям леммы 4.4.1. Следовательно, $\mathscr{G}$ неизмерима.

Отметим, что в данном случае $\mu(S) = \infty$.

Пример (β). Пусть S — множество всех комплексных чисел z с $|z| = 1$, Γ — система всех борелевских подмножеств S (в обычном смысле). Пусть μ — обычная мера Лебега, возникающая на S в результате отображения $z = e^{2\pi i \varphi}$ на

S множества вещественных чисел $\varphi \geqslant 0, < 1$, которое может быть (а в дальнейшем и будет) отождествлено со множеством всех вещественных чисел, рассматриваемых (mod 1).

Рассмотрим следующие взаимно однозначные отображения на себя:

$$\alpha_2(\theta, u): z \rightleftarrows \theta \frac{z+u}{1+\bar{u}z}, \qquad |\theta| = 1, \quad |u| < 1. \tag{133}$$

Эти $\alpha_2(\theta, u)$, очевидно, образуют непрерывную группу. Обозначим ее через $\bar{\mathcal{G}}$[13]. Рассмотрим такие элементы $\bar{\mathcal{G}}$: $\alpha = \alpha_2(\theta, u)$ с $\theta = e^{2\pi i \rho}$, ρ рационально, а $u = 0$, а также элемент с $\theta = 1$, $u = 1/2$. Они образуют счетное множество, а следовательно, порождают счетную бесконечную подгруппу в $\bar{\mathcal{G}}$. Эту подгруппу мы и выберем в качестве $\mathcal{G}$.

При композиции двух $\alpha = \alpha_2(\theta, u)$ из (133) их θ просто перемножаются. Значит, θ всех $\alpha = \alpha_2(\theta, u) \in \mathcal{G}$ получаются как произведения θ тех элементов $\alpha = \alpha_2(\theta, u)$, с которых мы начали, т. е. $\theta = e^{2\pi i \rho}$ с рациональными ρ. Поэтому мы имеем

$$\alpha = \alpha_2(\theta, 0) \in \mathcal{G}, \qquad \text{если и только если } \theta = e^{2\pi i \rho}, \quad \rho \text{ рационально.} \tag{134}$$

Легко проверить, что $\mathcal{G}$ является свободной S, Γ, μ-группой.

Теперь мы вычислим $\mathcal{G}_0$; $\alpha \in \mathcal{G}_0$ означает, что $\mu(M\alpha) = \mu(M)$. Поскольку $\alpha = \alpha_2(\theta, u)$ отображает дуги на дуги, наше требование означает, что оно сохраняет их длины, т. е. является поворотом или отражением. Иначе говоря,

$$\alpha: z \rightleftarrows \theta z \qquad \text{или} \qquad z \rightleftarrows \theta \frac{1}{z}, \quad |\theta| = 1.$$

(133) исключает вторую альтернативу, а первая означает, что $u = 0$ для $\alpha = \alpha_2(\theta, u)$. Значит, $\mathcal{G}_0$ характеризуется свойством $u = 0$, а следовательно, (134). При этом $\mathcal{G} \neq \mathcal{G}_0$, ибо $\alpha = \alpha_2(1, 1/2) \in \mathcal{G}$, но не $\in \mathcal{G}_0$.

Теперь при помощи $z = e^{2\pi i \varphi}$ отобразим S на φ-множество S_1 (см. выше). При этом отображения из $\mathcal{G}_0$ переходят из $z \rightleftarrows e^{2\pi i \rho} z$ (в (134)) в $\varphi \rightleftarrows \varphi + \rho$ с рациональными ρ. Это доказывает эргодичность $\mathcal{G}_0$ (в S_1, а значит, и в S). согласно лемме 13.2.1 на с. 206 в [1] и примеру (β) на с. 208 там же. Значит, $\mathcal{G}$ a fortiori эргодична.

Итак, S, Γ, μ и $\mathcal{G}$ удовлетворяют всем требованиям теорем VIII и IX, а $\mathcal{G}_0$ удовлетворяет требованиям леммы 4.4.1. Следовательно, $\mathcal{G}$ неизмерима.

Отметим, что в этом случае $\mu(S) = 1$.

Помимо установления существования факторов $\mathfrak{M}$ класса (III_∞), приведенные выше примеры могут быть использованы для установления всех существующих типов факторизаций $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$. Для того чтобы это сделать, нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4.4.2. *Рассмотрим S, Γ, μ, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_0$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ из леммы 4.4.1. Каждый $\bar{A} \in \mathfrak{M}'$ имеет вид $\bar{A} \approx \{\chi_\gamma(x);\ \gamma \in \mathcal{G}\}$; рассмотрим те из них, у которых $\chi_\gamma(x) \equiv 0$ как только $\gamma \notin \mathcal{G}_0$. Обозначим их множество через $\mathfrak{N}$. Тогда*

(i) *$\mathfrak{N}$ — кольцо*

[13] $\bar{\mathcal{G}}$ играет хорошо известную и важную роль в теории конформных отображений.

(ii) $\mathfrak{M}'\cdot\mathfrak{N}'$ — (aI) (*a пробегает все комплексные числа*).

(iii) $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — *факторизация, но* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *не являются парными факторами.* (*См.* [1, с. 138, определение 3.1.3].)

(iv) *Фактор* $\mathfrak{N}$ *принадлежит классу* (II_1) *или* (II_∞) *в соответствии с тем, конечна или бесконечна мера* $\mu(S)$.

Доказательство. (i); (ii): Буквально такое же, как доказательство леммы 13.4.1 на с. 208—209 в [1].

(iii): Буквально такое же, как доказательство леммы 13.4.2 на с. 209 в [1].

(iv): Пусть $\bar{A}\in\mathfrak{N}$ и положительно определен, тогда мы имеем также $\bar{A}\in\mathfrak{M}$, $\bar{A}\approx\{\chi_\gamma(x);\ \gamma\in\mathcal{G}\}$ (но $\chi_\gamma(x)\equiv 0$ при $\gamma\notin\mathcal{G}_0$!) и можем определить $T^0(\bar{A}) = \int_S \chi_1(x)\,d_\mu x$. При этом к $\mathfrak{N}$ могут быть дословно приложены рассуждения лемм 4.2.1 и 4.2.2 (поскольку для $\alpha\in\mathcal{G}_0$ всегда $\mu(M)=\mu(M\alpha)$, а для всех остальных $\alpha\in\mathcal{G}$ мы имеем $\chi_\alpha(x)\equiv 0$). Следовательно, $D_{\mathfrak{N}}(\bar{E}) = T^0(\bar{E})$ для всех проекторов $\bar{E}\in\mathfrak{N}$. Поэтому, как и в следствии к лемме 4.2.2, мы видим, что $\mathfrak{N}$ принадлежит классам (I) или (II).

Если $\mathfrak{N}$ принадлежит классу (I), то согласно лемме 11.2.2 из [1, с. 184] $\mathfrak{N}'$ — нормальный фактор, а значит, по лемме 11,1.2 на с. 183 в [1], $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ образуют парную факторизацию. Это противоречит (iii) выше, значит, $\mathfrak{N}$ принадлежит классу (II).

Далее, $D_{\mathfrak{N}}(I) = T^0(I) = \int_S 1\cdot d_\mu x = \mu(S)$, следовательно, $\mathfrak{N}$ принадлежит классу (II_1) или (II_∞) в соответствии с тем, конечна или бесконечна мера $\mu(S)$.

Возвращаясь к приведенным выше примерам (α) и (β), мы видим, что из леммы 4.4.2 следует существование не парных факторизаций классов (II_∞), (III_∞) и (II_1), (III_∞). Отсюда следует, что для не парных факторизаций не справедлив аналог теоремы X на с. 182 в [1] (которая доказана для парных факторизаций). В самом деле, единственным ограничением на не парные факторизации служит то, что ни один из факторов не может быть класса (I) (согласно [1, с. 183—184, леммы 11.1.2 и 11.2.2], см. доказательство (iv) леммы 4.4.2 выше). Мы можем также доказать существование не парной факторизации класса (III_∞), (III_∞), но не будем останавливаться на этом сейчас.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Murray F. J., Neumann J. von.* On rings of operators.— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 116—229. (Рус. пер. см. наст. кн.)
2. *Murray F. J., Neumann J. von.* On rings of operators II.—Trans. Amer. Math. Soc., 1937, vol. 41, p. 208—248. (Рус. пер. см. наст. кн.)
3. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space.- Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1932, vol. 15.
4. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 49—131.
5. *Neumann J. von.* Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 370—427.
6. *Neumann J. von.* Über Funktionen von Funktionaloperatoren.— Ann. Math., 1931, vol. 32, p. 191 — 226.
7. *Neumann J. von.* On infinite direct products.— Compos. math., 1938, bd. 6, blz. 1—77. (Рус. пер. см. наст. изд., т. 1).
8. *Hausdorff F.* Mengenlehre. 3. Aufl. B.: W. de Gruyter, 1935.

О КОЛЬЦАХ ОПЕРАТОРОВ IV*

1. Цель этой статьи состоит в изучении свойств колец операторов, являющихся факторами. Эти кольца были основным объектом рассмотрения в нескольких предыдущих публикациях авторов (см. [5, 6, 8]; по поводу детальных определений, и в частности по поводу тех факторов, о которых пойдет речь далее, см. [5, с. 138, определение 3.1.2, с. 172, теорема VIII]). Дискретный случай, т. е. факторы типа (I), был исчерпывающе разобран ранее (см. [5, с. 173, лемма 8.6.1, с. 139, определения 3.2.1 и 3.2.2 и леммы 3.2.1—3.2.3]). Чисто бесконечный случай, т. е. факторы типа (III), наиболее сложен, и по крайней мере в настоящее время едва ли возможно исследовать его** (в работе [8] рассматриваются главным образом именно эти факторы). Таким образом, остается непрерывный случай, т. е. факторы типа (II), и исследование факторов этого типа представляет основную цель данной статьи.

Дополнительным аргументом в пользу такой программы служит то обстоятельство, что среди всех факторов конечно-непрерывные, т. е. факторы типа (II_1), представляют наибольший непосредственный интерес (см. [5, часть V] и [6, глава IV и приложение I]).

В дальнейшем будет видно, однако, что в наши рассмотрения с минимумом дополнительных усилий включаются и дискретные факторы. Поэтому фактически мы будем иметь дело с факторами всех типов, кроме чисто бесконечных.

Для дискретного и непрерывного случаев важнейшими являются конечные факторы, т. е. факторы типа (I_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ и (II_1), поскольку бесконечные факторы, т. е. соответственно факторы типов (I_∞) и (II_∞), могут быть описаны через конечные (см. теорему IX и лемму 3.1.6). В связи с этим основные усилия мы направим на исследование конечных факторов. Поскольку дискретные факторы (типа (I_n) $n = 1, 2, \ldots$) являются кольцами матриц конечного порядка, то это означает, что в дальнейшем главным образом будут рассматриваться конечно-непрерывные факторы типа (II_1).

2. Сформулируем теперь более точно основные проблемы. Рассмотрим какое-нибудь, содержащее 1, кольцо операторов **M** в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (пока мы не налагаем никаких других ограничений; по поводу основных определений см. работу [2, с. 388—389, определения 1—3]). Существует два способа обращения с кольцом **M**. При первом из них мы рассматриваем **M** как множество с 1 (единичный оператор) и операциями αA (α — произвольное комплексное число), A^*, $A + B$, $A \cdot B$ и рассматриваем только операторы, принадлежащие **M**. При втором в рассмотрение включаются и другие объекты, такие, как операторы, не принадлежащие **M**, элементы пространства $\mathfrak{H}$ и т. д. Первый подход к описанию кольца **M** является чисто алгебраическим, второй — нет, и второй подход мы будем часто называть пространственным.

---

* Ann. Math., 1943, vol. 44, p. 716—808.

** См. коммент. I наст. кн.— *Примеч. ред.*

Оба подхода уже рассматривались ранее вторым автором в работе [9]. Здесь уместно переформулировать различие подходов в терминах изоморфизмов.

Пусть для $i = 1, 2$ заданы гильбертовы пространства $\mathfrak{H}_i$ и кольца операторов $\mathbf{M}_i$ в $\mathfrak{H}_i$. Определим:

A) пространственный изоморфизм колец $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ — это такой изоморфизм пространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ (т. е. взаимно однозначное линейное изометрическое отображение), при котором $\mathbf{M}_1$ переходит в $\mathbf{M}_2$;

B) алгебраический изоморфизм колец $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ — это сохраняющее единицу и инвариантное относительно операций αA (α — произвольное комплексное число), A^*, $A + B$, $A \cdot B$ взаимно однозначное отображение $\mathbf{M}_1$ в $\mathbf{M}_2$ (см. также [5, с. 145, § 5.2, в частности определение 5.2.1]; мы добавили здесь требование инвариантности единицы).

Любое пространственное свойство связано с инвариантностью колец относительно *пространственного изоморфизма* A, в то время как чисто алгебраические свойства характеризуются инвариантностью относительно *алгебраического изоморфизма* B.

Очевидно, что из изоморфизма A следует изоморфизм B, но обратное необязательно справедливо.

Важным теоретико-кольцевым понятием является понятие кольца $\mathbf{M}'$ (см. [2, с. 388, определение 3]; по поводу пространственного характера этого кольца см. подробное обсуждение ниже, в п. 3.3). Напротив, свойство кольца быть фактором, т. е. равенство $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' = (\alpha \cdot 1)$ (см. § 3 цитированной статьи, а также начало п. 1 данной статьи), является чисто алгебраическим, поскольку оно утверждает, что операторы вида $\alpha \cdot 1$ исчерпывают центр кольца $\mathbf{M}$ (см. [5, с. 138, определение 3.1.2]).

Наша программа распадается на две части следующим образом.

Вопрос I. Когда имеет место изоморфизм B?

Вопрос II. При каких дополнительных условиях из изоморфизма B следует изоморфизм A?

В одном специальном случае вопрос II уже исследовался в работе [6]. Там было показано, что при некоторых условиях изоморфизмы A и B эквивалентны (см. [6, с. 244, теорема XI]). Полный ответ на вопрос II будет получен в теореме X данной статьи.

Вопрос I является более трудным. Он совпадает с шестой проблемой работы [5, с. 172], и настоящая работа отражает прогресс, который был достигнут авторами в его решении. Основные результаты здесь следующие: будет указан обширный класс факторов типа (II_1), изоморфных друг другу в смысле изоморфизма B. Эти факторы называются «аппроксимативно конечными» (см. ниже теоремы XII и XIV, основанные на определениях 4.1.1, 4.3.1, 4.5.2 и 4.6.1). Отметим, что в этом классе содержатся и изоморфизмы, анонсированные в работе [5, с. 229, п. (V)]. С другой стороны, будут построены некоторые факторы типа (II_1), неизоморфные аппроксимативно конечным факторам (см. теоремы XVI, XVI′).

3. Существуют некоторые аргументы в пользу того, что аппроксимативно конечные факторы являются простейшими факторами типа (II_1), однако эти аргументы не вполне окончательны. Имеет место тот факт, что каждый фактор типа (II_1) содержит аппроксимативно конечное подкольцо, однако эта «теорема вложения» не решает проблемы, поскольку аналог «теоремы об эквивалентности»

Кантора—Бернштейна в данном случае несправедлив: возможны два фактора типа (II_1), каждый из которых изоморфен некоторому подкольцу другого фактора но между собой они неизоморфны (пример дан в Приложении). Поэтому существует возможность, что любой фактор типа (II_1) изоморфен некоторому подкольцу любого другого такого же фактора.

4. Лучшее, что мы можем в настоящее время сделать в проблеме изоморфизма факторов типа (II_1),— это несколько выйти по сравнению с п. 5.2, 5.6 за границы аппроксимативно конечных факторов. Существование не аппроксимативно конечных факторов устанавливается в этом случае теоремами XVI, XVI′, где строятся некоторые алгебраические инварианты факторов типа (II) (см. (1), (2) в п. 4.6. и свойство Г в определении 6.1.1.). Из этих трех инвариантов первые два имеют большее общее значение, однако последний до сих пор оказывался практически более полезным (см. замечание в начале п. 6.1).

Вопросы, связанные с изоморфизмом факторов типа (II_∞), сводятся к соответствующим вопросам для факторов типа (II_1) (это следует из теоремы IX). Для дискретных факторов (типа (I)) проблема изоморфизма была изучена ранее (см. замечание выше, в начале п.1, а также п. α теоремы IX).

Указанный перечень вопросов исчерпывает нашу программу. Она дает ответы на проблемы 6, 7 работы [5, с. 172 и 229, (V)] на том уровне, который достигнут к настоящему времени.

5. Добавим к сказанному, что в п. 5.3 используется новая техника построения факторов типа (II_1). Она представляется значительно более простой, чем использовавшиеся ранее процедуры, однако тесно с ними связана (см. п. 5.4, 5.5). Эта техника проливает также некоторый свет на значение данной работы с точки зрения теории унитарных представлений групп (см. замечания после леммы 5.3.4). Здесь, вероятно, возможны и важны дальнейшие обобщения (см. замечание в конце п. 5.6)

Результат теоремы XVI′ о том, что не все факторы типа (II_1) изоморфны друг другу, заслуживает некоторых комментариев. С точки зрения построения данной статьи казалось, что лучше поместить его в конце работы. Этот результат, однако, понятен и интересен сам по себе и независим от большей части работы. Читатель, интересующийся им в первую очередь, должен прочесть только п. 5.3, определение 6.1.1 и леммы 6.1.1, 6.2.1, 6.2.2. Остальная часть работы, в частности обширные теории алгебраических и пространственных типов, аппроксимативная конечность и ее различные эквивалентные формулировки, для этого не нужны, Впрочем, мы тем не менее думаем, что знакомство со всей статьей позволит увидеть его в соответствующей перспективе.

6. Обозначения, используемые в статье, те же, что и в статьях, которые указаны в библиографии, особенно в статьях [5, 6].

Мы используем символ Кронекера—Вейерштрасса в общепринятом смысле:

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{для } a = b, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.
1. Цель статьи.
2. Алгебраические и пространственные изоморфизмы. Вопросы I, II.
3. Аппроксимативная конечность. Вложение.
4. Основные результаты.
5. Роль новых примеров.
6. Обозначения.

Глава I. Метрика в $\mathbf{M}$. Чисто алгебраический характер некоторых понятий.
1.1. Чисто алгебраические концепции. Трудности. Операторные топологии. Подкольца.
1.2. Характер $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}$ (A), $[[A]]$, Метрическое и ограниченно метрическое замыкания. Линейные множества. Алгебры.
1.3. Ограниченно метрическая сходимость и сильная сходимость.
1.4. Метрические замыкания и сильное замыкание.
1.5. Продолжение обсуждения замыкания.
1.6. Окончание обсуждения замыкания.
Теорема I. Эквивалентность различных замыканий.
Теорема II. Подкольца — чисто алгебраические понятия.

Глава II. Алгебраический тип и его операции. Фундаментальная группа.
2.1. Алгебраический тип $\overline{\mathbf{M}}$. Обсуждение.
2.2. Двойственные изоморфизмы. $\overline{\mathbf{M}}'$ и $\overline{\mathbf{M}}'$.
2.3. Их свойства. $\overline{\mathbf{M}}^c = \overline{\mathbf{M}}' = \overline{\mathbf{M}}'$. Теорема III. Свойства $\overline{\mathbf{M}}^c$.
2.4. p-Матричные изоморфизмы. Построение $\overline{\mathbf{M}}^p$. Теорема IV. Свойства $\overline{\mathbf{M}}^p$.
2.5. Однозначность $\overline{\mathbf{M}}^\infty$. Теорема IV′. Однозначность $\overline{\mathbf{M}}^\infty$.
2.6. Обращение $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^p$. Существование $\overline{\mathbf{M}}^{1/p}$. Теорема V. Обращение $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^p$.
2.7. Операция $\overline{\mathbf{N}}^p$ и факторный характер, тип, конечность.
2.8. Операция $\overline{\mathbf{M}}^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и ее свойства. Теорема VI. Свойства $\overline{\mathbf{M}}^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.
2.9. Операция $\overline{\mathbf{M}}^\theta$ (θ произвольное) и ее свойства. Теорема VII. Свойства $\overline{\mathbf{M}}^\theta$ (θ произвольное).
2.10. Фундаментальная группа $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{M}})$. Частные случаи. Теорема VIII. Свойства $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{M}})$.

Глава III. Описание всех пространственных типов в терминах алгебраических типов.
3.1. Соизмеримость. Род $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$.
3.2. Элементарные свойства рода. Род и фундаментальная группа.
3.3. Пространственный тип $\dot{\mathbf{M}}$. Число $\theta = (1/c)\,(D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{H})/D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}))$. Описание $\dddot{\mathbf{M}}$ в терминах $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}}'$ и θ. Точная связь между $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}}'$ и θ. Теорема X, $\dddot{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}}'$ и θ.

Глава IV. Аппроксимативная конечность.
4.1. Аппроксимативная конечность типа $[p_1, p_2, \ldots]$. Теорема XI. Первая теорема об изоморфизме.
4.2. Дальнейшие аппроксимационные результаты.
4.3. Аппроксимативная конечность (A).
4.4. Сравнение (A) и типа $[p_1, p_2, \ldots]$.
4.5. Аппроксимативная конечность (B). Структура конечных колец.
4.6. Аппроксимативная конечность (C). Результаты об эквивалентности. Теорема XII. Теорема об эквивалентности.
4.7. Результаты, связанные с существованием. Теорема XIII. Теорема вложения. Теорема XIV. Окончательный вид теоремы об изоморфизме.
4.8. Операции $\overline{\mathbf{M}}^c$ и $\overline{\mathbf{M}}^\theta$ в сочетании с аппроксимативной конечностью. Соответствующие инварианты. Теорема XV. $\overline{\mathbf{A}}^c = \overline{\mathbf{A}}$, $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{A}}) = P$.

Глава V. Обсуждение различных примеров.
5.1. Общие замечания о примерах.
5.2. Аппроксимативная конечность некоторых прежних примеров.

5.3. Построение новых примеров.
5.4. Первая связь между двумя типами примеров.
5.5. Вторая связь между двумя типами примеров.
5.6. Аппроксимативная конечность новых примеров.
Глава VI. Не аппроксимативно конечные факторы.
6.1. Свойство Г и аппроксимативная конечность.
6.2. Существование не аппроксимативно конечных факторов. Теорема XVI. Теорема существования. Теорема XVI'. Существование нескольких алгебраических типов в случае (II_1).
6.3. Обсуждение дальнейших примеров.
Приложение. Пример двух неизоморфных факторов типа (II_1), каждый из которых изоморфен подкольцу другого. Теорема A. Результат о несравнимости.
Литература.

Глава I

МЕТРИКА В M. ЧИСТО АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ХАРАКТЕР НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЙ

1.1. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и кольцо операторов **M** в нем. Из п. 2 введения, так же как и из работы [9], мы знаем, что чисто алгебраический характер некоторых объектов, связанных с **M**, не только неочевиден, но и несправедлив.

В работе [9] было показано, однако, что чисто алгебраическую природу имеют следующие свойства: положительная определенность элемента $A \in \mathbf{M}$, численное значение $|||A|||$ нормы $A \in \mathbf{M}$, сходимость в смысле сильной и слабой операторных топологий (сходимость в смысле сильнейшей топологии эквивалентна сходимости в смысле сильной топологии, см. [4, с. 112, § 2]).

Для самих операторных топологий (для сильнейшей, сильной и слабой) их алгебраический характер мы не устанавливали (по поводу определений см. [4, с. 111, § 2] и [2, с. 381—382]). Равномерная топология (см. [2, с. 384—386]) в этом смысле не вызывает трудностей, поскольку $|||A|||$ имеет чисто алгебраическую природу, что, впрочем, не будет играть никакой роли в наших рассмотрениях (см. работы [4, с. 112, начало § 3] и [2, с. 396, конец § 3, с. 388, определение 1]; лучше смотреть именно в таком, обратном, порядке), так как понятие подкольца кольца **M** должно основываться на одной из указанных выше операторных топологий. Они не могут быть заменены ни понятиями сходимости, ни равномерной топологией (см., в частности, работу [2, с. 382—384]). При этом понятие подкольца должно быть чисто алгебраическим.

Для наших настоящих целей нам достаточно разрешить эти проблемы для некоторого ограниченного класса колец **M**, и это мы сейчас и сделаем.

1.2. Заметим вначале, что чисто алгебраическими являются следующие понятия: факторный характер кольца и тип, к которому кольцо **M** принадлежит; численное значение функции относительной размерности $D_{\mathbf{M}}(E)$ (E — произвольный проектор, который принадлежит **M**) независимо от ее нормировки и даже стандартная нормировка в случае, когда она определена; наконец, для конечных типов численное значение относительного следа $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ ($A \in \mathbf{M}$).

Все эти утверждения были установлены в работах [5, с. 145, лемма 5.2.1, с. 173, теорема IX] и [6, с. 219, свойство IV] (поскольку это свойство является чисто алгебраическим).

Предположим теперь, что **M** есть фактор конечного типа [1]. Мы будем использовать функцию относительной размерности $D_{\mathbf{M}}(E)$, и нам будет удобно не нормировать ее. Мы будем также использовать относительный след с его обычными свойствами. Для каждого $A \in \mathbf{M}$ определим

$$[[A]] = \sqrt{\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A^*A)} = \sqrt{\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(AA^*)} \qquad (1.2.\alpha)$$

(см. работу [6, с. 241, лемма 4.3.2], а также несколько более общие, хотя и близкие, рассмотрения работы [8, с. 102, определение 1.3.1 и теорема II]). Ввиду приведенных выше замечаний численное значение $[[A]]$ также является чисто алгебраическим понятием.

По теореме III работы [6, с. 235] существует некоторая фиксированная конечная система элементов $g_1, \ldots, g_m \in \mathfrak{H}$ (зависящая лишь от **M**), такая, что для всех $A \in \mathbf{M}$

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = \sum_{i=1}^{m} (Ag_i, g_i). \qquad (1.2.\beta)$$

Комбинируя соотношения (1.2.α) и (1.2.β) и вспоминая, что $(A^*Ag, g) = \| Ag \|^2$, $(AA^*g, g) = \| A^*g \|^2$, мы получаем

$$[[A]] = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \| Ag_i \|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \| A^*g_i \|^2}. \qquad (1.2.\gamma)$$

Эта формула является полезной для многих вопросов, хотя она и несколько затемняет алгебраический характер $[[A]]$.

Величина $[[A]]$ имеет все свойства *нормы* в линейном пространстве и соответственно $[[A-B]]$ — все свойства *расстояния* (по поводу этих и некоторых дальнейших свойств см. работу [6, с. 242, свойство II^0]; в отличие от цитированной работы отмеченные свойства необходимы нам лишь для кольца **M**, но не для его расширения $Q(\mathbf{M})$; эти свойства можно получить из представления (1.2.γ) — решающего для обоих свойств.

Таким образом, **M** становится топологическим пространством с чисто алгебраической метрикой [2].

Дадим теперь следующее определение.

Определение 1.2.1. *Последовательность $A_1, A_2, \ldots \in \mathbf{M}$ метрически сходится к $A \in \mathbf{M}$, если $\lim_{\nu\to\infty} [[A_\nu - A]] = 0$. Она ограниченно метрически сходится к $A \in \mathbf{M}$, если $\lim_{\nu\to\infty} [[A_\nu - A]] = 0$ и (числовая) последовательность $|||A_1|||$, $|||A_2|||, \ldots$ ограничена.*

Понятия замыкания, индуцированные этими двумя понятиями сходимости, есть «метрическое замыкание» и «ограниченно метрическое замыкание» множества $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$[3].

---

[1] Конечный тип имеют либо факторы типа (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, либо факторы типа (II_1). Включение в рассмотрение факторов первого типа не является необходимым, поскольку основной интерес для нас представляют факторы типа (II_1). Однако характерно, что эти рассуждения справедливы для всех факторов конечного типа.

[2] Равномерная топология, уже упоминавшаяся в п. 1.1, имеет, в сущности, тот же самый характер: $|||A|||$ и $|||A-B|||$ образуют соответственно норму и метрику, так же как $[[A]]$ и $[[A-B]]$. Однако в теории операторных колец используются лишь последние величины. Это обстоятельство объясняется их связью с понятием сильной топологии, что будет видно далее в п. 1.4, 1.5.

[3] Понятие метрического замыкания является обычным топологическим понятием, основанным на указанной метрике. Понятие ограниченно метрического замыкания таковым не является.

Нам понадобится также

Определение 1.2.2. *Множество* $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$ *линейно, если из* A, $B \in \mathbf{S}$ *следует, что* αA, $A + B \in \mathbf{S}$. *Это множество является алгеброй, если из* A, $B \in \mathbf{S}$ *следует, что* αA, A^*, $A + B$, $AB \in \mathbf{S}$.

Оба эти понятия имеют, очевидно, алгебраическую природу.

Любое подкольцо $\mathbf{S}$ кольца $\mathbf{M}$ является замкнутой алгеброй, где замыкание можно понимать в смысле любой из трех операторных топологий: сильнейшей, сильной или слабой (см. конец п. 1.1). Мы установим чисто алгебраический характер понятия подкольца, доказав эквивалентность замыкания в смысле всех этих топологий алгебраическим замыканиям определения 1.2.1 в том случае, когда множество $\mathbf{S}$ является алгеброй [4]

1.3. Отметим вначале следующее утверждение:

Лемма 1.3.1. *Элементы* $A'g_i$ $(i = 1, \dots, m,\ A' \in \mathbf{M}')$, *где* $g_1, \dots, g_m$ — *те же, что и в соотношениях* (1.2.β) *и* (1.2.γ), *порождают пространство* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Для фиксированного $i (= 1, \dots, m)$ элементы $A'g_i$, $A' \in \mathbf{M}'$, порождают линейное замкнутое множество $\mathfrak{M}_{g_i}^{\mathbf{M}'}$ (см. [5, с. 143, определение 5.1.1]). Пусть $\mathfrak{N} = [\mathfrak{M}_{g_i}^{\mathbf{M}'},\ i = 1, \dots, m]$. Мы должны доказать, что $\mathfrak{N} = \mathfrak{H}$. Заменим, что $\mathfrak{M}_{g_i}^{\mathbf{M}'} \eta \mathbf{M}$ (см. цитированную статью, лемму 5.1.1). Поэтому $\mathfrak{N} \eta \mathbf{M}$ и $E = P_{\mathfrak{N}} \in \mathbf{M}$. Кроме того, $g_i \in \mathfrak{M}_{g_i}^{\mathbf{M}'} \subset \mathfrak{N}$, следовательно,

$$Eg_i = g_i. \qquad (1.3.\alpha)$$

Соотношение (1.2.γ) показывает, что если $A \in \mathbf{M}$ и $Ag_i = 0$ для $i = 1, \dots, m$, то $A = 0$. Применим это утверждение к $A = 1 - E$. Тогда соотношение (1.3.α) дает, что $1 - E = 0$, $P_{\mathfrak{N}} = E = 1$, что и требовалось показать.

Теперь мы в состоянии доказать следующее утверждение:

Лемма 1.3.2. *Последовательность* $A_1, A_2, \dots \in \mathbf{M}$ *сильно сходится к* $A \in \mathbf{M}$ *тогда и только тогда, когда она ограниченно метрически сходится к этому* A.

Доказательство. *Необходимость*. Предположим, что $A_1, A_2, \dots$ сильно сходится к A. Тогда (числовая) последовательность $|||A_1|||, |||A_2|||, \dots$ ограничена (см. [2, с. 382, примеч. 35]) и $\lim_{\nu\to\infty} [[A_\nu - A]] = 0$ по (1.2.γ). Следовательно, имеет место ограниченно метрическая сходимость.

Достаточность. Предположим, что $A_1, A_2, \dots$ ограниченно метрически сходятся к A. Мы должны доказать, что они сходятся также и сильно, т. е. что множество $\mathfrak{M}$ тех элементов f, для которых $\lim_{\nu\to\infty} \|(A_\nu - A) f\| = 0$, есть все $\mathfrak{H}$. Ясно, что $\mathfrak{M}$ — линейное пространство. Поскольку (числовая) последовательность $|||A_1|||, |||A_2|||, \dots$ ограничена, то $\mathfrak{M}$ также и замкнуто. Поэтому достаточно доказать, что элементы множества $\mathfrak{M}$ порождают все пространство $\mathfrak{H}$.

Ввиду (1.2.γ) $\|(A_\nu - A) g_i\| \leqslant [[A_\nu - A]]$. Поэтому $\lim_{\nu\to\infty} \|(A_\nu - A) g_i\| = 0$. Следовательно, для любого $A' \in \mathbf{M}'$ $\lim_{\nu\to\infty} \|A'(A_\nu - A) g_i\| = 0$. Но $A'(A_\nu -$

Так, например, совершенно не очевидно, что множество пределов всех ограниченно метрически сходящихся последовательностей из точек данного множества $\mathbf{S}$ является замкнутым в указанном смысле. На самом деле это свойство несправедливо для всех множеств $\mathbf{S}$, хотя и справедливо, как следует из результатов п. 1,5, в том случае, когда множество $\mathbf{S}$ является алгеброй.

[4] Заметим, что для справедливости этого утверждения существенны оба ограничения — и на кольцо $\mathbf{M}$, и на его подмножество $\mathbf{S}$: $\mathbf{M}$ должно быть фактором конечного типа, а $\mathbf{S}$ — алгеброй.

$-A) = (A_\nu - A) A'$, поскольку $A' \in \mathbf{M}'$ и A_ν, $A \in \mathbf{M}$. Отсюда $\lim_{\nu\to\infty} \|(A_\nu - A) A' g_i\|| = 0$, т. е. все $A'g_i \in \mathfrak{M}$. Поэтому по лемме 1.3.1 элементы множества $\mathfrak{M}$ порождают все пространство $\mathfrak{H}$, и доказательство завершено.

Таким образом, замыкание в смысле сильной сходимости эквивалентно ограниченно метрическому замыканию для любого подмножества $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$. Этого факта, однако, еще недостаточно для того, чтобы установить чисто алгебраический характер понятия подкольца, поскольку он включает в себя понятие топологического замыкания, которое не может быть заменено на замыкание по сходимости (см. конец п. 1.1). С этой точки зрения мы фактически вообще не продвинулись вперед, поскольку алгебраический характер понятия сильной сходимости для любого кольца $\mathbf{M}$ был известен уже из работы [9]. Прежде чем мы сможем получить что-нибудь еще, нам необходимо, кроме уже сделанных предположений относительно $\mathbf{M}$, считать, что $\mathbf{S}$ является алгеброй (см. конец п. 1.2).

1.4. Рассмотрим вначале следующие два простых утверждения, справедливых для любого подмножества $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$.

Лемма 1.4.1. *Сильная замкнутость подмножества* $\mathbf{S}$ *влечет за собой его ограниченно метрическую замкнутость.*

Доказательство. Сильная замкнутость $\mathbf{S}$ влечет за собой замкнутость относительно сильной сходимости, а последняя в силу леммы 1.3.2 эквивалентна ограниченно метрической замкнутости.

Лемма 1.4.2 *Метрическая замкнутость подмножества* $\mathbf{S}$ *влечет за собой его сильную замкнутость.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{S}$ метрически замкнуто. Рассмотрим произвольную точку сильной конденсации A подмножества $\mathbf{S}$. Так как $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$ и $\mathbf{M}$ сильно замкнуто, то $A \in \mathbf{M}$.

Для каждого $\nu = 1, 2, \ldots$ выберем некоторый элемент $A_\nu \in \mathbf{S}$, такой, что $\|(A_\nu - A) g_i\| \leqslant 1/\nu$ для $i = 1, \ldots, m$. Это можно сделать потому, что по определению предельной точки в сильной окрестности $U_3(A, g_1, \ldots, g_m;\ 1/\nu)$ точки A должна лежать по крайней мере одна точка $A_\nu \in \mathbf{S}$ (см. [2, с. 381, § 2). Теперь соотношение (1.2.γ) дает, что $[[A_\nu - A]] \leqslant \sqrt{m/\nu}$, и, следовательно, $\lim_{\nu\to\infty} [[A_\nu - A]] = 0$. Таким образом, последовательность $A_1, A_2, \ldots$ метрически сходится к A, и поскольку $\mathbf{S}$ метрически замкнуто, то $A \in \mathbf{S}$. Доказательство завершено.

Если мы теперь сможем доказать,что из ограниченно метрической замкнутости следует метрическая замкнутость, то из приведенных лемм будет следовать, что понятия сильной, метрической и ограниченно метрической замкнутостей эквивалентны. Как отмечалось в конце п. 1.3, это и есть то, что нам нужно. Предположение о том, что $\mathbf{S}$ есть алгебра, будет необходимо именно для вывода указанной импликации.

1.5. В последующем мы неоднократно будем использовать понятие и свойства функций от ограниченных эрмитовых и унитарных операторов [5], и для нас будет удобным не делать специальных ссылок на теорию таких функций.

[5] См., например, [3, с. 205 и 220]. Развитые в работе [3] методы теории операторных функций дают в действительности гораздо больше, чем необходимо для ограниченных целей п. 1.5, поскольку здесь возникают лишь непрерывные (иногда даже полиномиальные) функции от операторов (пункт (i) леммы 1.5.1 может, кроме того, быть доказан с помощью элементарных вычислений). Однако это заняло бы много места, если входить в подобные методологические вопросы систематически.

Лемма 1.5.1. (i) *Если A — ограниченный эрмитов оператор, то оператор $(A - i1)^{-1}$ существует, а*

$$(A + i1)/(A - i1) = (A - i1)^{-1}(A + i1) = (A + i1)(A - i1)^{-1}$$

унитарен.

(ii) *Если операторы A, $B \in \mathbf{M}$ и являются эрмитовыми, то операторы $(A + i1)/(A - i1)$, $(B + i1)/(B - i1) \in \mathbf{M}$ и*

$$\left[\left[\frac{A + i1}{A - i1} - \frac{B + i1}{B - i1}\right]\right] \leqslant 2\,[[A - B]].$$

Доказательство. (i). Рассмотрим две функции

$$f(\lambda) = 1/(\lambda - i), \qquad g(\lambda) = (\lambda + i)/(\lambda - i).$$

Так как они непрерывны при всех вещественных λ, то можно образовать операторы $f(A)$ и $g(A)$. Кроме того,

$$(\lambda - i) f(\lambda) = f(\lambda)(\lambda - i) = 1,$$

$$(\lambda + i) f(\lambda) = f(\lambda)(\lambda + i) = g(\lambda).$$

Поэтому $f(A) = (A - i1)^{-1}$ и $g(A) = (A + i1) f(A) = f(A)(A + i1)$. Таким образом, $g(A) = (A + i1)(A - i1)^{-1} = (A - i1)^{-1}(A + i1)$, или $g(A) = (A + i1)/(A - i1)$ в смысле, указанном выше.

Поскольку $\overline{g(\lambda)}\, g(\lambda) = 1 = g(\lambda)\, \overline{g(\lambda)}$ для всех вещественных значений λ, то $g(A)^* g(A) = 1 = g(A) g(A)^*$, и, следовательно, оператор $g(A)$ унитарен. Таким образом, доказательство пункта (i) завершено. Заметим дополнительно, что поскольку $|f(\lambda)| \leqslant 1$ для всех вещественных значений λ, то $|||\,f(A)\,||| \leqslant 1$, или

$$|||\,(A - i1)^{-1}\,||| \leqslant 1. \tag{1.5.α}$$

(ii). Поскольку $A, B \in \mathbf{M}$, то и $g(A)$, $g(B) \in \mathbf{M}$, или $(A + i1)/(A - i1)$, $(B + i1)/(B - i1) \in \mathbf{M}$.

Имеем, далее,

$$(A + i1)/(A - i1) - (B + i1)/(B - i1) = (A - i1)^{-1}(A + i1) -$$

$$- (B + i1)(B - i1)^{-1} = (A - i1)^{-1}\{(A + i1)(B - i1) - (A - i1)(B + i1)\} \times$$

$$\times (B - i1)^{-1} = -2i\,(A - i1)^{-1}(A - B)(B - i1)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\left[\left[\frac{A + i1}{A - i1} - \frac{B + i1}{B - i1}\right]\right] \leqslant 2\,|||\,(A - i1)^{-1}\,|||\,[[A - B]]\,|||\,(B - i1)^{-1}\,|||$$

и по (1.5.α)

$$\left[\left[\frac{A + i1}{A - i1} - \frac{B + i1}{B - i1}\right]\right] \leqslant 2\,[[A - B]].$$

Лемма 1.5.2. *Пусть задана некоторая функция $\varphi(\xi)$, определенная и непрерывная при всех ξ с $|\xi| = 1$. Тогда существует функция $\omega_1(\varepsilon)$ (ω_1 определяется*

по ε), *заданная и положительная при всех* ε >0, *такая, что если* U, $V \in \mathbf{M}$ — *унитарные операторы, то* $\varphi(U)$, $\varphi(V) \in \mathbf{M}$, *и если* $[[U - V]] < \omega_1(\varepsilon)$, *то* $[[\varphi(U) - \varphi(V)]] < \varepsilon$.

Доказательство. Тот факт, что $\varphi(U)$, $\varphi(V) \in \mathbf{M}$, очевиден.

Теперь мы покажем, что наше утверждение достаточно установить для тригонометрических полиномов [6]

$$\varphi(\xi) = \sum\nolimits_{\nu=-n}^{n} a_\nu \xi^\nu.$$

Предположим соответственно, что для них оно справедливо, и рассмотрим произвольную функцию $\varphi(\xi)$.

Для данного $\varepsilon' > 0$ выберем тригонометрический полином $\varphi^{\varepsilon'}(\xi) = \sum\nolimits_{\nu=-n^{\varepsilon'}}^{n^{\varepsilon'}} a_\nu^{\varepsilon'} \xi^\nu$, такой, что $|\varphi(\xi) - \varphi^{\varepsilon'}(\xi)| \leqslant {}^1\!/_3\varepsilon'$ для всех ξ с $|\xi| = 1$. Тогда из унитарности операторов U, V следует, что $|||\varphi(U) - \varphi^{\varepsilon'}(U)||| \leqslant {}^1\!/_3\varepsilon'$ и $|||\varphi(V) - \varphi^{\varepsilon'}(V)||| \leqslant {}^1\!/_3\varepsilon'$. Следовательно,

$$[[\varphi(U) - \varphi^{\varepsilon'}(U)]] \leqslant {}^1\!/_3\varepsilon', \qquad [[\varphi(V) - \varphi^{\varepsilon'}(V)]] \leqslant {}^1\!/_3\varepsilon'.$$

Обозначим функцию $\omega_1(\varepsilon)$, соответствующую $\varphi^{\varepsilon'}(\xi)$, через $\omega_1^{\varepsilon'}(\varepsilon)$. Тогда из неравенства $[[U - V]] < \omega_1^{\varepsilon'}({}^1\!/_3\varepsilon')$ следует, что $[[\varphi^{\varepsilon'}(U) - \varphi^{\varepsilon'}(V)]] < {}^1\!/_3\varepsilon'$, и поэтому ввиду приведенных выше неравенств

$$[[\varphi(U) - \varphi(V)]] < \varepsilon'.$$

Таким образом, функция $\omega_1(\varepsilon') = \omega_1^{\varepsilon'}({}^1\!/_3\varepsilon')$ удовлетворяет нашим требованиям для исходной функции $\varphi(\xi)$.

Итак, осталось доказать наше утверждение только для тригонометрических полиномов $\varphi(\xi) = \sum\nolimits_{\nu=-n}^{n} a_\nu \xi^\nu$. Более того, ясно, что мы можем ограничиться мономами $\varphi(\xi) = \xi^\nu$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Для $\nu = 0$ утверждение тривиально, а для $\nu < 0$ из унитарности операторов U, V следует, что $[[U^\nu - V^\nu]] = [[(U^\nu - V^\nu)^*]] = [[U^{*\nu} - V^{*\nu}]] = [[U^{-\nu} - V^{-\nu}]]$.

Поэтому мы можем предполагать, что $\nu > 0$. В этом случае, однако,

$$U^\nu - V^\nu = \sum\nolimits_{\mu=1}^{\nu} (U^\mu V^{\nu-\mu} - U^{\mu-1} V^{\nu-\mu+1}) = \sum\nolimits_{\mu=1}^{\nu} U^{\mu-1}(U - V) V^{\nu-\mu},$$

$$[[U^\nu - V^\nu]] = \Big[\Big[\sum\nolimits_{\mu=1}^{\nu} U^{\mu-1}(U - V) V^{\nu-\mu} \Big]\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \sum\nolimits_{\mu=1}^{\nu} |||U^{\mu-1}|||\,[[U - V]]\,|||V^{\nu-\mu}||| = \sum\nolimits_{\mu=1}^{\nu} [[U - V]] = \nu\,[[U - V]].$$

Таким образом, функция $\omega_1(\varepsilon) = (1/\nu)\,\varepsilon$ удовлетворяет нашим требованиям для данных $\varphi(\xi)$.

---

[6] Так как $|\xi| = 1$, то $\xi = e^{i\alpha}$, α вещественно. Теперь

$$\varphi(\xi) = \sum\nolimits_{\nu=-n}^{n} a_\nu \xi^\nu = \sum\nolimits_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu\alpha}.$$

Таким образом, указанные $\varphi(\xi)$ являются тригонометрическими полиномами с их обычными аппроксимирующими свойствами (см.: *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Варшава, 1935, § 3.23, (iii), с. 47).

Лемма 1.5.3. *Пусть задана функция* $\psi(\lambda)$, *определенная и непрерывная для всех вещественных значений* λ, *такая, что существуют пределы* $\lim_{\lambda\to\pm\infty}\psi(\lambda)$ [7]. *Тогда существует функция* $\omega_2(\varepsilon)$ (ω_2 *определяется по* ψ), *заданная и положительная при всех* $\varepsilon > 0$, *которая обладает следующим свойством: если* $A, B \in \mathbf{M}$ — *эрмитовы операторы, то* $\psi(A)$, $\psi(B) \in \mathbf{M}$ *и из* $[[A - B]] < \omega_2(\varepsilon)$ *следует, что* $[[\psi(A) - \psi(B)]] < \varepsilon$.

Доказательство. Утверждение о том, что $\psi(A)$, $\psi(B) \in \mathbf{M}$, очевидно.

Отображение $\xi = (\lambda + i)/(\lambda - i)$ или $\lambda = i(\xi + 1)/(\xi - 1)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно переводит окружность $|\xi| = 1$ в вещественную прямую λ с присоединенной точкой $\lambda = \pm\infty$, которой соответствует $\xi = 1$. Поэтому функция

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \psi\left(i\dfrac{\xi+1}{\xi-1}\right) & \text{для } |\xi| = 1,\ \xi \neq 1, \\ \lim_{\lambda\to\pm\infty}\psi(\lambda) & \text{для } \xi = 1 \end{cases}$$

определена и непрерывна на окружности $|\xi| = 1$. Ясно, что $\psi(\lambda) = \varphi\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)$.

Рассмотрим вновь функцию $g(\lambda) = (\lambda + i)/(\lambda - i)$, использовавшуюся в доказательстве леммы 1.5.1, и пусть $U = g(A) = (A + i1)/(A - i1)$, $V = g(B) = (B + i1)/(B - i1)$. Тогда из приведенных выше соотношений следует, что

$$\psi(A) = \varphi(U), \qquad \psi(B) = \varphi(V).$$

По лемме 1.5.1 операторы U, $V \in \mathbf{M}$ и унитарны и

$$[[U - V]] \leqslant 2[[A - B]].$$

Применим теперь к функции $\varphi(\xi)$ лемму 1.5.2 и рассмотрим соответствующую функцию $\omega_1(\varepsilon)$. Тогда из неравенства $[[A - B]] < {}^1/_2\omega_1(\varepsilon)$ следует, что $[[U - V]] < \omega_1(\varepsilon)$, и поэтому $[[\varphi(U) - \varphi(V)]] < \varepsilon$ или $[[\psi(A) - \psi(B)]] < \varepsilon$. Следовательно, функция $\omega_2(\varepsilon) = {}^1/_2\omega_1(\varepsilon)$ удовлетворяет нашим требованиям.

Лемма 1.5.4. *Пусть заданы алгебра* $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$ *и последовательность* $A_1, A_2, \ldots \in \mathbf{S}$, *метрически сходящаяся к* $A \in \mathbf{M}$. *Тогда существует другая последовательность* $A_1', A_2', \ldots \in \mathbf{S}$, *которая сходится к* A *метрически ограниченно.*

Доказательство. Последовательность $A_1, A_2, \ldots$ метрически сходится к A; отсюда следует, что последовательность $A_1^*, A_2^*, \ldots$ метрически сходится к A^* [8]. Следовательно, последовательность ${}^1/_2(A_1 + A_1^*)$, ${}^1/_2(A_2 + A_2^*), \ldots$ метрически сходится к ${}^1/_2(A + A^*)$, а последовательность $(1/2i)(A_1 - A_1^*)$, $(1/2i)(A_2 - A_2^*), \ldots$ метрически сходится к $(1/2i)(A - A^*)$. Операторы, участвовавшие в двух последних утверждениях, эрмитовы и $\in \mathbf{S}$. Кроме того, справедливо равенство $A = {}^1/_2(A + A^*) + i(1/2i)(A - A^*)$.

Предположим теперь, что наш результат уже установлен в том частном случае, когда все операторы $A_1, A_2, \ldots$ являются эрмитовыми операторами. Тогда, для

[7] Требуется, чтобы $\lim_{\lambda\to\infty}\psi(\lambda) = \lim_{\lambda\to-\infty}\psi(\lambda)$. Это условие может быть опущено, однако оно упрощает доказательство и достаточно для наших настоящих целей.

[8] Поскольку $[[A]] = [[A^*]]$, то $A \to A^*$ является изометрическим отображением.

того чтобы доказать его в общем случае, мы должны применить указанный частный случай к «вещественным и мнимым» частям операторов A_1, A_2, ... и взять их линейную комбинацию, поскольку «метрически ограниченная сходимость» имеет место для линейной комбинации рядов, если она имеет место для них самих. Таким образом, в дальнейшем мы можем предполагать, что операторы A, A_1, A_2, ... эрмитовы.

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{для } |\lambda| \leqslant |||A|||, \\ |||A|||^2/\lambda & \text{для } |\lambda| \geqslant |||A|||. \end{cases}$$

Применим к $\psi(\lambda)$ лемму 1.5.3 с соответствующей функцией $\omega_2(\varepsilon)$.

Рассмотрим произвольное $\nu = 1, 2, \ldots$ Выберем $\nu' = 1, 2, \ldots$ (зависящее и от ν, и от A, A_1, A_2, ...), такое, что

$$[[A_{\nu'} - A]] < \omega_2(1/\nu).$$

Тогда по лемме 1.5.3 $[[\psi(A_{\nu'}) - \psi(A)]] < 1/\nu$. Так как $\psi(\lambda) = \lambda$ для всех λ с $|\lambda| \leqslant |||A|||$, то [9] $\psi(A) = A$. Таким образом,

$$[[\psi(A_{\nu'}) - A]] < 1/\nu. \tag{1.5.β}$$

Рассмотрим далее функцию

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{для } |\lambda| \leqslant |||A|||, \\ |||A|||^2/\lambda^2 & \text{для } |\lambda| \geqslant |||A|||. \end{cases}$$

Ясно, что $\psi(\lambda) = \lambda\theta(\lambda)$. Выберем полином $p_\nu(\lambda)$, такой, что [10]

$$\theta(\lambda) \geqslant p_\nu(\lambda) \geqslant \max(\theta(\lambda) - (1/\nu)|\lambda|, 0) \text{ для } |\lambda| \leqslant |||A_{\nu'}|||.$$

Тогда полином $q_\nu(\lambda) = \lambda p_\nu(\lambda)$ не имеет свободного члена, и $|q_\nu(\lambda) - \psi(\lambda)| \leqslant 1/\nu$ для $|\lambda| \leqslant |||A_{\nu'}|||$. Далее, $0 \leqslant q_\nu(\lambda) \leqslant \psi(\lambda) \leqslant |||A|||$, и поэтому $|q_\nu(\lambda)| \leqslant |||A|||$ для $|\lambda| \leqslant |||A_{\nu'}|||$. Из этих двух неравенств следует, что [11]

$$|||q_\nu(A_{\nu'}) - \psi(A_{\nu'})||| \leqslant 1/\nu,$$

и, таким образом,

$$[[q_\nu(A_{\nu'}) - \psi(A_{\nu'})]] \leqslant 1/\nu \tag{1.5.γ}$$

и [11]

$$|||q_\nu(A_{\nu'})||| \leqslant |||A|||. \tag{1.5.δ}$$

Комбинируя неравенства (1.5.β) и (1.5.γ), получаем, что

$$[[q_\nu(A_{\nu'}) - A]] < 2/\nu. \tag{1.5.ε}$$

Положим теперь $A'_\nu = q_\nu(A_{\nu'})$. Тогда из $A_{\nu'} \in S$ следует, что $q_\nu(A_{\nu'}) \in S$, поскольку $q_\nu(\lambda)$ не имеет свободного члена. Поэтому последовательность A'_1, A'_2, ...

[9] Множество $\lambda \leqslant |||A|||$ содержит весь спектр оператора A.
[10] Это есть простой вариант (полиномиальной) теоремы Вейерштрасса об аппроксимации.
[11] Множество $|\lambda| \leqslant |||A_{\nu'}|||$ содержит весь спектр оператора $A_{\nu'}$.

состоит из элементов множества **S**, и ввиду (1.5.δ) и (1.5.ε) она ограниченно метрически сходится к A.

Заметим, что приведенное доказательство дает даже, что $|||A_{\nu'}||| \leqslant |||A|||$ в случае, когда оператор A эрмитов. Это свойство может быть обобщено на все A, но мы не будем изучать этот вопрос дальше.

1.6. Теперь мы немедленно получаем желаемый результат.

Лемма 1.6.1. *Ограниченно метрическое замыкание алгебры* **S** *содержит ее метрическое замыкание.*

Доказательство. Немедленно следует из леммы 1.5.4.

Теорема I. *В алгебре* **S**, *лежащей в факторе* **M** *конечного типа, следующие восемь понятий замыкания эквивалентны:*

α) *ограниченно метрическое замыкание,*

β) *метрическое замыкание,*

γ) *слабое (топологическое) замыкание,*

δ) *замыкание относительно слабой сходимости,*

ε) *сильное (топологическое) замыкание,*

θ) *замыкание относительно сильной сходимости,*

ζ) *сильнейшее (топологическое) замыкание,*

η) *замыкание относительно сильнейшей сходимости.*

Доказательство. Импликации ε) → α), β) → ε), α) → β) были установлены соответственно в леммах 1.4.1, 1.4.2 и 1.6.1. Следовательно, α) ⇄ β) ⇄ ε). Кроме того, лемма 1.3.2 дает α) ⇄ θ). Из работы [2, с. 396, конец § 3] мы имеем γ) ⇄ ε), а из работы [4, с. 112, начало § 3] — γ) ⇄ ζ). Наконец, из той же работы [4, с. 112, конец § 2] мы имеем θ) ⇄ η).

Все эти эквивалентности дают вместе, что

$$\alpha) \rightleftarrows \beta) \rightleftarrows \gamma) \rightleftarrows \varepsilon) \rightleftarrows \theta) \rightleftarrows \zeta) \rightleftarrows \eta).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\gamma) \to \delta) \to \theta).$$

Таким образом, сходимость δ) эквивалентна остальным.

Итак, все топологизации пространства операторов, которые естественно рассматривать в его связи, оказываются эквивалентными в случае алгебры **S**, лежащей в факторе **M** конечного типа [4].

Отметим также следующий результат.

Теорема II. *Понятие подкольца* $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$ *фактора* **M** *конечного типа есть чисто алгебраическое понятие.*

Доказательство. Эквивалентности теоремы I позволяют применить аргументы, приведенные в конце п. 1.2.

Таким образом, программа, намеченная в конце п. 1.1, полностью выполнена.

Глава II

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ТИП И ОПЕРАЦИИ НАД НИМ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

2.1. Мы будем рассматривать класс эквивалентности кольца **M** относительно алгебраического изоморфизма — его алгебраический тип. Другими словами, мы скажем, что два кольца $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ имеют один и тот же алгебраический тип тог-

да и только тогда, когда эти кольца алгебраически изоморфны. Мы будем обозначать тип кольца **M** через $\overline{\mathbf{M}}$. Те понятия в **M**, которые являются чисто алгебраическими, т. е. инвариантными относительно алгебраических изоморфизмов, мы будем рассматривать как понятия, связанные с алгебраическим типом $\overline{\mathbf{M}}$ (а не с **M** самим)[12].

Таким образом, свойства, перечисленные в п. 1.1 (см. также [91]), являются свойствами $\overline{\mathbf{M}}$. Понятие подкольца в **M** связано с $\overline{\mathbf{M}}$ в том случае, когда **M** есть фактор конечного типа (см. теорему II). То же самое справедливо и для $D_{\mathbf{M}}(E)$, $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$, $[[A]]$ (см. начало п. 1.2), а также для различных понятий замыкания, перечисленных в теореме I, в том случае когда они относятся к алгебре S. Таким образом, когда **M** является фактором конечного типа, набор свойств, имеющих отношение к $\overline{\mathbf{M}}$, особенно обширен.

2.2. Пусть, так же как и в п. 2 введения, для каждого $i = 1, 2$ задано гильбертово пространство $\mathfrak{H}_i$ и кольцо операторов $\mathbf{M}_i$ в нем. Обобщим определение этого пункта следующим образом.

B*) Общий (алгебраически кольцевой) изоморфизм $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$. Это есть взаимно однозначное отображение $\mathbf{M}_1$ на $\mathbf{M}_2$, сохраняющее единицу и операции A^* и $A + B$. В то же время оно может переводить элементы αA (α — комплексные числа) либо в элементы αA (случай a′), либо в элементы $\bar{\alpha} A$ (случай b′) и $A\,B$ либо в AB (случай a″), либо в BA (случай b″). В зависимости от того, какая комбинация указанных случаев встречается, мы будем говорить о [a′, a″] (или «собственном»), [b′, a″] или («сопряженном»), [a′, b″] (или «дуальном»), [b′, b″] (или «сопряженно дуальном») изоморфизмах.

Существование общего изоморфизма колец $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ любого из четырех указанных типов есть, очевидно, свойство типов $\overline{\mathbf{M}}_1$ и $\overline{\mathbf{M}}_2$. Если имеет место (собственный) изоморфизм, то $\overline{\mathbf{M}}_1 = \overline{\mathbf{M}}_2$. Если имеет место сопряженный или дуальный изоморфизм, то $\overline{\mathbf{M}}_1$ однозначно определяет $\overline{\mathbf{M}}_2$. Поэтому мы имеем право использовать для этих соотношений записи $\overline{\mathbf{M}}' = \overline{\mathbf{M}}_2$ и $\overline{\mathbf{M}}_1' = \overline{\mathbf{M}}_2$ соответственно.

Теперь мы должны вывести свойства существования и некоторые другие свойства для операций $\overline{\mathbf{M}}'$ и $\overline{\mathbf{M}}'$.

2.3. Пусть дано гильбертово пространство $\mathfrak{H}$. Заменим операции αf, $f + g$, (f, g) в $\mathfrak{H}$ на $\bar{\alpha} f$, $f + g$, $\overline{(f, g)}$. Обозначим полученное пространство через $\mathfrak{H}_c$. Ясно, что $\mathfrak{H}_c$ также есть гильбертово пространство и каждый линейный ограниченный оператор A в $\mathfrak{H}$ является линейным ограниченным оператором в $\mathfrak{H}_c$; соответственно каждое кольцо операторов **M** в $\mathfrak{H}$ является таким же кольцом и в $\mathfrak{H}_c$. Мы будем обозначать операторы A и кольца **M** в $\mathfrak{H}$, когда они рассматриваются в $\mathfrak{H}_c$, через A_c и $\mathbf{M}_c$.

Рассмотрим теперь кольцо операторов **M** в $\mathfrak{H}$. Тождественное отображение $\mathfrak{J}^0$ переводит кольцо **M** в кольцо $\mathbf{M}_c$, и оно осуществляет сопряженный изоморфизм колец **M** и $\mathbf{M}_c$.

---

[12] Это определение следует сравнить с определением пространственного типа в п. 3.3 и противопоставить ему.

Рассмотрим далее отображение $\mathfrak{J}^*$: $A \to A^*$. Оно переводит $\mathbf{M}$ в $\mathbf{M}$ и осуществляет сопряженно дуальный изоморфизм кольца $\mathbf{M}$ с собой. Следовательно, отображение $\mathfrak{J}^*\mathfrak{J}^0$ есть дуальный изоморфизм колец $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_c$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема III. *Типы* $\overline{\mathbf{M}}'$ *и* $\overline{\mathbf{M}}'$ *всегда существуют и единственны. Они оба равны указанному выше* $\overline{\mathbf{M}}_c$. *Мы обозначим их через* $\overline{\mathbf{M}}^c$.

Ясно, что

$$\overline{\mathbf{M}}^{cc} = \overline{\mathbf{M}}, \tag{2.3.α}$$

поскольку $\mathfrak{H}_{c,c} = \mathfrak{H}$, $A_{c,c} = A$, $\mathbf{M}_{c,c} = \mathbf{M}$.

Заметим, что свойство кольца быть фактором и его тип сохраняются при сопряженных изоморфизмах, так как соответствующие определения используют числа α лишь в задании множества элементов вида $\alpha 1$, но не используют их конкретные числовые свойства. См. по этому поводу работу [5, с. 138, определение 3.1.2, и с. 173, теорема IX). Поэтому операция $\overline{\mathbf{M}}^c$ (рассматриваемая как $\overline{\mathbf{M}}'$) не изменяет ни факторный характер кольца $\mathbf{M}$, ни его тип.

2.4. Ниже мы будем рассматривать матрицы операторов. Для любого $p = 1, 2, \ldots, \infty$ матрица $\langle A_{t,s}\rangle$ порядка p есть набор операторов $A_{t,s}$, в котором индексы s и t изменяются от 1 до p в случае конечного p и $1, 2, \ldots$, если $p = \infty$ (в обоих случаях мы будем использовать сокращенное обозначение $s, t \leqslant p$). Матрица $\langle A_{t,s}\rangle$ называется конечной, если существует конечное число $q = 1, 2, \ldots$, такое, что $A_{t,s} = 0$, если либо $t > q$, либо $s > q$. Для конечных значений p это выполнено автоматически, но является существенным ограничением при $p = \infty$.

Пусть, так же как и в п. 2 введения, для каждого $i = 1, 2$ заданы гильбертово пространство $\mathfrak{H}_i$ и кольцо операторов $\mathbf{M}_i$ в нем. Обобщим определение В п. 2 следующим образом.

$\mathrm{B_p}$) p-матричный (алгебраически кольцевой) изоморфизм кольца $\mathbf{M}_1$ над кольцом $\mathbf{M}_2$. Это есть взаимно однозначное отображение $\mathbf{M}_1$ на множество $\mathfrak{J}$ матриц $\langle A_{t,s}\rangle$ p-го порядка над $\mathbf{M}_2$ (т. е. $A_{t,s} \in \mathbf{M}_2$), которое является алгебраически кольцевым изоморфизмом в матричном смысле, т. е. оно переводит элементы 1, αA^0, A^{0*}, $A^0 + B^0$, A^0B^0 из $\mathbf{M}_1$ в элементы $\langle \delta_{t,s}1\rangle$, $\langle \alpha A_{t,s}\rangle$, $\langle A^*_{s,t}\rangle$, $A_{t,s} + B_{t,s}\rangle$, $\langle \Sigma_{r=1}^{p} A_{r,s}B_{t,r}\rangle$ из $\mathfrak{J}$. Сумма $\Sigma_{r=1}^{p}$ в последнем выражении означает в случае $p = \infty$ сходимость в смысле сильной операторной топологии, не зависящую от порядка слагаемых. Кроме того, множество $\mathfrak{J}$ должно содержать все конечные матрицы $\langle A_{t,s}\rangle$ над $\mathbf{M}_2$ (см. [5, с. 136 — 137, лемма 2, 4. 3], где используются те же понятия и те же правила для умножения матриц и сходимости рядов).

Для данных p, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ существование p-матричного изоморфизма $\mathbf{M}_1$ над $\mathbf{M}_2$ является свойством алгебраических типов $\overline{\mathbf{M}}_1$, $\overline{\mathbf{M}}_2$, Это очевидно для $p = 1, 2, \ldots$, а для $p = \infty$ необходимо лишь помнить о чисто алгебраической природе понятия сильной сходимости (см. начало п. 1. 1 или [9, теорема II]). Вопрос о том, определяется ли однозначно для данного $p = 1, 2, \ldots, \infty$ алгебраический тип $\overline{\mathbf{M}}_1$ по алгебраическому типу $\overline{\mathbf{M}}_2$, связан, очевидно, с тем, единственным ли образом определяется множество $\mathfrak{J}$ в определении $\mathrm{B_p}$. Для $p = 1, 2, \ldots$ (p конечно) последняя часть условия $\mathrm{B_p}$ влечет за собой тот факт, что множество $\mathfrak{J}$ есть множество всех матриц $\langle A_{t,s}\rangle$ с $A_{t,s} \in \mathbf{M}_2$, поскольку все эти матрицы конечны. Поэтому

в этом случае $\overline{\mathbf{M}}_1$ определено однозначно. Для $p=\infty$ вопрос о единственности не столь тривиален. Мы докажем, что множество $\mathfrak{J}$, а вместе с ним и $\overline{\mathbf{M}}_1$ определяются единственным образом, однако сейчас мы отложим этот вывод до следующего пункта. Тем не менее для всех $p=1, 2, \ldots, \infty$ существование p-матричного изоморфизма $\mathbf{M}_1$ над $\mathbf{M}_2$ является соотношением между $\overline{\mathbf{M}}_1$ и $\overline{\mathbf{M}}_2$ и будет обозначаться через $\overline{\mathbf{M}}_1=\overline{\mathbf{M}}_2^p$. Независимо от вопроса существования кольца $\mathbf{M}^p$ алгебраический тип $\overline{\mathbf{M}}^p$ определен, как мы видели, однозначно для конечных значений p. Для $p=\infty$ мы пока должны допускать возможность многозначности типа $\overline{\mathbf{M}}^p$.

Вопрос существования кольца $\mathbf{M}^p$ есть вопрос абстрактной алгебры, однако в дальнейшем нам будет необходимо это кольцо именно как кольцо операторов. По этой причине, а также для того, чтобы дать общее представление о рассматриваемых проблемах, мы построим его явно, исходя из конструкций работы [5, с. 135—137, п. 2.4].

Пусть даны гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, кольцо операторов $\mathbf{M}$ в нем и $p=1, 2, \ldots, \infty$. Мы приведем конструкцию работы [5], в которой пространство $\mathfrak{H}_2$ заменено на наше $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ — на p-мерное гильбертово пространство. Образуем пространство $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$ и кольцо $\mathbf{B}\otimes$ ограниченных операторов в нем. Тогда элементы $\mathbf{B}\otimes$ представляются матрицами $\langle A_{t,s}\rangle$ порядка p $(t, s\leqslant p$, $A_{t,s}$ в $\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H})$ (см. [5, с. 136, определение, 2.4.2. и лемма 2. 4. 2]). Рассмотрим для кольца $\mathbf{M}$ множество $\mathbf{M}_1$ операторов в $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$, у которых матричные элементы принадлежат $\mathbf{M}$. Пространство $\mathfrak{J}$ есть множество тех матриц $\langle A_{t,s}\rangle$, $A_{t,s}\in\mathbf{M}$, которые соответствуют некоторому оператору в $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$. Отсюда немедленно следует, что $\mathfrak{J}$ содержит все конечные матрицы[13] $\langle A_{t,s}\rangle$, $A_{t,s}\in\mathbf{M}$.

Теперь кольцо $\mathbf{M}_1$ в $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$ и кольцо $\mathbf{M}$ в $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_2$ вместе с используемой нами интерпретацией матричного массива $\langle A_{t,s}\rangle$ удовлетворяют, очевидно, всем пунктам условия $\mathrm{B_p}$ (пространства $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_2$ и кольца $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}$ заменяют соответственно $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ условия $\mathrm{B_p}$).

Суммируя сказанное, мы имеем следующий результат.

Теорема IV. *Алгебраический тип $\overline{\mathbf{M}}^p$ существует для всех $p=1, 2, \ldots, \infty$, и он единствен для $p=1, 2, \ldots$ (p конечно).*

Определение условия $\mathrm{B_p}$ и п. 2. 3 дают вместе, что

$$(\overline{\mathbf{M}}^c)^p=(\overline{\mathbf{M}}^p)^c \qquad (p=1, 2, \ldots), \tag{2.4.α}$$

и, кроме того, из $\mathrm{B_p}$ следует, что

$$(\overline{\mathbf{M}}^p)^q=\overline{\mathbf{M}}^{pq} \qquad (p, q=1, 2, \ldots) \tag{2.4.β}$$

(показатели $p=\infty$ и $q=\infty$ будут рассмотрены в следующем пункте).

2.5. В этом пункте мы будем использовать операции $A_{(\mathfrak{M})}$ и $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, введенные в работах [1, с. 78] и [5, с. 186, определение 11. 3. 1]. Если A есть оператор в $\mathfrak{H}$, который приводи́м замкнутым подпространством $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{H}$, то $A_{(\mathfrak{M})}$ есть

[13] Для конечной матрицы $\langle A_{t,s}\rangle$ соответствующий оператор A^0 в пространстве $\mathfrak{H}_1\otimes\mathfrak{H}_2$, $A^0\sim\langle A_{t,s}\rangle$ в смысле работы [5, с. 136, определение 2.4.2] строится без всяких осложнений, связанных со сходимостью.

ограничение A на $\mathfrak{M}$. Если $\mathbf{M}$ есть кольцо операторов в $\mathfrak{H}$, то $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ есть совокупность всех операторов $A_{(\mathfrak{M})}$ для тех $A \in \mathbf{M}$, которые приводимы $\mathfrak{M}$. И $A_{(\mathfrak{M})}$, и $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ действуют в пространстве $\mathfrak{M}$, тогда как A и $\mathbf{M}$ действовали в $\mathfrak{H}$.

Лемма 2.5.1. *Предположим, что $E = P_{(\mathfrak{M})} \in \mathbf{M}$. Пусть $\mathbf{M}^E$ есть множество тех $A \in \mathbf{M}$, для которых $EA = AE = A$. Тогда*

(i) *$A_{(\mathfrak{M})}$ существует для всех $A \in \mathbf{M}^E$.*

(ii) *$\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ совпадает с $(\mathbf{M}^E)_{(\mathfrak{M})}$.*

(iii) *$A \to A_{(\mathfrak{M})}$ есть взаимно однозначное отображение $\mathbf{M}^E$ в $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, которое переводит оператор E ($\in \mathbf{M}^E$, действующий в $\mathfrak{H}$) в единичный оператор ($\in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, действующий в $\mathfrak{M}$) и сохраняет операции αA, A^*, $A + B$, AB.*

Доказательство. (i). Каждый оператор $A \in \mathbf{M}^E$ коммутирует с $E = P_{(\mathfrak{M})}$, т. е. он приводим пространством $\mathfrak{M}$.

(ii). Если $A \in \mathbf{M}$, то $EAE \in \mathbf{M}$, и, следовательно, $EAE \in \mathbf{M}^E$. Далее, если $\mathfrak{M}$ приводит A, то и A, и EAE имеют одинаковые ограничения на $\mathfrak{M}$, т. е. $A_{(\mathfrak{M})} = (EAE)_{(\mathfrak{M})}$. Таким образом, $(\mathbf{M}^E)_{(\mathfrak{M})} \supseteq \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$. Но $\mathbf{M}^E \subseteq \mathbf{M}$, следовательно, также $(\mathbf{M}^E)_{(\mathfrak{M})} \subset \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$. Поэтому $(\mathbf{M}^E)_{(\mathfrak{M})} = \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$.

(iii). Каждый оператор $A \in \mathbf{M}^E$ приводим $\mathfrak{M}$ (см. (i)), и его ограничение на $\mathfrak{M}^{\perp} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$ равно, очевидно, 0. Поэтому мы можем рассматривать этот оператор в $\mathfrak{M}$ (где он есть $A_{(\mathfrak{M})}$) и как оператор в $\mathfrak{H}$. Отсюда немедленно следуют все утверждения.

Рассмотрим теперь кольца $\mathbf{M}_1$ в $\mathfrak{H}_1$ и $\mathbf{M}_2$ в $\mathfrak{H}_2$ и ∞-матричный изоморфизм $\mathbf{M}_1$ в $\mathbf{M}_2$, соответствующий определению B_∞ предыдущего пункта. Для каждого $q = 1, 2, \ldots$ образуем множество $\mathfrak{F}^q$ тех матриц $\langle A_{t,s}\rangle$, $A_{t,s} \in \mathbf{M}_2$, у которых $A_{t,s} = 0$ при $t > q$ или $s > q$. Рассмотрим также матрицу $\langle e^q_{t,s} 1\rangle$, где $e^q_{t,s} = 1$, если $t = s \leqslant q$ и $e^q_{t,s} = 0$ в противном случае. Легко установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.5.2. (i) $\mathfrak{F}^q \subseteq \mathfrak{F}$.

(ii) *$\langle e^q_{t,s} 1\rangle \in \mathfrak{F}^q$ соответствует некоторому проектору $E^q \in \mathbf{M}$. Положим $E^q = P_{\mathfrak{M}^q}$.*

(iii) *$E^1 \leqslant E^2 \leqslant \ldots$ и $\lim_{q\to\infty} E^q = 1$ в сильном смысле.*

(iv) *Каждая матрица $\langle A_{t,s}\rangle \in \mathfrak{F}^q$ может быть рассмотрена и как матрица q-го порядка, и как матрица ∞-го порядка. В первом случае она соответствует элементу кольца $\mathbf{M}^q_2$ с $\overline{\mathbf{M}^q_2} = \overline{\mathbf{M}}^q_2$, во втором — элементу кольца $(\mathbf{M}_1)^{E^q} \subseteq \mathbf{M}_1$. Второе соответствие по лемме 2.5.1 может быть продолжено до соответствия с элементами кольца $(\mathbf{M}_1)_{(\mathfrak{M}^q)}$.*

Указанные элементы исчерпывают соответственно кольца $\mathbf{M}^q_2$, $\mathbf{M}_1^{E^q}$ и $(\mathbf{M}_1)_{(\mathfrak{M}^q)}$.

(v) *Соответствие пункта* (iv) *есть алгебраический кольцевой изоморфизм* $\mathbf{M}_2^q$ *и* $(\mathbf{M}_1)_{(\mathfrak{M}^q)}$. *Поэтому* $\overline{(\mathbf{M}_1)_{(\mathfrak{M}^q)}} = \overline{\mathbf{M}}^q = \overline{\mathbf{M}}_2^q$.

Доказательство. (i). Немедленно следует из последней части определения B_∞.

(ii). Ясно, что матрица $\langle e_{t,s}^q 1\rangle \in \mathfrak{J}^q$, следовательно, она $\in \mathfrak{J}$ и, таким образом, соответствует некоторому элементу кольца $\mathbf{M}_1$. Правила обращения с матрицами показывают, что этот элемент есть проектор.

(iii). Правила обращения с матрицами показывают, что $E^1 \leqslant E^2 \leqslant \ldots$ Теперь если $f = \langle f_1, f_2, \ldots\rangle \in \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, то $E^q f = \langle f_1, \ldots, f_q, 0, \ldots\rangle \to f$, когда $q \to \infty$. Следовательно, $\lim_{q\to\infty} E^q = 1$.

(iv). Матрица $\langle A_{t,s}\rangle \in \mathfrak{J}^q$ характеризуется тем, что $\langle e_{t,s}^q 1\rangle \langle A_{t,s}\rangle = \langle A_{t,s}\rangle \langle e_{t,s}^q 1\rangle = \langle A_{t,s}\rangle$. Поэтому второе соответствие рассматриваемого пункта переводит матрицу $\langle A_{t,s}\rangle \in \mathfrak{J}^q$ в элемент $A^0 \in \mathbf{M}$, такой, что $E^q A^0 = A^0 E^q = A^0$, т. е. в $A_0 \in \in (\mathbf{M}_1)^{E^q}$. Все остальные утверждения, очевидно, следуют из леммы 2. 5. 1.

(v). Утверждение о связи между $\mathbf{M}_2^q$ и $(\mathbf{M}_1)^{E^q}$ немедленно следует из правил обращения с матрицами. По лемме 2. 5. 1 это утверждение переносится и на кольца $\mathbf{M}_2^q$ и $(\mathbf{M}_1)_{(\mathfrak{M}^q)}$.

Теперь мы пойдем дальше и докажем следующую лемму.

Лемма 2. 5. 3. *По пункту* (iv) *леммы* 2. 5. 2 *матрица* $\langle A_{t,s}\rangle \in \mathfrak{J}^q$ *может рассматриваться как оператор из кольца* $\mathbf{M}_2^q$, *как оператор из кольца* $(\mathbf{M}_1)^{E^q}$ *и, наконец, как оператор из кольца* $(\mathbf{M}_1)_{(\mathfrak{M}^q)}$. *Утверждается, что все эти три оператора имеют одинаковую* $|||\cdot|||$, *обозначаемую в дальнейшем через* $|||\langle A_{t,s}\rangle|||$.

Доказательство. Операторы в $(\mathbf{M}_1)^{E^q}$ и $(\mathbf{M}_1)_{(\mathfrak{M}^q)}$ имеют одинаковую норму, поскольку они представляют один и тот же оператор, рассматриваемый один раз в пространстве $\mathfrak{H}_1$, другой раз — в пространстве $\mathfrak{M}^q$ [14]. Операторы в $\mathbf{M}_2^q$ и $(\mathbf{M}_1)_{(\mathfrak{M}^q)}$ имеют одинаковую норму, потому что они получаются друг из друга при алгебраически кольцевом изоморфизме (см. п. (v) леммы 2. 5. 2), а значение нормы является чисто алгебраическим понятием (см. п. 1.1). Это завершает доказательство.

Лемма 2. 5. 4. *Рассмотрим матрицу* $\langle A_{t,s}\rangle$, $A_{t,s} \in \mathbf{M}_2$. *Определим матрицы* $\langle A_{t,s}^q\rangle \in \mathfrak{J}^q$ *равенствами* $A_{t,s}^q = A_{t,s}$, *если* $t \leqslant q$ *и* $s \leqslant q$, *и* $A_{t,s}^q = 0$ *в противном случае.* $\langle A_{t,s}\rangle \in \mathfrak{J}$ *тогда и только тогда, когда числовая последовательность* $|||\langle A_{t,s}^1\rangle|||$, $|||\langle A_{t,s}^2\rangle|||$, ... (*см. лемму* 2. 5. 3) *ограничена.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица $\langle A_{t,s}\rangle \in \mathfrak{J}$ и соответствует оператору $A^0 \in \mathbf{M}_1$. Тогда, очевидно, $\langle A_{t,s}^q\rangle = \langle e_{t,s}^q 1\rangle \langle A_{t,s}\rangle \langle e_{t,s}^q 1\rangle$, т. е. матрица $\langle A_{t,s}^q\rangle$ соответствует оператору $E^q A^0 E^q \in \mathbf{M}_1$. Ясно, что $E^q A^0 E^q \in (\mathbf{M}_1)^{E^q}$. Поэтому в силу второго определения нормы в лемме 2. 5. 3 $|||\langle A_{t,s}^q\rangle||| = |||E^q A^0 E^q|||$.

[14] В первом случае ограничение этого оператора на пространство $(\mathfrak{M}^q)^\perp$ равно 0.

Далее, $|||E^q A^0 E^q||| \leqslant |||E^q||| \cdot |||A^0||| \cdot |||E^q||| = |||A^0|||$. Следовательно, $|||\langle A^q_{t,s}\rangle||| \leqslant \leqslant |||A^0|||$. Поскольку это имеет место для $q = 1, 2, \ldots$, то последовательность $|||\langle A^1_{t,s}\rangle|||$, $|||\langle A^2_{t,s}\rangle|||, \ldots$ ограничена.

Достаточность. Предположим, что числовая последовательность $|||\langle A^1_{t,s}\rangle|||$, $|||\langle A^2_{t,s}\rangle|||, \ldots$ ограничена. Матрица $\langle A^q_{t,s}\rangle \in \mathfrak{J}^q$, поэтому ей соответствует оператор $A^q \in (\mathbf{M}_1)^{E^q} \subseteq \mathbf{M}_1$. Ввиду леммы 2. 5. 3 $|||\langle A^q_{t,s}\rangle||| = |||A^q|||$, следовательно,

(Числовая) последовательность $|||A^1|||$, $|||A^2|||, \ldots$ ограничена. (2. 5. α)

Для $q \geqslant r$, очевидно, $\langle e^r_{t,s}\cdot 1\rangle \langle A^q_{t,s}\rangle \langle e^r_{t,s}\cdot 1\rangle = \langle A^r_{t,s}\rangle$, следовательно, $E^r A^q E^r = = A^r$.

Рассмотрим теперь некоторый вектор $f \in \mathfrak{M}^r$. Пусть $q \geqslant r$, $f_q = A^q f$. Так как $\|f_q\|^2 \leqslant |||A^q|||^2 \cdot \|f\|^2$, то нормы векторов f_q ограничены. Кроме того, $f \in \mathfrak{M}^r \subset \subset \mathfrak{M}^q$, следовательно, $E^q f = f$. Поэтому для $q' \geqslant q \geqslant r$ $E^q f_{q'} = E^q A^{q'} f = E^q A^{q'} E^q f = = A^q f = f_q$. Следовательно, векторы $f_{q'} - f_q$ и f_q ортогональны, $\|f_{q'} - f_q\|^2 + + \|f_q\|^2 = \|f_{q'}\|^2$, т. е.

$$\|f_{q'} - f_q\|^2 = \|f_{q'}\|^2 - \|f_q\|^2 \text{ для } q' \geqslant q \geqslant r. \qquad (2.5.\beta)$$

Таким образом, числа $\|f_r\|^2$, $\|f_{r+1}\|^2, \ldots$ образуют монотонную ограниченную последовательность и, следовательно, существует предел $\lim_{q\to\infty}\|f_q\|^2$. Поэтому правая часть соотношения (2. 5. β) сходится к нулю, когда q, $q' \to \infty$. Следовательно, из (2. 5. β) следует сильная сходимость последовательности $A^q f$ при $q \to \to \infty$. Ясно, что ограничение $q \geqslant r$ несущественно.

Множество векторов f, для которых $A^q f$ сильно сходится, замкнуто, поскольку величины $|||A^q|||$ равномерно ограничены. Это множество, очевидно, линейно и по доказанному содержит пространства $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2, \ldots$ Таким образом,

Последовательность A^1, $A^2, \ldots$ сходится для всех f, лежащих в замкнутом пространстве, порожденном $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2, \ldots$ (2.5.γ)

Поскольку пространства $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2, \ldots$ в совокупности плотны в $\mathfrak{H}$, то множество, определяемое соотношением (2.5. γ), есть все $\mathfrak{H}$. Обозначим предел последовательности $A^1 f$, $A^2 f, \ldots$ через Af. Тогда оператор A принадлежит $\mathbf{M}$, так как $\mathbf{M}$ принадлежали операторы A^1, $A^2, \ldots$ Итак, доказано, что

Последовательность A^1, $A^2, \ldots$ сильно сходится к $A \in \mathbf{M}$. (2.5.δ)

Пусть оператор A соответствует матрице $\langle B_{t,s}\rangle$ в определении B_∞. Тогда, конечно, $\langle B_{t,s}\rangle \in \mathfrak{J}$. Так как для $q \geqslant r$ $E^r A^q E^r = A^r$, то из (2.5. δ) следует, что $E^r A E^r = A^r$. Поэтому $\langle e^r_{t,s} 1\rangle \langle B_{t,s}\rangle \langle e^r_{t,s} 1\rangle = \langle A^r_{t,s}\rangle$. Правила умножения матриц теперь дают, что $B^r_{t,s} = A^r_{t,s}$. Пусть, далее, t и s фиксированы и $r = \max(t, s)$. Тогда в силу доказанной формулы $B_{t,s} = A_{t,s}$. Поскольку t, s были произвольны, то $\langle B_{t,s}\rangle = \langle A_{t,s}\rangle$, т. е. $\langle A_{t,s}\rangle \in \mathfrak{J}$.

Доказательство окончено.

Лемма 2.5.5. *Множество $\mathfrak{J}$ может быть, и притом чисто алгебраически, однозначно охарактеризовано в терминах кольца* $\mathbf{M}_2$.

Доказательство. Соответствующее однозначное описание множества $\mathfrak{J}$ было дано в лемме 2.5.4. Используя первое определение нормы $|||\langle A^q_{t,s}\rangle|||$ в лемме 2.5.3, легко увидеть, что оно носит чисто алгебраический характер и основано лишь на свойствах колец $\mathbf{M}_2^q$, $q = 1, 2, \ldots$ Но по теореме IV любое кольцо $\mathbf{M}_2^q$ допускает алгебраическое описание в терминах кольца $\mathbf{M}_2$.

Таким образом, доказательство окончено.

Замечание, сделанное в п. 2. 4 и предшествующее теореме IV, в соединении с леммой 2.5.5 позволяют получить следующий результат.

Теорема IV'. *Алгебраический тип* $\overline{\mathbf{M}}^\infty$ *определен однозначно.*

Ввиду определения B_∞ и п. 2.3

$$(\overline{\mathbf{M}}^c)^\infty = (\overline{\mathbf{M}}^\infty)^c. \tag{2.5.ε}$$

(Это соответствует равенству (2.4.α).) Можно было бы обобщить и соотношение (2.4.β), однако сейчас нам этого не потребуется. Заметим, что это обобщение является простым следствием леммы 3.1.6.

2.6. Сейчас мы попытаемся ввести операцию, обратную к $\mathbf{N}^p$. Вначале мы не будем налагать никаких ограничений ни на кольцо $\mathbf{N}$, ни на показатель $p = 1, 2, \ldots, \infty$.

Определение 2.6.1. *Система p^2 операторов $W_{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu \leqslant p$) есть система p-матричных единиц, если она обладает следующими свойствами:*

$$\text{(i)}\quad W^*_{\mu,\nu} = W_{\nu,\mu};$$

$$\text{(ii)}\quad W_{\mu,\nu}W_{\sigma,\omega} = \begin{cases} W_{\mu,\omega} & \text{для } \nu = \sigma, \\ 0 & \text{для } \nu \neq \sigma. \end{cases}$$

Укажем некоторые непосредственные свойства таких систем.

Лемма 2.6.1. *Каждая система p-матричных единиц $W_{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu \leqslant p$) обладает следующими свойствами:*

(i) *Операторы $W_{\mu,\mu}$ ($\mu \leqslant p$) являются попарными ортопроекторами.*

(ii) *Каждый оператор $W_{\mu,\nu}$ частично изометричен начальному проектору $W_{\nu,\nu}$ и конечному проектору $W_{\mu,\mu}$ (см.* [5, п. 4.3]).

(iii) *Пусть $E_0 = \sum_{\mu=1}^p W_{\mu,\mu}$. Эта сумма $\sum_{\mu=1}^p$ либо конечна, либо, при $p = \infty$, сходится в смысле сильной операторной топологии, и сходимость не зависит от порядка слагаемых. Оператор E_0 является проектором, и для системы $W_{\mu,\nu}$ он играет роль единицы, т. е. всегда*

$$E_0 W_{\mu,\nu} = W_{\mu,\nu} E_0 = W_{\mu,\nu}.$$

Доказательство. (i), (iii). Сходимость в (iii) есть следствие (i), что легко видеть из известных рассмотрений, связанных с попарными ортопроекторами (см., например, [5, с. 76—78] или доказательство соотношения (2.5.δ) в лемме 2.5.4). Все остальные утверждения немедленно следуют из соотношений (i), (ii) определения 2.6.1.

(ii). Из определения 2.6.1 следует, что

$$W^*_{\mu,\nu} W_{\mu,\nu} = W_{\nu,\nu}, \qquad W_{\mu,\nu} W^*_{\mu,\nu} = W_{\mu,\mu}.$$

Так как по (i) операторы $W_{\nu,\nu}$ и $W_{\mu,\mu}$ являются проекторами, то из этих формул следуют требуемые утверждения (см. [5, с. 142, лемма 4.3.2 и с. 141, лемма 4.3.1]).

Теперь мы докажем следующее утверждение.

Теорема V. *Равенство* $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^p$ *эквивалентно тому, что существует система р-матричных единиц* $W_{\mu,\nu} \in \mathbf{M}$ $(\mu, \nu \leqslant p)$ *с единицей* 1 (*см. п.* (iii) *леммы* 2.6.1) *и со следующими свойствами: оператор* $W_{1,1}$ *есть проектор; если* $\mathfrak{M}$ *есть замкнутое пространство, такое, что* $P_{\mathfrak{M}} = W_{1,1}$, *то кольцо* $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$ *алгебраически изоморфно кольцу* $\mathbf{N}$.

(По поводу того, можно ли опустить дополнительные условия, см. приведенное ниже следствие.)[15]

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что указанная система $W_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu \leqslant p)$ существует. Тогда оператор $W_{1,1} \in \mathbf{M}$ является проектором. Пусть пространство $\mathfrak{M}$ таково, что $P_{\mathfrak{M}} = E = W_{1,1}$.

Для каждого оператора $A^0 \in \mathbf{M}$ определим

$$A'_{t,s} = W_{1,s} A^0 W_{t,1} \qquad (t, s \leqslant p). \tag{2.6.α}$$

Ясно, что $A'_{t,s} \in \mathbf{M}$. Кроме того, как легко проверить, $EA'_{t,s} = A'_{t,s}E = A'_{t,s}$ ($E = W_{1,1}$). Следовательно, $A'_{t,s} \in \mathbf{M}^E$. Применим теперь лемму 2.5.1 и образуем

$$A_{t,s} = (A'_{t,s})_{\mathfrak{M}}. \tag{2.6.β}$$

Тогда $A_{t,s} \in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$.

Итак, каждому $A^0 \in \mathbf{M}$ соответствует матрица $\langle A_{t,s} \rangle$ $(t, s \leqslant p)$ порядка p с $A_{t,s} \in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$. Пусть $\mathfrak{J}$ есть множество всех матриц $\langle A_{t,s} \rangle$, сопоставляемых операторам $A^0 \in \mathbf{M}$.

Сейчас мы покажем, что это соответствие осуществляет p-матричный изоморфизм $\mathbf{M}$ в $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ в смысле определения $\mathrm{B_p}$ п. 2.4. Это будет означать, что $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{M}}^p_{(\mathfrak{M})}$, а поскольку $\overline{\mathbf{M}}_{(\mathfrak{M})} = \overline{\mathbf{N}}$, то $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^p$, и, таким образом, доказательство будет завершено.

Доказательство изоморфизма мы разобьем на три шага.

Указанное соответствие взаимно однозначно, т. е. если $A^0, B^0 \in \mathbf{M}$ и $\langle A_{t,s} \rangle = \langle B_{t,s} \rangle$, то $A^0 = B^0$. Действительно, равенство $\langle A_{t,s} \rangle = \langle B_{t,s} \rangle$ означает, что $A_{t,s} =$

---

[15] Заметим, что в этом представлении алгебраический тип $\overline{\mathbf{N}}$ определяется по $\overline{\mathbf{M}}$ и $W_{1,1}$. Определяется ли $\overline{\mathbf{N}}$ только по $\overline{\mathbf{M}}$ — это другой вопрос. Если число p конечно, а $\mathbf{M}$ — фактор, то $\overline{\mathbf{N}}$ действительно определяется по $\overline{\mathbf{M}}$ и p однозначно. В самом деле, если $\mathfrak{M}^{(1)}$ есть область значений оператора $W_{1,1}$ для одного выбора p-матричных единиц, а $\mathfrak{M}^{(2)}$ — для другого выбора, то $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}^{(1)}) = (1/p)\, D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}^{(2)})$. Поэтому, как следует из леммы 2.8.1 (данной статьи), $\mathbf{M}(\mathfrak{M}^{(1)}) = \mathbf{M}_{(\mathfrak{M}^{(2)})}$. Следовательно, $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ зависит лишь от $\mathbf{M}$ и p.

Если, однако, $p = \infty$, то фактор $\mathbf{M}$ имеет бесконечный тип по п. (iii) леммы 2.7.1. При этих условиях знание $\overline{\mathbf{M}}$ недостаточно для однозначного определения $\overline{\mathbf{N}}$, что можно видеть из пункта δ) леммы 3.1.5 ($\overline{\mathbf{M}}$ заменяет $\overline{\mathbf{M}}^\infty$ этой леммы).

$= B_{t,s}$ для t, $s \leqslant p$, и, следовательно, $(A'_{t,s})_{(\mathfrak{M})} = (B'_{t,s})_{(\mathfrak{M})}$, т. е. $A'_{t,s} = B'_{t,s}$, поскольку оба эти оператора $\in \mathbf{M}^E$. Таким образом, $W_{1,s}A^0W_{t,1} = W_{1,s}B^0W_{t,1}$. Умножая это равенство на $W_{s,1}$ слева и на $W_{1,t}$ справа, мы получаем, что $W_{s,s}A^0W_{t,t} = W_{s,s}B^0W_{t,t}$. Суммируя теперь полученное равенство по s и по t, мы приходим к требуемому соотношению $A^0 = B^0$, поскольку по предположению $E_0 = 1 = \sum_{s=1}^{p} W_{s,s}$.

Указанное соответствие есть матричный изоморфизм. Это может быть проверено с помощью определения 2.6.1, равенства $E_0 = \sum_{\mu=1}^{p} W_{\mu,\mu} = 1$, уравнений (2.6. α) и (2.6. β). Действительно, из них следует, что операторам 1, αA^0, A^{0*}, $A^0 + B^0$, A^0B^0 (в $\mathbf{M}$) соответствуют матрицы $\langle \delta_{t,s}E \rangle$, $\langle \alpha A'_{t,s} \rangle$, $\langle A'^{*}_{t,s} \rangle$, $\langle A'_{t,s} + B'_{t,s} \rangle$, $\langle \sum_{r=1}^{p} A_{r,s}B_{t,r} \rangle$, элементы которых принадлежат $\mathbf{M}^E$, или, ввиду уравнения (2.6. β), матрицы $\langle \delta_{t,s}1 \rangle$, $\langle \alpha A_{t,s} \rangle$, $\langle A^{*}_{t,s} \rangle$, $\langle A_{t,s} + B_{t,s} \rangle$, $\langle \sum_{r=1}^{p} A_{r,s}B_{t,r} \rangle$ с элементами, принадлежащими $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$.

Множество $\mathfrak{J}$ содержит все конечные матрицы. Рассмотрим произвольную конечную матрицу $\langle A_{t,s} \rangle$, $A_{t,s} \in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, т. е. для некоторого $q < \infty$ операторы $A_{t,s} = 0$, когда либо $t > q$, либо $s > q$. Пусть операторы $A'_{t,s} \in \mathbf{M}^E$ удовлетворяют соотношению (2.6. β) и

$$A^0 = \sum_{t=1}^{q} \sum_{s=1}^{q} W_{s,1}A'_{t,s}W_{1,t}.$$

Тогда $A^0 \in \mathbf{M}$ и, как следует из определения 2.6.1, имеет место соотношение (2.6. α). Поэтому матрица $\langle A_{t,s} \rangle$ соответствует указанному оператору A^0 и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{J}$.

Необходимость. Предположим, что $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^p$ в смысле определения B_p п. 2.4. Образуем для каждой пары μ, $\nu \leqslant p$ матрицу $\langle \delta_{t,\nu}\delta_{s,\mu}1 \rangle$. Эта матрица, очевидно, конечна и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{J}$. Поэтому она отвечает некоторому элементу кольца $\mathbf{M}$; обозначим этот элемент через $W_{\mu,\nu}$. Тогда из правила умножения матриц следует, что элементы $W_{\mu,\nu}$ удовлетворяют всем соотношениям определения 2.6.1. Теперь применима лемма 2.6.1. В силу этой леммы и леммы 2.5.2 $E_0 = \sum_{\mu=1}^{p} W_{\mu,\mu} = 1$.

Пусть $P_{\mathfrak{M}} = E = W_{1,1}$. Соотношение $A^0 \in \mathbf{M}^E$ означает, что $EA^0 = A^0E = A^0$, или что матрица A^0 имеет вид $\langle \delta_{t,1}\delta_{s,1}A \rangle$, $A \in \mathbf{N}$. Ясно, что это соответствие между $A^0 \in \mathbf{M}^E$ и $A \in \mathbf{N}$ взаимно однозначно и переводит матрицу $E \in \mathbf{M}^E$ (имеющую вид $\langle \delta_{t,1}\delta_{s,1}1 \rangle$) в $1 \in \mathbf{N}$. Кроме того, оно сохраняет операции αA, A^*, $A + B$ и AB. В силу леммы 2.5.1 это означает, что кольцо $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ алгебраически изоморфно $\mathbf{N}$.

Таким образом, все наши требования выполнены.

Следствие. *Для данных $\mathbf{M}$ и p уравнение $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^p$ имеет решение тогда и только тогда, когда в $\mathbf{M}$ существует система p-матричных единиц $W_{\mu,\nu} \in \mathbf{M}$ (μ, $\nu \leqslant p$) с 1.*

Доказательство. Это утверждение становится очевидным, если опустить в доказанной теореме последнее условие, поскольку смысл этого условия состоит лишь в том, чтобы описать $\overline{\mathbf{N}}$ в терминах $W_{\mu,\nu}$.

При некоторых условиях мы можем пойти еще дальше.

Лемма 2.6.2. *Если* $\mathbf{M}$ *не есть фактор типа* (I_n) *и число* $p = 2, 3, \ldots$ *конечно, то всегда существует система* p*-матричных единиц* $W_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu \leqslant p)$ *с единицей* $E_0 = 1$, $W_{\mu,\nu} \in \mathbf{M}$.

Доказательство. Вначале мы построим множество проекторов $E_1, E_2, \ldots$ $\ldots, E_p$ в кольце $\mathbf{M}$, таких, что $D_{\mathbf{M}}(E_i) = D_{\mathbf{M}}(E_1)$ и $\sum_{n=1}^{p} E_n = 1$. Предположим вначале, что $\mathbf{M}$ — фактор типа (II_1). Мы можем считать, что $D_{\mathbf{M}}(1) = 1$. Область значений функции $D_{\mathbf{M}}$ содержит $1/p$ (см. [5, теорема VIII, с. 172]), т. е. существует проектор $E_1 \in \mathbf{M}$, такой, что $D_{\mathbf{M}}(E_1) = 1/p$. Так как $D_{\mathbf{M}}(E_1) = 1/p \leqslant$ $\leqslant 1 - 1/p = D_{\mathbf{M}}(1 - E_1)$, то существует проектор $E_2 \leqslant 1 - E_1$, такой, что $D_{\mathbf{M}}(E_2) = 1/p = D_{\mathbf{M}}(E_1)$ (см. [5, лемма 8.3.1, с. 160]). Далее, $D_{\mathbf{M}}(1 - E_1 - E_2) =$ $= 1 - 2/p$. Если $p > 2$, то можно найти $E_3 \leqslant 1 - E_1 - E_2$, такое, что $D_{\mathbf{M}}(E_3) =$ $= 1/p$. Продолжая таким образом, мы построим множество p попарно ортогональных проекторов $E_1, \ldots, E_p \in \mathbf{M}$, таких, что $\sum_{n=1}^{p} E_n = 1$, $D_{\mathbf{M}}(E_n) = 1/p$. Если фактор $\mathbf{M}$ имеет бесконечный тип, то, модифицировав доказательство леммы 7.2.3 работы [5, с 157], можно построить p попарно ортогональных эквивалентных в смысле размерности замкнутых подпространств $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$ в $\mathfrak{H}$, которые вместе порождают $\mathfrak{H}$: для этого нужно только разбить множества $\mathbf{R}_i$ на p подмножеств, а не на два. Тогда проекторы E_i на $\mathfrak{M}_i$ обладают свойствами $\sum_{n=1}^{p} E_n = 1$, $D_{\mathbf{M}}(E_n) = \infty = D_{\mathbf{M}}(E_1)$.

Поскольку $D_{\mathbf{M}}(E_t) = D_{\mathbf{M}}(E_1)$, то существует частично изометричный оператор $W_{t,1} \in \mathbf{M}$, переводящий пространство $\mathfrak{M}_1$ в пространство $\mathfrak{M}_t$ (по определению функции размерности). Если теперь определить оператор $W_{t,s}$ формулой $W_{t,s} =$ $= W_{t,1} W_{s,1}^*$, то свойства частично изометричных операторов (см. [5, п. 4.3]) прямо обеспечивают справедливость всех соотношений определения 2.6.2. Таким образом, операторы $W_{t,s}$ образуют множество p-матричных единиц с $E_0 = 1$, $W_{t,s} \in \mathbf{M}$.

Лемма 2.6.3. *Если* $\mathbf{M}$ *— фактор типа* (I_n)*, то* $\mathbf{M}$ *обладает* p*-матричными единицами с* $E_0 = 1$ *тогда и только тогда, когда* n *делится на* p.

Доказательство. *Необходимость.* Если $\mathbf{M}$ имеет систему p-матричных единиц с $E_0 = 1$, то по лемме 2.6.1 операторы $W_{1,1}, \ldots, W_{p,p}$ образуют p попарно ортогональных проекторов, имеющих одинаковую относительную размерность, и сумма этих проекторов равна единице. Отсюда следует, что $D_{\mathbf{M}}(W_{t,t}) =$ $= (1/p) D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})$. Если $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = n$ и $D_{\mathbf{M}}(W_{t,t}) = (1/p) D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})$ есть целое число, то n делится на p (см. [5, теорема VIII, с. 172]).

Достаточность. Если n делится на p, то можно найти p попарно ортогональных проекторов $E_1, \ldots, E_p \in \mathbf{M}$ одинаковой размерности, таких, что $\sum_{n=1}^{p} E_n = 1$. Действительно, если $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = n$, то можно найти проектор $E_1 \in \mathbf{M}$, такой, что $D_{\mathbf{M}}(E_1) = n/p$, и, продолжая этот процесс так же, как и в лемме 2.6.2, можно найти $E_2, \ldots, E_p$. Остальная часть доказательства этой леммы применима и в настоящей ситуации.

Из теоремы V выводится следующее утверждение.

Лемма 2.6.4. (i) *Если* $\mathbf{M}$ *не есть фактор типа* (I_n) *и* p *— конечное целое число, то существует кольцо* $\mathbf{N}$*, такое, что* $\mathbf{N}^p = \overline{\mathbf{M}}$.

(ii) *Если* $\mathbf{M}$ *есть фактор типа* (I_n), *то кольцо* $\mathbf{N}$, *такое, что* $\overline{\mathbf{N}}^p = \overline{\mathbf{M}}$, *существует тогда и только тогда, когда* n *делится на* p.

(iii) *Если существует кольцо* $\mathbf{N}$, *такое, что* $\overline{\mathbf{N}}^p = \overline{\mathbf{M}}$ *для* $p<\infty$, $p=2, 3,\ldots$, *то существует пространство* $\mathfrak{M}$, *такое, что* $\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}} = \overline{\mathbf{N}}$ и $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})=(1/p)D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})$.

Как было замечено в примеч. 15, мы можем дополнительно утверждать, что имеет место следующий факт.

Лемма 2.6.5. *Если* p *конечно,* $\mathbf{M}$ — *фактор и* $\mathbf{N}$ *таково, что* $\overline{\mathbf{N}}^p = \overline{\mathbf{M}}$, *то алгебраический тип* $\overline{\mathbf{N}}$ *определен однозначно.*

2.7. Нам осталось рассмотреть структуру кольца $\mathbf{N}$ и случай $p = \infty$.

Лемма 2.7.1. *Для произвольного фиксированного* $p = 1, 2, \ldots, \infty$:

(i) $\overline{\mathbf{N}}$ *есть фактор тогда и только тогда, когда* $\overline{\mathbf{N}}^p$ *есть фактор.*

(ii) *Если* $\overline{\mathbf{N}}$, $\overline{\mathbf{N}}^p$ — *факторы, то они принадлежат к одному типу* (I), (II), (III).

(iii) *Если* $\overline{\mathbf{N}}$, $\overline{\mathbf{N}}^p$ — *факторы, то* $\overline{\mathbf{N}}^p$ *конечен тогда и только тогда, когда* $\overline{\mathbf{N}}$ *конечен и* $p<\infty$.

Доказательство. Пусть $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^p$.

Докажем (i). Оператор $A^0 \in \mathbf{M}$ принадлежит центру $\mathbf{M}$ тогда и только тогда, когда его матрица $\langle A_{t,s}\rangle$ (все $A_{t,s} \in \mathbf{N}$) коммутирует со всеми матрицами $\langle B_{t,s}\rangle \in \mathfrak{J}$. Для этого необходимо, чтобы эта матрица коммутировала со всеми конечными матрицами $\langle B_{t,s}\rangle$ (все $B_{t,s} \in \mathbf{N}$, см. $\mathrm{B_p}$). Отсюда немедленно следует, что $A_{t,s} = \delta_{t,s}A$ (t, $s \leqslant p$), где оператор A принадлежит центру кольца $\mathbf{N}$. Ясно, что это условие является также и достаточным. Поэтому элементы A^0 центра кольца $\mathbf{M}$ имеют вид $A^0 = \alpha 1$ (что соответствует матрицам вида $\langle \alpha\delta_{t,s}1\rangle$) тогда и только тогда, когда центр кольца $\mathbf{N}$ состоит из элементов $\alpha 1$, т. е. $\mathbf{M}$ является фактором тогда и только тогда, когда фактором является $\mathbf{N}$.

Это завершает доказательство.

(ii). По теореме V кольцо $\mathbf{N}$ изоморфно некоторому $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$. Поэтому наше утверждение следует из леммы 11.4.3 [5, с. 189].

(iii). Операторы $W_{\mu,\mu}$ ($\mu \leqslant p$) являются попарно ортогональными проекторами, принадлежащими $\mathbf{M}$, и все они имеют одинаковую относительную размерность в $\mathbf{M}$ благодаря пунктам (i), (ii) леммы 2.6.1. Следовательно [16],

$$D_{\mathbf{M}}(1) = \sum_{\mu=1}^{p} D_{\mathbf{M}}(W_{\mu,\mu}) = pD_{\mathbf{M}}(W_{1,1}). \tag{2.7.α}$$

Далее, оператор $W_{1,1}$ не равен нулю, так как тогда все операторы $W_{\mu,\mu}$ равнялись бы нулю и $\sum_{\mu=1}^{p} W_{\mu,\mu} = 0$ для $p = 1, 2, \ldots, \infty$. Поэтому $D_{\mathbf{M}}(W_{1,1}) \neq 0$. Далее, фактор $\mathbf{M}$ имеет конечный тип тогда и только тогда, когда $D_{\mathbf{M}}(1)$ конечно. В силу сказанного выше это эквивалентно утверждению, что величины p и $D_{\mathbf{M}}(W_{1,1})$ конечны, а конечность $D_{\mathbf{M}}(W_{1,1}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ $(P_{\mathfrak{M}} = W_{1,1})$ в соот-

---

[16] Здесь, так же как и в некоторых последующих случаях (доказательство леммы 5.3.4; III в п. 5.5), удобно придерживаться соглашения, что $\infty \cdot 0 = 0$.

ветствии с леммой 11.4.3 работы [5, с. 189] эквивалентна тому, что $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ имеет конечный тип. Таким образом, по теореме V и $\mathbf{N}$ имеет конечный тип.

Тем самым доказательство завершено.

2.8. Пусть $\mathbf{M}$ есть фактор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Обозначим, как обычно, через $D_{\mathbf{M}}(E)$ и $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ $(E = P_{\mathfrak{M}} \in \mathbf{M})$ функции относительной размерности. Рассмотрим вновь кольца $\mathbf{M}^E$ и $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, введенные в начале п. 2.5.

Лемма 2.8.1. *Если $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — два замкнутые подпространства, которые* $\eta\mathbf{M}$ и такие, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_1) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_2)$, *то кольца* $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1)}$ *и* $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_2)}$ *(в $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ соответственно) пространственно изоморфны.*

Доказательство. Так как $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_1) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_2)$, то существует частично изометричный оператор $U \in \mathbf{M}$, переводящий $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}_2$. Это есть однозначное изоморфное отображение $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}_2$, переводящее, очевидно, $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1)}$ в $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_2)}$. Тем самым требуемый пространственный изоморфизм установлен.

В оставшейся части этой главы мы будем предполагать, что $\mathbf{M}$ есть фактор конечного типа.

Рассмотрим вещественное число α и проектор $E \in \mathbf{M}$, или, что эквивалентно, замкнутое подпространство $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ с $E = P_{\mathfrak{M}}$. Мы предположим, что $E \neq 0$, т. е. что $\mathfrak{M} \neq \{0\}$ и что

$$\alpha = D_{\mathbf{M}}(E)/D_{\mathbf{M}}(1). \tag{2.8.α}$$

Тогда по лемме 2.8.1 $\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}$ зависит лишь от $\mathbf{M}$ и α, но не от E, $\mathfrak{M}$ (пространственный изоморфизм влечет алгебраический изоморфизм).

Рассмотрим теперь два алгебраически изоморфных кольца $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$. Выберем проектор $E_1 \in \mathbf{M}_1$, такой, что $\alpha = D_{\mathbf{M}_1}(E_1)/D_{\mathbf{M}_1}(1)$. Тогда изоморфизм переводит E_1 в некоторый проектор $E_2 \in \mathbf{M}_2$, такой, что $\alpha = D_{\mathbf{M}_2}(E_2)/D_{\mathbf{M}_2}(1)$. Пусть пространства $\mathfrak{M}_1\eta\mathbf{M}_1$, $\mathfrak{M}_2\eta\mathbf{M}_2$ таковы, что $P_{\mathfrak{M}_1} = E_1$, $P_{\mathfrak{M}_2} = E_2$. Изоморфизм переводит $\mathbf{M}_1^{E_1}$ в $\mathbf{M}_2^{E_2}$, и в частности E_1 в E_2 и сохраняет операции αA, A^*, $A + B$, AB. Следовательно, по лемме 2.5.1 он порождает алгебраический изоморфизм колец $(\mathbf{M}_1)_{(\mathfrak{M}_1)}$ и $(\mathbf{M}_2)_{(\mathfrak{M}_2)}$. Таким образом, алгебраический тип $\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}$ (в предположении его существования) однозначно определяется $\overline{\mathbf{M}}$ и α. Мы обозначим его через $\overline{\mathbf{M}}^{\alpha}$.

Это обозначение могло бы быть не согласовано с обозначениями теоремы IV при $p = \alpha = 1$, однако в этом случае $\overline{\mathbf{M}}^1$ существует и равно $\overline{\mathbf{M}}$ относительно обоих определений.

Возможные значения α, для которых может быть образовано кольцо $\overline{\mathbf{M}}^{\alpha}$, заполняют в точности область значений функции $D_{\mathbf{M}}(E)/D_{\mathbf{M}}(1)$, где E пробегает все проекторы, принадлежащие $\mathbf{M}$, $E \neq 0$. Это есть множество $(1/n, 2/n, \ldots, 1)$, если $\overline{\mathbf{M}}$ имеет тип (I_n), и множество $0 < \alpha \leqslant 1$, если $\overline{\mathbf{M}}$ имеет тип (II_1).

Суммируя сказанное, мы имеем следующий результат.

Теорема VI. *Кольцо $\overline{\mathbf{M}}^{\alpha}$ существует тогда и только тогда, когда α принадлежит множеству $(1/n, 2/n, \ldots, 1)$, если $\mathbf{M}$ имеет тип (I_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, и множеству $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если $\mathbf{M}$ имеет тип (II_1).*

Отметим, что здесь не возникает противоречий с обозначениями теоремы IV

Поскольку относительная размерность $D_{\mathbf{M}}(E)$ допускает описание, инвариантное относительно сопряженных изоморфизмов (см. замечание в конце п. 2.3), то

$$(\overline{\mathbf{M}}^c)^\alpha = (\overline{\mathbf{M}}^\alpha)^c, \tag{2.8.β}$$

где α принадлежит области значений, указанной в теореме VI.

Рассмотрим далее два проектора $E, F \in \mathbf{M}$, $E, F \neq 0$ и $E \leqslant F$, или, что эквивалентно, замкнутых подпространства $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \eta \mathbf{M}$ с $P_{\mathfrak{M}} = E$, $P_{\mathfrak{N}} = F$. Ясно, что $\mathfrak{M} \neq \{0\}$, $\mathfrak{N} \neq \{0\}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Для того чтобы избежать путаницы, будем обозначать через 1 единичный оператор в $\mathfrak{H}$ и через $1' = F_{(\mathfrak{N})}$ — единичный оператор в $\mathfrak{N}$. Пусть

$$\alpha = \frac{D_{\mathbf{M}}(F)}{D_{\mathbf{M}}(1)}, \qquad \beta = \frac{D_{\mathbf{M}(\mathfrak{N})}(E_{(\mathfrak{N})})}{D_{\mathbf{M}(\mathfrak{N})}(1')} = \frac{D_{\mathbf{M}}(E)}{D_{\mathbf{M}}(F)}.$$

Тогда ясно, что $\alpha\beta = D_{\mathbf{M}}(E)/D_{\mathbf{M}}(1)$ и $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})} = (\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})})_{(\mathfrak{M})}$. Из наших определений непосредственно следует, что

$$(\overline{\mathbf{M}}^\alpha)^\beta = \overline{\mathbf{M}}^{\alpha\beta}, \tag{2.8.γ}$$

где α, β лежат в области значений, указанной в теореме VI.

2.9. Продолжим рассмотрения предыдущего пункта.

Лемма 2.9.1. *Если p конечно и $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — факторы конечного типа, то равенство $\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{M}}^{1/p}$ эквивалентно равенству $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^p$ (утверждение «$\overline{\mathbf{M}}^{1/p} = \overline{\mathbf{N}}$» подразумевает, что «$\overline{\mathbf{M}}^{1/p}$ существует»).*

Доказательство. Предположим, что $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^p$. Из теоремы V следует, что существует проектор E, такой, что $D_{\mathbf{M}}(E) = (1/p)\, D_{\mathbf{M}}(1)$ и $\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{M}}_{(\mathfrak{M})}$, где $E = P_{\mathfrak{M}}$. Поэтому согласно данному выше определению $\overline{\mathbf{M}}^{1/p} = \overline{\mathbf{N}}$.

Наоборот, допустим, что $\overline{\mathbf{M}}^{1/p} = \overline{\mathbf{N}}$. Тогда $1/p$ лежит в области значений, указанной в теореме VI, и, следовательно, если $\overline{\mathbf{M}}$ — фактор типа (I_n), то n делится на p. В силу лемм 2.6.2, 2.6.3 в этом случае существует кольцо $\mathbf{N}_0$, такое, что $\overline{\mathbf{N}}_0^p = \overline{\mathbf{M}}$. Следовательно, по доказанному $\overline{\mathbf{N}}_0 = \overline{\mathbf{M}}^{1/p}$, т. е. $\overline{\mathbf{N}}_0 = \overline{\mathbf{N}}$. Следовательно, $\overline{\mathbf{N}}^p = \overline{\mathbf{N}}_0^p = \overline{\mathbf{M}}$.

Это завершает доказательство.

Лемма 2.9.2. *Если $\overline{\mathbf{M}}^\alpha$ существует (в смысле теоремы VI) и $p\alpha = q\beta$ $(p, q = 1, 2, \ldots)$, то $(\overline{\mathbf{M}}^\alpha)^p = (\overline{\mathbf{M}}^q)^\beta$ (это включает в себя утверждение о существовании $(\overline{\mathbf{M}}^q)^\beta$).*

Доказательство. Имеем $p\alpha = q\beta$, т. е. $\alpha/q = \beta/p$. Кроме того, $\overline{\mathbf{M}}^\alpha$ существует. Сейчас мы сделаем несколько преобразований, законность которых есть следствие этих двух фактов. В силу соотношения (2.8.γ) и леммы 2.9.1

$$\overline{\mathbf{M}}^\alpha = ((\overline{\mathbf{M}}^q)^{1/q})^\alpha = (\overline{\mathbf{M}}^q)^{\alpha/q} = (\overline{\mathbf{M}}^q)^{\beta/p}.$$

Следовательно, по лемме 2.9.1

$$(\overline{\mathbf{M}}^\alpha)^p = ((\overline{\mathbf{M}}^q)^{\beta/p})^p = (((\overline{\mathbf{M}}^q)^\beta)^{1/p})^p = (\overline{\mathbf{M}}^q)^\beta.$$

Лемма 2.9.3. *Рассмотрим для данного алгебраического типа* $\overline{\mathbf{M}}$ *множество допустимых значений* α *(указанных в теореме* VI) *и* $p = 1, 2, \ldots$ *Тогда:*

(i) *Область значений величины* $\theta = p\alpha$ *есть множество* $(1/n, 2/n, \ldots)$, *если* $\mathbf{M}$ — *фактор типа* (I_n), *и множество* $0 < \theta < \infty$, *если* $\mathbf{M}$ — *фактор типа* (II_1).

(ii) *Кольцо* $(\overline{\mathbf{M}}^{\alpha})^p$ *зависит лишь от* $\theta = p\alpha$, *но не от конкретных значений* α *и* p.

Доказательство. (i). Немедленно следует из теоремы V.

(ii). По лемме 2.9.2, если $p\alpha = q\beta$, то $(\overline{\mathbf{M}}^{\alpha})^p = (\overline{\mathbf{M}}^{q})^{\beta}$ и $(\overline{\mathbf{M}}^{\beta})^q = (\overline{\mathbf{M}}^{q})^{\beta}$, т. е. $(\overline{\mathbf{M}}^{\alpha})^p = (\overline{\mathbf{M}}^{\beta})^q$.

Мы обозначим это кольцо $(\overline{\mathbf{M}}^{\alpha})^p$, $\theta = \alpha p$, через $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$.

Это обозначение согласовано с обозначениями теорем IV и VI, что легко видеть, если положить $\alpha = 1$ или $p = 1$ соответственно.

Суммируя сказанное, мы имеем следующий результат.

Теорема VII. *Кольцо* $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$ *существует тогда и только тогда, когда* θ *принадлежит множеству* $(1/n, 2/n, \ldots)$, *если* $\mathbf{M}$ *есть фактор типа* (I_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, *и множеству* $(0 < \theta < \infty)$, *если* $\mathbf{M}$ *есть фактор типа* (II_1).

Это обозначение согласовано с обозначениями теорем IV и VI.

Комбинируя соотношения (2.4.α) и (2.8.β), имеем

$$(\overline{\mathbf{M}}^{c})^{\theta} = (\overline{\mathbf{M}}^{\theta})^{c} \qquad (2.9.\alpha)$$

(θ принадлежит множеству теоремы VII).

Кроме того, используя соотношения (2.4. β), (2.8.γ) и лемму 2.9.2, получаем, что

$$(((\overline{\mathbf{M}}^{\alpha})^{p})^{\beta})^{q} = (((\overline{\mathbf{M}}^{\alpha})^{\beta})^{p})^{q} = (\overline{\mathbf{M}}^{\alpha\beta})^{pq}.$$

Поэтому если положить $\theta = p\alpha$, $\xi = q\beta$, то

$$(\overline{\mathbf{M}}^{\theta})^{\xi} = (\overline{\mathbf{M}}^{\xi})^{\theta} = \overline{\mathbf{M}}^{\xi\theta} \qquad (2.9.\beta)$$

(θ и ξ принадлежат множеству теоремы VII; по поводу бесконечных показателей см. замечание в конце п. 2.5).

2.10. Обозначим множество тех θ, для которых $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$ существует и равно $\overline{\mathbf{M}}$, через

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\overline{\mathbf{M}}). \qquad (2.10.\alpha)$$

Ясно, что $1 \in \mathfrak{G}$, и если $\theta, \xi \in \mathfrak{G}$, то $\theta\xi \in \mathfrak{G}$. Так как $(\overline{\mathbf{M}}^{\theta})^{1/\theta}$ существует и равно $\overline{\mathbf{M}}$, то из $\overline{\mathbf{M}}^{\theta} = \overline{\mathbf{M}}$ следует, что $\overline{\mathbf{M}}^{1/\theta} = \overline{\mathbf{M}}$, т. е. если $\theta \in \mathfrak{G}$, то $1/\theta \in \mathfrak{G}$ (все эти соотношения выполнены ввиду (2.9.β)).

Теорема VIII. *Множество* $\mathfrak{G}$ *есть подгруппа группы* P, *мультипликативной группы вещественных чисел* θ, $0 < \theta < \infty$. *Мы будем называть* $\mathfrak{G}$ *фундаментальной группой* $\overline{\mathbf{M}}$.

Некоторые свойства $\mathfrak{G}$.

Лемма 2.10.1. *Равенство* $\overline{\mathbf{M}}^{\theta} = \overline{\mathbf{M}}^{\xi}$ *(предполагается, что оба кольца существуют) эквивалентно тому, что* $\theta/\xi \in \mathfrak{G}$.

Доказательство. *Достаточность*. Если $\theta/\xi \in \mathfrak{G}$, то $\overline{\mathbf{M}}^{\theta/\xi} = \overline{\mathbf{M}}$. Поэтому $\overline{\mathbf{M}}^{\theta} = (\overline{\mathbf{M}}^{\theta/\xi})^{\xi} = \overline{\mathbf{M}}^{\xi}$.

Необходимость. Предположим, что $\overline{\mathbf{M}}^{\theta} = \overline{\mathbf{M}}^{\xi}$. $(\overline{\mathbf{M}}^{\xi})^{1/\xi}$ существует и равно $\overline{\mathbf{M}}$. Следовательно, $(\overline{\mathbf{M}}^{\theta})^{1/\xi} = \overline{\mathbf{M}}^{\theta/\xi}$ существует и равно $\overline{\mathbf{M}}$. Таким образом, $\theta/\xi \in \mathfrak{G}$.

Лемма 2.10.2. *Алгебраические типы $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}}^c$ и все $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$ имеют одну и ту же фундаментальную группу.*

Доказательство. Для $\overline{\mathbf{M}}^c$ следует из (2.9.α), для $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$ — из леммы 2.10.1.

Прежде чем закончить эту главу, мы выясним ситуацию для дискретных конечных факторов, т. е. факторов типа (I_n), $n = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим кольцо Θ операторов вида $\alpha 1$. Это кольцо есть, очевидно, прототип факторов типа (I_1). Оно изоморфно кольцу всех комплексных чисел.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.10.3. *Если* $\mathbf{M}$ *есть фактор* (I_n), $n = 1, 2, \ldots,$ *то* $\mathbf{M}^{\alpha}$ (α *конечно*) *существует тогда и только тогда, когда* $n\alpha = 1, 2, \ldots,$ *и в этом случае* $\overline{\mathbf{M}}^{\alpha} = \overline{\Theta}^{n\alpha}$.

Доказательство. Указанная область значений α совпадает с областью значений в теореме VII. Пусть $n\alpha = k$. Тогда

$$\overline{\mathbf{M}}^{\alpha} = \overline{\mathbf{M}}^{k/n} = (\overline{\mathbf{M}}^{1/n})^{k}.$$

Рассмотрим теперь $\overline{\mathbf{M}}^{1/n}$. Воспользуемся определением п. 2.8, предшествующим теореме VII, и рассмотрим проектор E, для которого величина $D_{\mathbf{M}}(E)/D_{\mathbf{M}}(1)$ принимает минимальное значение, равное $1/n$. Тогда $\mathbf{M}^{E}$ есть множество элементов вида αE (см. [5, с. 144, последняя часть доказательства леммы 5.1.3]; впрочем, это может быть доказано и непосредственно). Следовательно, $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ есть множество операторов вида $\alpha \cdot 1$ в пространстве $\mathfrak{M}$, т. е.

$$\overline{\mathbf{M}}^{1/n} = \overline{\mathbf{M}}_{(\mathfrak{M})} = \overline{\Theta}.$$

Следовательно,

$$\overline{\mathbf{M}}^{\alpha} = \overline{\Theta}^{k}, \qquad k = n\alpha,$$

что и требовалось.

Следствие. *Если фактор* $\mathbf{M}$ *имеет тип* (I_n), $n = 1, 2, \ldots,$ *то* $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\Theta}^{n}$.

Доказательство. Достаточно в приведенной лемме взять $\alpha = 1$.

Лемма 2.10.4. *Если фактор* $\mathbf{M}$ *имеет тип* (I_n), $n = 1, 2, \ldots,$ *то* $\overline{\mathbf{M}}^c = \overline{\mathbf{M}}$ *и* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathbf{M}) = (1)$.

Доказательство[17]. $\overline{\mathbf{M}}^c = \overline{\mathbf{M}}$. Ясно, что $\overline{\Theta}^c = \overline{\Theta}$, поэтому из следствия к лемме 2.10.3 и соотношения (2.4.α) (или (2.9.α)) вытекает, что $\overline{\mathbf{M}}^c = \overline{\mathbf{M}}$.

$\mathfrak{G} = (1)$. По лемме 2.10.3 и следствию к ней $\overline{\mathbf{M}}^{\alpha}$ имеет тип (I_k), $k = n\alpha$. Поэтому из равенства $\overline{\mathbf{M}}^{\alpha} = \overline{\mathbf{M}}$ следует, что $n\alpha = n$, или $\alpha = 1$. Следовательно, $\mathfrak{G} = (1)$.

---

[17] Оба утверждения могут быть доказаны при помощи непосредственных рассмотрений матриц.

Справедливость или несправедливость уравнения $\overline{M}^c = \overline{M}$, так же как и понятие фундаментальной группы $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\overline{M})$, являются инвариантами M относительно алгебраических изоморфизмов. Лемма 2.10.4 описывает их поведение для дискретных конечных факторов M, т. е. для факторов типа (I_n), $n = 1, 2, \ldots$ Но по-настоящему интересными факторами являются остальные конечные факторы, т. е. непрерывные факторы типа (II_1). Мы увидим, что не все они изоморфны друг другу, но мы сможем дифференцировать их с помощью других инвариантов (см. конец п. 5.6 и начало п. 6.1).

Для всех $\overline{M}$ типа (II_1), для которых нам удалось достичь успеха в проблеме их классификации, всегда оказывается $\overline{M}^c = \overline{M}$ и $\overline{M}^\theta = \overline{M}$ (θ лежит в множестве теоремы VII), т. е. $\mathfrak{G} = P$ (см. теорему XV и конец п.5.6; для сравнения см. также лемму 2.10.4).

Однако нет никаких оснований считать, что указанные соотношения справедливы всегда, и изучение свойств используемых нами инвариантов в случае факторов общего вида остается открытым вопросом.

Глава III

КЛАССИФИКАЦИЯ ВСЕХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТИПОВ В ТЕРМИНАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТИПОВ

3.1. Мы классифицировали все кольца операторов M в соответствии с их алгебраическим типом, т. е. в соответствии с понятием алгебраического изоморфизма. Теперь мы введем более грубую классификацию — так называемый род, состоящий из одного или более алгебраических типов. В этой новой классификации мы будем вынуждены, однако, ограничиться лишь факторами M.

Для того чтобы дать соответствующие определения, нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. На протяжении этой главы под M будет пониматься фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Как и прежде, мы будем обозначать через $D_M(E)$ и $D_M(\mathfrak{M})$ функцию относительной размерности в M, определенную для проекторов $E \in M$ или подпространств $\mathfrak{M} \eta M$.

Лемма 3.1.1. *Если $\mathfrak{M}$ есть замкнутое подпространство,* $\mathfrak{M} \eta M$, $\mathfrak{M} \neq \{0\}$, $D_M(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}) = \infty$, *то*

$$\overline{M} = (\overline{M_{(\mathfrak{M})}})^\infty.$$

Доказательство. При сделанных предположениях пространство $\mathfrak{M}$ «делит» $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$ в бесконечном отношении, т. е. существует бесконечное число попарно ортогональных замкнутых подпространств $\mathfrak{M}_2', \mathfrak{M}_3', \ldots$, таких, что $D_M(\mathfrak{M}_i') = D_M(\mathfrak{M})$ и $\mathfrak{M}_i' \subset \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$ для $i = 2, 3, \ldots$ Если подпространство $\mathfrak{M}$ относительно конечномерно, то это очевидно. Если же $\mathfrak{M}$ относительно бесконечномерно, то можно применить вариант доказательства леммы 7.2.3 работы [5, с. 157] к пространству $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$, который показывает, что существует счетная совокупность попарно ортогональных замкнутых подпространств $\mathfrak{M}_2', \mathfrak{M}_3', \ldots$, каждое из которых относительно бесконечномерно (для доказательства этого

утверждения достаточно в лемме 7.2.3 работы [5] разбить каждое пространство $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ не на два подпространства, а на бесконечное число подпространств).

Применяя теперь лемму 7.1.2 работы [5, с. 155] к пространствам $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}$, мы видим, что пространство $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}$ разбивается в счетную совокупность попарно ортогональных подпространств $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$, таких, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_i) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ для $i = 2, 3, \ldots$ Пусть $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$.

Используя вторую часть доказательства леммы 2.6.2, мы теперь получаем систему ∞-матричных единиц $W_{\mu,\nu}$ в кольце $\mathbf{M}$, причем $W_{\mu,\mu} = P_{\mathfrak{M}_\mu}$, $W_{1,1} = P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}}$. В самом деле, в наших рассуждениях конечность p нигде не предполагалась. Далее, $E_0 = \sum_{\mu=1}^{\infty} W_{\mu,\mu} = W_{1,1} + \sum_{\mu=2}^{\infty} W_{\mu,\mu} = P_{\mathfrak{M}_1} + \sum_{\mu=2}^{\infty} P_{\mathfrak{M}_\mu} = P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}}$. Таким образом, желаемый результат следует из теоремы V п. 2.6.

Лемма 3.1.2. *Если $\mathfrak{M} \neq \{0\}$ есть замкнутое подпространство, $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}$ имеет бесконечный тип, то*

$$\overline{\mathbf{M}} = (\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}})^{\infty}.$$

Доказательство. Если $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}) = \infty$, то этот результат следует из леммы 3.1.1. Поэтому мы можем предполагать, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M})$ конечно. Так как фактор $\mathbf{M}$ имеет бесконечный тип, то $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})$ бесконечно и, следовательно, $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) = D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) - D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M})$ также бесконечно.

Поскольку $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})$ бесконечно, то по лемме 2.7.3 работы [5, с. 157] существует замкнутое подпространство $\mathfrak{N}$, такое, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$ и $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N})$ также бесконечны. Следовательно, по лемме 2.8.1 $\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}} = \overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}}$ (нам нужен лишь алгебраический, а не пространственный изоморфизм); ввиду леммы 3.1.1 $\overline{\mathbf{M}} = (\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}})^{\infty}$. Учитывая оба равенства, имеем $\overline{\mathbf{M}} = (\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}})^{\infty}$.

Лемма 3.1.3. *Фактор $\mathbf{M}$ имеет бесконечный тип тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{M}}^{\infty}.$$

Доказательство. *Достаточность.* Немедленно следует из пункта (iii) леммы 2.7.1.

Необходимость. Достаточно в лемме 3.1.2 положить $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$.

Определение 3.1.1. *Если для двух факторов $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$*

$$\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}$$

при соответствующем выборе замкнутого подпространства $\mathfrak{M} \neq \{0\}$ и $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ фактора $\mathbf{M}$, то мы скажем, что $\overline{\mathbf{M}}$ есть кратное $\overline{\mathbf{N}}$, , или что $\overline{\mathbf{N}}$ есть делитель $\overline{\mathbf{M}}$.

Ясно, что это есть соотношение между $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{N}}$. (См. в связи с этим аргументы, предшествующие теореме VI в п. 2.8.) Ясно также, что это свойство транзитивно.

Лемма 3.1.4. *$\overline{\mathbf{N}}$ есть делитель $\overline{\mathbf{M}}$ тогда и только тогда, когда* α) $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}$, *если $\overline{\mathbf{N}}$ имеет бесконечный тип;* β) $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^{\theta}$, *где $\theta \geqslant 1$ принадлежит об-*

ласти значений теоремы VII *или теоремы* IV′ (*т. е.* $\theta = \infty$), *если* $\overline{\mathbf{N}}$ *имеет конечный тип.*

Доказательство. α). *Достаточность* очевидна.

Необходимость. Так как $\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}$ имеет бесконечный тип, то $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$ бесконечно по лемме 11.4.3 работы [5, с. 189]. Поэтому тип фактора $\mathbf{M}$ бесконечен и, таким образом, по лемме 3.1.2. $\overline{\mathbf{M}} = (\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}})^{\infty} = \overline{\mathbf{N}}^{\infty}$. С другой стороны, $\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{N}}^{\infty}$ по лемме 3.1.3. Таким образом, $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}$.

β). *Достаточность.* θ конечно: в этом случае $\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{M}}^{\alpha}$, где $\alpha = 1/\theta < 1$. Поэтому нужное нам утверждение следует из определения $\overline{\mathbf{M}}^{\alpha}$ для $\alpha \leqslant 1$ (см. п. 2.8). Случай бесконечного θ непосредственно следует из теоремы V.

Необходимость. Фактор $\overline{\mathbf{M}}$ имеет конечный тип: ясно, что $\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}} = \overline{\mathbf{M}}^{\alpha}$, где $\alpha = D_{\mathbf{M}}(E)/D_{\mathbf{M}}(1) \leqslant 1$ ($E = P_{(\mathfrak{M})}$). Поэтому $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{N}}^{\theta}$, где $\theta = 1/\alpha \geqslant 1$. Если фактор $\overline{\mathbf{M}}$ имеет бесконечный тип, то по лемме 3.1.2. $\overline{\mathbf{M}} = (\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}})^{\infty} = \overline{\mathbf{N}}^{\infty}$.

Лемма 3.1.5. *Следующие четыре утверждения эквивалентны друг другу:*

α) $\overline{\mathbf{M}}$ *есть или кратное, или делитель* $\overline{\mathbf{N}}$;

β) $\overline{\mathbf{M}}$ *и* $\overline{\mathbf{N}}$ *имеют общее кратное*;

γ) $\overline{\mathbf{M}}$ *и* $\overline{\mathbf{N}}$ *имеют общий делитель*;

δ) $\overline{\mathbf{M}}^{\infty} = \overline{\mathbf{N}}^{\infty}$.

Доказательство. Импликации $\alpha) \to \beta)$, $\alpha) \to \gamma)$ очевидны. Далее, импликация $\delta) \to \beta)$ следует из теоремы V, так как эта теорема показывает, что $\overline{\mathbf{M}}^{\infty} = \overline{\mathbf{N}}^{\infty}$ являются кратными $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{N}}$.

Докажем теперь, что $\beta) \to \alpha)$.

Пусть $\overline{\mathbf{L}}$ есть общее кратное $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{N}}$ и пусть с $\overline{\mathbf{L}}$ ассоциированы замкнутые подпространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, так что $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{L}_{(\mathfrak{M})}}$ и $\overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{L}_{(\mathfrak{N})}}$. Так как $\mathbf{L}$ является фактором, то либо $\mathfrak{M}$ имеет одинаковую относительную размерность (в $\mathbf{L}$) с $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$, либо $\mathfrak{N}$ имеет одинаковую относительную размерность с $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ (см. [5, с. 153, лемма 6.2.3, или с. 154, теорема VI]). Ввиду симметрии мы предположим, что выполнено первое. По лемме 2.8.1 мы можем заменить $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}'$, т. е. можно предполагать, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Таким образом, $\overline{(\mathbf{L}_{(\mathfrak{N})})_{(\mathfrak{M})}} = \overline{\mathbf{L}_{(\mathfrak{M})}}$, т. е. $\overline{\mathbf{L}_{(\mathfrak{N})}}$ есть кратное $\overline{\mathbf{L}_{(\mathfrak{M})}}$. Поэтому $\overline{\mathbf{N}}$ есть кратное $\overline{\mathbf{M}}$.

Наконец, покажем, что $\gamma) \to \delta)$.

Пусть $\overline{\mathbf{K}}$ есть общий делитель $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{N}}$. Так как $\overline{\mathbf{M}}$ есть делитель $\overline{\mathbf{M}}^{\infty}$ по теореме V, то $\overline{\mathbf{K}}$ есть также делитель $\overline{\mathbf{M}}^{\infty}$. Далее, $\overline{\mathbf{M}}^{\infty}$ имеет бесконечный тип по п. (iii) леммы 2.7.1. Поэтому $\overline{\mathbf{K}}^{\infty} = \overline{\mathbf{M}}^{\infty}$ по лемме 3.1.2. Аналогично $\overline{\mathbf{K}}^{\infty} = \overline{\mathbf{N}}^{\infty}$. Следовательно, $\overline{\mathbf{M}}^{\infty} = \overline{\mathbf{N}}^{\infty}$.

Все эти эквивалентности дают вместе, что

$$\alpha) \to \gamma) \to \delta) \to \beta) \to \alpha),$$

и, таким образом, доказательство завершено.

Определение 3.1.2. *Если выполнено любое из эквивалентных условий леммы* 3.1.5, *то мы скажем, что* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *сравнимы.*

Из условия δ) леммы 3.1.5 следует, что понятие сравнимости рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Лемма 3.1.6. $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{N}}$ *сравнимы тогда и только тогда, когда:*

α) $\overline{\mathbf{M}}=\overline{\mathbf{N}}$, *если* $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{N}}$ *оба имеют бесконечный тип;*

β) $\overline{\mathbf{M}}=\overline{\mathbf{N}}^{\infty}$, *если* $\overline{\mathbf{M}}$ *имеет бесконечный тип, а* $\overline{\mathbf{N}}$ — *конечный;*

γ) $\overline{\mathbf{M}}^{\infty}=\overline{\mathbf{N}}$, *если* $\overline{\mathbf{M}}$ *имеет конечный тип, а* $\overline{\mathbf{N}}$ — *бесконечный;*

δ) $\overline{\mathbf{M}}=\overline{\mathbf{N}}^{\theta}$, *где* θ *принадлежит области значений, указанной в теореме* VII, *если* $\overline{\mathbf{M}}$ *и* $\overline{\mathbf{N}}$ *оба имеют конечный тип.*

Доказательство. α) — γ). Условие δ) леммы 3.1.5 для сравнимости $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{N}}$ состоит в том, что $\overline{\mathbf{M}}^{\infty}=\overline{\mathbf{N}}^{\infty}$. Лемма 3.1.3 показывает, что если $\overline{\mathbf{M}}$ имеет бесконечный тип, то мы можем в это равенство вместо $\overline{\mathbf{M}}^{\infty}$ подставить $\overline{\mathbf{M}}$ и то же самое с $\overline{\mathbf{N}}$. Когда оба $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{N}}$ бесконечны, то это дает α); когда бесконечен только один из них, то мы получаем β) или γ).

δ). По лемме 3.1.4, β) равенство $\overline{\mathbf{M}}=\overline{\mathbf{N}}^{\theta}$, где $\theta\geqslant 1$ принадлежит области значений теоремы VII, эквивалентно тому, что $\overline{\mathbf{N}}$ есть делитель $\overline{\mathbf{M}}$. Так как $\overline{\mathbf{M}}$ конечен, то θ также конечно по лемме 2.7.1, (iii).

С другой стороны, равенство $\overline{\mathbf{M}}=\overline{\mathbf{N}}^{\theta}$, где $\theta\leqslant 1$ лежит в области значений теоремы VII (для $\overline{\mathbf{N}}$), эквивалентно равенству $\overline{\mathbf{M}}^{1/\theta}=\overline{\mathbf{N}}$, где $1/\theta$ лежит в области значений теоремы VII (для $\overline{\mathbf{M}}$, см. (2.9.β); то, что θ принадлежит нужному множеству в дискретном случае, вытекает непосредственно из леммы 2.10.3 и ее следствия). Лемма 3.1.4 с переставленными $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{N}}$ показывает теперь, что это равенство эквивалентно тому, что $\overline{\mathbf{N}}$ является кратным $\overline{\mathbf{M}}$.

Таким образом, равенство $\overline{\mathbf{M}}=\overline{\mathbf{N}}^{\theta}$, где θ лежит в области значений теоремы VII, эквивалентно тому, что $\overline{\mathbf{N}}$ есть либо делитель $\overline{\mathbf{M}}$, либо кратное $\overline{\mathbf{M}}$, что есть условие α) леммы 3.1.5 для сравнимости.

Мы назовем класс алгебраических типов, сравнимых с $\overline{\mathbf{M}}$ (для факторов), его родом, т. е. два алгебраических типа $\overline{\mathbf{M}}_1$ и $\overline{\mathbf{M}}_2$ имеют один и тот же род тогда и только тогда, когда они сравнимы. Мы обозначим род алгебраического типа $\overline{\mathbf{M}}$ через $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$. Понятия, инвариантные относительно сравнимости, будут называться понятиями, связанными с родом $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ (а не с самими $\overline{\mathbf{M}}$ или $\mathbf{M}$).

Таким образом, типы (I), (II), (III) факторов являются понятиями, связанными с родом. Это следует из п. (ii) леммы 2.7 1 (с $p=\infty$) и условия δ) леммы 3.1.5. Аналогично $\overline{\mathbf{M}}^{c}$ есть операция, связанная с родом. Это следует из соотношения (2.5.в) и упомянутого условия. Поэтому мы сможем определить

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}}^{c}=\overline{\overline{\mathbf{M}^{c}}}.$$

Заметим, наконец, что $\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}$), $\mathbf{M}^{p}$, $p=1, 2, \ldots, \infty$, и (в том случае, когда определено, т. е. для факторов $\mathbf{M}$ конечного типа) $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$ (θ лежит в области значений теоремы VII) имеют тот же самый род, что и $\mathbf{M}$. Для $(\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}})$ это следу-

ет из условия α) леммы 3.1.5, для $\overline{\mathbf{M}}^{p}$ — из теоремы V и леммы 3.1.5, α) и для $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$ — из леммы 3.1.6, δ).

Ясно, что конечность или бесконечность типа фактора не есть свойство рода (по поводу подробностей см. теорему IX).

3.2. Так как тип (I), (II), (III) фактора есть понятие, связанное с родом, то множество факторов каждого типа ((I), (II) или (III)) есть сумма одного или нескольких родов. И, конечно, каждый род есть сумма одного или нескольких алгебраических типов. Дадим более детальное описание.

Теорема IX. α) *Факторы типа* (I) *состоят в точности из одного рода. Этот род содержит ровно один алгебраический тип, соответствующий фактору бесконечного типа* (I_∞), *и ровно по одному алгебраическому типу для каждого положительного целого числа n (факторы типа* (I_n)).

β) *Факторы типа* (II) *состоят из одного или нескольких родов. Каждый такой род содержит ровно один алгебраический тип, отвечающий факторам бесконечного типа* (II_∞), *и один или несколько алгебраических типов, отвечающих конечному типу* (II_1).

γ) *Факторы типа* (III) *состоят из одного или больше родов. Каждый такой род содержит ровно один тип, отвечающий, конечно, типу* (III_∞).

Доказательство. α). По лемме 8.6.1 работы [5, с. 173] каждый из типов (I_1), (I_2), ..., (I_∞) содержит ровно один алгебраический тип. Все они, очевидно, могут быть получены из последнего с помощью операции $M_{(\mathfrak{M})}$. Поэтому в силу условия α) леммы 3.1.5 и определения 3.1.1 все они принадлежат одному и тому же роду.

β). Рассмотрим какой-нибудь род $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ типа (II). Тогда существует фактор $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ конечного типа: достаточно взять подпространство $\mathfrak{M}$, такое, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}) < \infty$, тогда $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ имеет конечный тип. Таким образом, фактор $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ конечен и принадлежит тому же роду, что и $\mathbf{M}$ по условию α) леммы 3.1.5. Поскольку $\overline{\mathbf{M}}$ есть делитель $\overline{\mathbf{M}}^{\infty}$ (см. теорему V п. 2.6), то $\overline{\mathbf{M}}^{\infty}$ также принадлежит этому роду. Фактор бесконечного типа в данном роде единствен в силу п. α) леммы 3.1.6.

γ). Рассмотрим какой-нибудь род $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ типа (III_∞). Тогда $\overline{\mathbf{M}}$ имеет бесконечный тип, и поэтому его единственность следует из леммы 3.1.6, α).

Отметим, что ни один из типов (I), (II), (III) не пуст (см. работу [8, с. 94, п. 1 введения).

Лемма 3.2.1. *Рассмотрим некоторый род* $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$, *содержащий факторы конечного типа (т. е. типа* (I) *или* (II), *см. теорему* IX). *Тогда фундаментальная группа* $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{M}})$ *есть понятие, связанное с родом, т. е. она одна и та же для всех конечных алгебраических типов данного рода.*

Доказательство. Это следует из п. δ) леммы 3.1.6 и леммы 2.10.2.

Ввиду доказанной леммы мы будем в дальнейшем обозначать фундаментальную группу через $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})$. Укажем некоторые простые свойства $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})$.

Лемма 3.2.2. *Рассмотрим некоторый род* $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$, *содержащий факторы конечного типа. Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \neq \{0\}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta\mathbf{M}$ — *два подпространства* $\mathfrak{H}$ *конечной относительной размерности. Тогда:*

(i) $\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}}=(\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}}})^{D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})/D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})}$,

(ii) $\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}}=\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}}}$ *тогда и только тогда, когда* $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})/D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})\in\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})$.

Доказательство. Предположим вначале, что $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})\leqslant D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$.

Тогда $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})=D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}')$, где $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{N}$, и так как по лемме 2.8.1 $\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}')}}}=\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}}$, то мы можем предполагать, что $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$. Если пространство $\mathfrak{B}\eta\mathbf{M}$ и $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{N}$, то $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{B})$ есть функция размерности кольца $\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}$; так как по предположению $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$, то $\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}}=(\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}}})^{\alpha}$, $\alpha=D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})/D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$ (см. п. 2.8 с заменой $\mathfrak{H}$ и $\mathbf{M}$ на $\mathfrak{N}$ и $\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}$).

С другой стороны, если $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})>D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$, то приведенные рассуждения показывают, что $(\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}})^{1/\alpha}=\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}}}$. Теперь с помощью соотношения (2.9. β) мы получаем, что $\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}}=(\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}}})^{\alpha}$ (для факторов дискретного типа используется лемма 2.10.3 и ее следствие).

(ii). По определению фундаментальной группы $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})$ из (i) следует, что $\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}}=\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}}}$ тогда и только тогда, когда $\alpha\in\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}}})$. Но $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{N})}}})=\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})$ по лемме 3.2.1.

Лемма 3.2.3. *Рассмотрим род* $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$, *удовлетворяющий условиям предыдущей леммы, Тогда он содержит ровно один фактор (с точностью до алгебраического изоморфизма) конечного типа тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})=P$ (ср. с теоремой VIII).

Доказательство. *Достаточность*. Немедленно следует из п. δ) леммы 3.1.6.

Необходимость. Предположим, что $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})\neq P$. Рассмотрим фактор $\mathbf{M}$ конечного типа, принадлежащий роду $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$. Если существует число θ, которое не $\in\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})$, но лежит в области значений, указанной в теореме VII, то $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$ принадлежит тому же роду, что и $\overline{\mathbf{M}}$, и также имеет конечный тип. Поскольку при этом $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}\neq\overline{\mathbf{M}}$, то полученное противоречие завершает доказательство.

Действительно, для факторов типа (I) $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})=(1)$ по лемме 2.10.4. Поэтому каждое θ = 2, 3, ... приводит к фактору нового алгебраического типа. Если же $\overline{\mathbf{M}}$ принадлежит типу (II), то P есть область допустимых значений показателя θ (см. теорему VII), и поэтому соотношение $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})\neq P$ гарантирует существование требуемого θ.

3.3. Теперь настал момент ввести понятие пространственного типа (см. примеч. 12). Мы назовем класс колец, пространственно изоморфных данному кольцу $\mathbf{M}$, его пространственным типом. Таким образом, два кольца $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ в двух гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно имеют одинаковый пространственный тип тогда и только тогда, когда они пространственно изоморфны. Мы обозначим пространственный тип кольца $\mathbf{M}$ через $\dddot{\mathbf{M}}$.

Сейчас мы дадим ответ на вопрос II п. 2 введения для факторов типа (I) и (II)[18], т. е. выясним, когда из алгебраического изоморфизма следует пространственный.

Таким образом, мы установим соотношение между $\dddot{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{M}}$. Для факторов типа (I) и (II) мы определим все пространственные типы по данному алгебраическому типу.

Основными в наших рассмотрениях будут понятия $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$, $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{M}})$, а также род $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$.

Пространственный изоморфизм колец $\mathbf{M}_1$ в $\mathfrak{H}_1$ и $\mathbf{M}_2$ в $\mathfrak{H}_2$ (см. определение A п. 2 введения) переводит также $\mathbf{M}_1$ в $\mathbf{M}_2$. Поэтому пространственный тип $\dddot{\mathbf{M}}$ кольца $\mathbf{M}$ определяет не только алгебраический тип $\overline{\mathbf{M}}$, но и алгебраический тип $\overline{\mathbf{M}'}$. Далее, $\overline{\mathbf{M}}$ не определяет $\overline{\mathbf{M}'}$ однозначно даже в том случае, когда $\mathbf{M}$ является фактором[19].

Следовательно, обсуждение пространственного типа $\ddot{\mathbf{M}}$ фактора $\mathbf{M}$ необходимо начать с изучения связи между $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{M}'}$. Именно здесь существенным является понятие рода.

Лемма 3.3.1. *Для всякого фактора типов* (I) *и* (II)

$$\overline{\overline{\mathbf{M}'}} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}^{c}.$$

Доказательство. Ввиду предположений относительно $\mathbf{M}$ существует замкнутое подпространство $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$, $\mathfrak{M} \neq \{0\}$, имеющее конечную относительную размерность $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})$. Выберем некоторый вектор $f \in \mathfrak{M}$, $f \neq 0$, и рассмотрим подпространства $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ и $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$ (см. определение 5.1.1 работы [5, с. 143]). Оба эти подпространства $\neq \{0\}$, замкнуты и $\eta\mathbf{M}$, $\eta\mathbf{M}'$ соответственно. Кроме того, $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'} \subseteq \mathfrak{M}$, так как $f \in \mathfrak{M}\eta\mathbf{M}$. Поэтому относительная размерность $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'})$ конечна.

Нормируем теперь $D_{\mathbf{M}}$ так, чтобы $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}) = 1$, и $D_{\mathbf{M}}$ так, чтобы величина C, определенная в теореме X работы [5, с. 182], равнялась единице, так что

$$D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}'}) = D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}) = 1. \tag{3.3.α}$$

Обозначим для краткости

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}, \qquad \mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}. \tag{3.3.β}$$

Применим теперь рассмотрения п. 11.4 работы [5, с. 188—190]. Образуем в соответствии с ними кольца $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}$ и $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1)}$. Эти кольца представляют собой парные факторы в пространстве $\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1' \neq \{0\}$, аналогичные факторам $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ в пространстве $\mathfrak{H}$ (см. замечания в цитированной статье в начале п. 11.4 и непосредственно предшествующие лемме 11.4.3). Используем теперь функции относительных размерностей $D_{\mathbf{M}}$ и $D_{\mathbf{M}}$ для вычисления соответствующих функций в $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}$ и

[18] Для факторов типа (I) ответ известен. Тем не менее мы включаем их в формулировку по причине, указанной в примеч. 1.

[19] Соответствующие элементарные примеры дают прямые факторы, описанные в работе [5, с. 139 или с. 173, лемма 8.6.1]. Исчерпывающие результаты в этом направлении содержатся в последней части нашей теоремы X.

$\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1)}$ так, как было описано в лемме 11.4.2 цитированной статьи. Из наших уравнений (3.3.α) и (3.3.β) тогда следует ряд выводов.

Во-первых, относительная размерность пространства $\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1'$ равна 1 как для $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}$, так и для $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}$. Поэтому оба эти фактора имеют конечный тип. Кроме того, $C = 1$ (см. выше). Поэтому они оба либо факторы типа (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, со стандартной нормировкой, умноженной на $1/n$, либо типа (II_1) со стандартной нормировкой [20].

Во-вторых, обе функции относительной размерности удовлетворяют условиям работы [6, с. 235, начало п. 4.1], на которой основана теорема VI той же работы (с. 239)[21]. Эта теорема утверждает, что парные факторы, к которым она применима, двойственно изоморфны [22]. По лемме 11.4.1 работы [5, с. 188] факторы $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1)}$, $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}$ алгебраически изоморфны, так же как и $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}_1')}$, $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}$. Таким образом, факторы $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1)}$, $\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}_1')}$ двойственно изоморфны, т. е.

$$\overline{\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}_1')}} = \overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1)}}^{c}. \qquad (3.3.\gamma)$$

Следовательно,

$$\overline{\overline{\mathbf{M}}}' = \overline{\overline{\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}_1')}}} = \overline{\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1)}}}^{c} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}^{c},$$

что и требовалось.

Эта лемма определяет направление последующего анализа данного раздела. Теперь легко получить более подробную информацию.

Дадим с этой целью следующее определение.

Определение 3.3.1. *Для каждого фактора* **M** *типов* (I) *и* (II) *введем число*

$$\theta = \frac{1}{C} \frac{D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{H})}{D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})} \qquad (3.3.\delta)$$

с произвольной нормировкой функций $D_{\mathbf{M}}$, $D_{\mathbf{M}'}$ *и соответствующей константой* C (*см. теорему* X *работы* [5, с. 182]).

Это число, очевидно, не зависит от нормировки $D_{\mathbf{M}}$, $D_{\mathbf{M}'}$.

Так как $0 < C < \infty$, $0 < D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})$, $D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{H}) \leqslant \infty$, то соотношение (3.3.$\delta$) корректно определяет число θ:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \infty \qquad (3.3.\varepsilon)$$

во всех случаях, кроме того, когда $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H}) = D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{H}) = \infty$, т. е. когда **M**, **M**′ —

---

[20] Это расхождение вызвано, конечно, различным способом введения стандартной нормировки для факторов типа (I) и (II) (см. теорему VIII работы [5, с. 172]).

[21] Указанная теорема сформулирована в работе лишь для факторов типа (II_1), однако она справедлива и для факторов типа (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, причем с тем же самым доказательством. Наше замечание в примеч. 1 применимо и к работе [6].

[22] Антиизоморфны в терминологии цитированной статьи.

факторы бесконечного типа. В таком случае мы запишем (3.3.ε) в виде

$$\theta = \infty/\infty, \qquad (3.3.\zeta)$$

рассматривая символ ∞/∞ как величину, отличную от всех чисел в (3.3.ε).

Лемма 3.3.2. *Пусть заданы* $\mathbf{M}$ *и* θ *так, как указано выше. Тогда:*

α) *если* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ — *факторы бесконечного типа, то* $\overline{\mathbf{M}'} = \overline{\mathbf{M}}^c$ и $\theta = \infty/\infty$;

β) *если* $\mathbf{M}$ — *фактор бесконечного типа, а* $\mathbf{M}'$ — *фактор конечного типа, то*

$$\overline{\mathbf{M}} = (\overline{\mathbf{M}'^c})^\infty \text{ и } \theta = 0, \text{ или } 1/\theta = \infty;$$

γ) *если* $\mathbf{M}$ — *фактор конечного типа, а* $\mathbf{M}'$ — *бесконечного, то*

$$\overline{\mathbf{M}'} = (\overline{\mathbf{M}}^c)^\infty \text{ и } \theta = \infty;$$

δ) *если оба* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ — *факторы конечного типа, то*

$$\overline{\mathbf{M}'} = (\overline{\mathbf{M}}^c)^\theta, \text{ или, что эквивалентно, } \quad \overline{\mathbf{M}} = (\overline{\mathbf{M}'^c})^{1/\theta}, \quad \text{где } 0 < \theta < \infty.$$

Доказательство. Все утверждения, касающиеся θ, немедленно следуют из определения 3.3.1. Рассмотрим теперь остальные утверждения.

Докажем α), β), γ). Лемма 3.3.1 показывает, что алгебраические типы $\overline{\mathbf{M}'}$ и $\overline{\mathbf{M}}^c$ сравнимы. Поэтому наши α), β), γ) следуют из α), β), γ) леммы 3.1.6 соответственно.

Докажем δ). Эквивалентность этих двух равенств очевидна. Рассмотрим первое из них.

Выберем нормировку $D_{\mathbf{M}}$, $D_{\mathbf{M}'}$ точно так же, как в доказательстве леммы 3.3.1. Соотношения (3.3.α), (3.3.β) этого доказательства тогда показывают, что

$$\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M}_1)}} = \overline{\mathbf{M}}^{1/D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})}, \quad \overline{\mathbf{M}'_{(\mathfrak{M}'_1)}} = (\overline{\mathbf{M}'})^{1/D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{H})}.$$

Отсюда с помощью (3.3.γ) и (2.9.α) получаем, что

$$(\overline{\mathbf{M}'})^{1/D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{H})} = (\overline{\mathbf{M}}^{1/D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})})^c = (\overline{\mathbf{M}}^c)^{1/D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})},$$

или

$$\overline{\mathbf{M}'} = (\overline{\mathbf{M}}^c)^{D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{H})/D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{H})} = (\overline{\mathbf{M}}^c)^\theta,$$

что и требовалось.

Замечание. Первая формула п. δ) имеет место, очевидно, и для β), тогда как для α) и γ) эта формула бессмысленна.

Далее, как явствует из нашего доказательства, показатели θ и $1/\theta$ лежат в области значений, определенной в теореме VII.

Лемма 3.3.3. *Пусть* $\mathbf{M}$ *и* θ *такие же, как и выше. Тогда пространственный тип* $\ddot{\mathbf{M}}$ *однозначно определяется алгебраическими типами* $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}'}$ *и числом* θ.

Доказательство. Так же как и в п. 2 введения, для $i = 1, 2$ должны быть заданы гильбертово пространство $\mathfrak{H}_i$ и кольцо операторов $\mathbf{M}_i$ в $\mathfrak{H}_i$. Мы предположим, что оба кольца $\mathbf{M}_i$ являются факторами типа (I) или (II). Введем для каждого $\mathbf{M}_i$ число θ_i в соответствии с определением 3.3.1. Мы предположим

далее, что
$$\overline{\mathbf{M}_1} = \overline{\mathbf{M}_2}, \qquad \overline{\mathbf{M}'_1} = \overline{\mathbf{M}'_2}, \qquad \theta_1 = \theta_2 = \theta.$$
Наша задача состоит теперь в том, чтобы доказать, что $\dddot{\mathbf{M}}_1 = \dddot{\mathbf{M}}_2$, т. е. в том, чтобы построить изоморфное отображение $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ (см. определение А п. 2 введения), переводящее $\mathbf{M}_1$ в $\mathbf{M}_2$.

В проводимом доказательстве мы будем различать случаи, отвечающие разным значениям величины θ (единому значению θ_i).

Заметим вначале, что изоморфное отображение $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, переводящее $\mathbf{M}_1$ в $\mathbf{M}_2$, переводит также $\mathbf{M}'_1$ в $\mathbf{M}'_2$. Таким образом, мы всегда можем заменить каждое $\mathbf{M}_i$ на его $\mathbf{M}'_i$. Вследствие этого равенство $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ может быть заменено равенством $1/\theta_1 = 1/\theta_2 = 1/\theta$.

Рассмотрим теперь разные возможности для θ.

Первая возможность: $0 < \theta < \infty$. Поскольку мы можем заменить θ на $1/\theta$, то можно предполагать, что $0 < \theta \leqslant 1$. Для $i = 1,\ 2$ факторы $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{M}'_i$ имеют конечный тип. Выберем нормировки для $D_{\mathbf{M}_i}$, $D_{\mathbf{M}'_i}$ так, что $D_{\mathbf{M}'_i}(\mathfrak{H}_i) = 1$, $C_i = 1$ (мы используем обозначение определения 3.3.1 для $i = 1, 2$). Тогда $D_{\mathbf{M}_i}(\mathfrak{H}_i) = 1/\theta_i = 1/\theta \geqslant 1$. Поэтому 1 принадлежит области значений $D_{\mathbf{M}_i}$ (см. [5, с. 182], обсуждение области значений величин Δ, Δ_0, Δ', Δ'_0 в теореме X и перед ней). Выберем соответственно подпространства $\mathfrak{K}_i \eta \mathbf{M}_i$ так, чтобы $D_{\mathbf{M}_i}(\mathfrak{K}_i) = 1$. Далее, существует ε в области значений $D_{\mathbf{M}_1}$, такое, что для некоторого $p = 1, 2, \ldots$ выполнены соотношения $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $p\varepsilon = 1/\theta$[23]. Выберем соответственно некоторое подпространство $\mathfrak{L}_1 \eta \mathbf{M}_1$, для которого $D_{\mathbf{M}_1}(\mathfrak{L}_1) = \varepsilon$, $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{K}_1$.

Используем теперь рассмотрения п. 11.4 работы [5, с. 188—190]. В соответствии с ними образуем кольца $\mathbf{M}_{i(\mathfrak{K}_i)}$, $\mathbf{M}'_{i(\mathfrak{K}_i)}$ (мы рассматриваем сейчас пространство $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{K}_i$ $\mathfrak{H}_i$ и кольца $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{M}'_i$ вместо $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, использовавшихся в цитированной работе). Эти кольца представляют собой сопряженные факторы в пространстве $\mathfrak{K}_i \neq \{0\}$, так же как и $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{M}'_i$ в $\mathfrak{H}_i$. Имеем
$$\overline{\mathbf{M}'_{i(\mathfrak{K}_i)}} = \overline{\mathbf{M}'_i}.$$
Поэтому равенство $\overline{\mathbf{M}'_1} = \overline{\mathbf{M}'_2}$ дает, что
$$\overline{\mathbf{M}'_{1(\mathfrak{K}_1)}} = \overline{\mathbf{M}'_{2(\mathfrak{K}_2)}}.$$

---

[23] Рассуждения в работе [5, с. 182] показывают, что области значений функций $D_{\mathbf{M}_1}$ и $D_{\mathbf{M}'_1}$ согласованы для области $\leqslant$ их обоих максимумов, т. е. $\leqslant 1$, $1/\theta$. Поэтому мы можем рассуждать сейчас следующим образом.

Тип (I_n), $n = 1, 2, \ldots$ Область значений $D_{\mathbf{M}_1}$ равна $(0, 1/n, \ldots, 1)$; $1/\theta \geqslant 1/n$ и $1/n$ есть наименьшее положительное число в области значений $D_{\mathbf{M}'_1}$. Поэтому последняя состоит из чисел, кратных $1/n$, следовательно, $1/\theta = p/n$, $p = 1, 2, \ldots$, и $\varepsilon = 1/n$ удовлетворяет нашим условиям.

Тип (II_1). Выберем $p = 1, 2, \ldots$ так, что $1/p\theta \leqslant 1$. Тогда число $\varepsilon = 1/p\theta$ удовлетворяет условию $p\varepsilon = 1/\theta$ и, кроме того, $\varepsilon \leqslant 1$, $1/\theta$. Так как число ε принадлежит области значений функции $D_{\mathbf{M}_1}$, то оно принадлежит также и области значений функции $D_{\mathbf{M}'_1}$.

Кроме того,

$$D_{\mathbf{M}_{i(\mathfrak{K}_i)}} = D_{\mathbf{M}_i}(\mathfrak{K}_i) = 1, \qquad D_{\mathbf{M}'_{i(\mathfrak{K}_i)}} = D_{\mathbf{M}'_i}(\mathfrak{K}_i) = 1$$

и $C_i = 1$, как и прежде. Поэтому мы можем применить теорему XI работы [6, с. 244] к нашему подпространству $\mathfrak{K}_i$ и к кольцам $\mathbf{M}'_{i(\mathfrak{K}_i)}$, $\mathbf{M}_{i(\mathfrak{K}_i)}$ вместо использовавшихся там $\mathfrak{H}_i$, $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{M}'_i$. По этой теореме существует изоморфное отображение $\mathfrak{J}$ пространства $\mathfrak{K}_1$ в пространство $\mathfrak{K}_2$, переводящее $\mathbf{M}_{1(\mathfrak{K}_1)}$ в $\mathbf{M}_{2(\mathfrak{K}_2)}$ и $\mathbf{M}'_{1(\mathfrak{K}_1)}$ в $\mathbf{M}'_{2(\mathfrak{K}_2)}$в. Заметим, что если $\mathfrak{L}_1 \eta \mathbf{M}_1$, $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{K}_1$, то $\mathfrak{L}_1 \eta \mathbf{M}_{1(\mathfrak{K}_1)}$. Следовательно, $\mathfrak{J}$ переводит $\mathfrak{L}_1$ в некоторое подпространство $\mathfrak{L}_2 \eta \mathbf{M}_{2(\mathfrak{K}_2)}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{L}_2 \eta \mathbf{M}_2$ и $\mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{K}_2$. Теперь

$$D_{\mathbf{M}_2}(\mathfrak{L}_2) = D_{\mathbf{M}_{2(\mathfrak{K}_2)}}(\mathfrak{L}_2) = D_{\mathbf{M}_{1(\mathfrak{K}_1)}}(\mathfrak{L}_1) = D_{\mathbf{M}_1}(\mathfrak{L}_1) = \varepsilon.$$

Изоморфизм $\mathfrak{J}$ индуцирует отображение кольца $\mathbf{M}_{1(\mathfrak{K}_1)(\mathfrak{L}_1)} = \mathbf{M}_{1(\mathfrak{L}_1)}$ в кольцо $\mathbf{M}_{2(\mathfrak{K}_2)(\mathfrak{L}_2)} = \mathbf{M}_{2(\mathfrak{L}_2)}$. Ограничим $\mathfrak{J}$ с $\mathfrak{K}_1$ на $\mathfrak{L}_1$ и обозначим это ограничение через $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является изоморфизмом пространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, индуцирующим изоморфизм колец $\mathbf{M}_{1(\mathfrak{L}_1)}$ и $\mathbf{M}_{2(\mathfrak{L}_2)}$.

Поскольку $p\varepsilon = 1/\theta$, то для $i = 1, 2$

$$pD_{\mathbf{M}_i}(\mathfrak{L}_i) = D_{\mathbf{M}_i}(\mathfrak{H}_i),$$

или если перейти к проекторам $E_i = P_{\mathfrak{L}_i}$, то

$$D_{\mathbf{M}_i}(E_i) = (1/p) D_{\mathbf{M}_i}(1).$$

Следовательно, рассуждая так же, как и в доказательстве лемм 2.6.2 или 2.6.3, мы получим множество матричных единиц $W_{i;u,v}$, $u, v = 1, \dots, p$, p-го порядка с $W_{i;1,1} = E_i$, $\sum_{u=1} W_{i;u,u} = 1$. Пусть область значений проектора $F_{i;u} = W_{i;u,u}$ есть $\mathfrak{N}_{i;u}$. Заметим, что $\mathfrak{N}_{i;1} = \mathfrak{L}_i$ и что оператор $W_{i;u,v}$ частично изометричен из начального пространства $\mathfrak{N}_{i;v}$ в конечное пространство $\mathfrak{N}_{i;u}$, т. е. он изоморфно отображает $\mathfrak{N}_{i;v}$ на $\mathfrak{N}_{i;u}$.

Таким образом, $W_{2;u,1} \mathfrak{F} W_{1;1,u} = \mathfrak{F}_u$ есть изоморфизм пространств $\mathfrak{N}_{1;u}$ и $\mathfrak{N}_{2;u}$, $u = 1, 2, \dots, p$. Для $u = 1$ $W_{i;1,1} = F_{i;1}$, $E_i = P_{\mathfrak{L}_i}$, $\mathfrak{N}_{i;1} = \mathfrak{L}_i$, и поэтому $\mathfrak{F}_1$ совпадает с $\mathfrak{F}$. Так как подпространства $\mathfrak{N}_{i;u}$, $u = 1, \dots, p$, попарно ортогональны и порождают замкнутое пространство $\mathfrak{H}_i$, то мы можем построить из отображений $\mathfrak{F}_u$, $u = 1, \dots, p$, единое изоморфное отображение $\mathfrak{F}^*$ пространства $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$. На $\mathfrak{L}_1$ это отображение совпадает с $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Поэтому

$$\mathfrak{F}^* \text{ переводит } \mathfrak{L}_1 \text{ в } \mathfrak{L}_2 \text{ и } \mathbf{M}_1(\mathfrak{L}_1) \text{ в } \mathbf{M}_2(\mathfrak{L}_2). \qquad (3.3.\eta)$$

Ввиду свойств операторов $W_{i;u,v}$ (см. определение 2.6.1) и определения $\mathfrak{F}^*$ мы имеем далее, что

$$\mathfrak{F}^* \text{ переводит } W_{1;u,v} \text{ в } W_{2;u,v}, \qquad u, v = 1, \dots, p. \qquad (3.3.\theta)$$

Кольцо $\mathbf{M}_i$ может быть описано в терминах $\mathbf{M}_{i(\mathfrak{L}_i)}$, $\mathfrak{L}_i$ и $W_{i;u,v}$, $u, v = 1, \ldots, p$. В самом деле, соотношение $A_i \in \mathbf{M}_i$ эквивалентно тому, что $(W_{i;1,v} A_i W_{i;u,1})_{(\mathfrak{L}_i)} \in \in \mathbf{M}_{i(\mathfrak{L}_i)}$ для всех $u, v = 1, \ldots, p$ [24]. Поэтому из соотношений (3.3.η) и (3.3.θ) следует, что $\mathfrak{F}^*$ переводит $\mathbf{M}_1$ в $\mathbf{M}_2$.

Это завершает доказательство в рассматриваемом случае $0 < \theta < \infty$.

Вторая возможность состоит в том, что $\theta = 0$ или ∞. Так как мы можем заменить θ на $1/\theta$, то, очевидно, достаточно рассмотреть только $\theta = 0$. В этом случае факторы $\mathbf{M}_i$, $i = 1, 2$, имеют бесконечный тип, а фактор $\mathbf{M}_1'$ — конечный. Выберем нормировку функций $D_{\mathbf{M}_i}$, $D_{\mathbf{M}_i'}$ так, чтобы $D_{\mathbf{M}_i'}(\mathfrak{H}_i) = 1$, $C_i = 1$.

Мы можем вести наши рассмотрения параллельно тому, как это делалось в уже разработанном случае, положив сейчас $\varepsilon = 1$, $p = \infty$. Образуем соответствующие пространства $\mathfrak{K}_i$. Так как $\varepsilon = 1$, то $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}_1$. Кроме того, построив изоморфизм $\mathfrak{J}$, мы получаем, что $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{K}_2$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{J}$.

Пусть $E_i = P_{\mathfrak{L}_i}$. Построим теперь бесконечное число попарно ортогональных подпространств $\mathfrak{N}_{i,1}, \mathfrak{N}_{i,2}, \ldots$, таких, что $\mathfrak{N}_{i,1} = \mathfrak{L}_i$, $\mathfrak{N}_{i,u} \eta \mathbf{M}_i$, $D_{\mathbf{M}_i}(\mathfrak{N}_{i,u}) = 1$ для $u = 1, 2, \ldots$ и, наконец, $\mathfrak{H}_i = [\mathfrak{N}_{i,1}, \mathfrak{N}_{i,2}, \ldots]$ (см. лемму 7.1.2 работы [5, с. 155]). С помощью рассуждений, аналогичных второй части доказательства леммы 2.6.2, мы получаем систему $W_{i;u,v}$.

Так же как и в уже разработанном случае, мы строим после этого совокупность изоморфизмов $\mathfrak{F}_u$, $u = 1, 2, \ldots$, и, наконец, изоморфизм $\mathfrak{F}^*$ пространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, индуцирующий алгебраический изоморфизм $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ [25].

Таким образом, вторая возможность также рассмотрена.

Третья возможность: $\theta = \infty/\infty$. В этом случае факторы $\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_i'$, $i = 1, 2$, имеют бесконечный тип. Выберем конечное подпространство $\mathfrak{K}_1 \eta \mathbf{M}_1$, $\mathfrak{K}_1 \neq \{0\}$, и положим $P_{\mathfrak{K}_1} = E_1 \in \mathbf{M}$. При алгебраическом изоморфизме колец $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ (который существует, так как $\overline{\mathbf{M}_1} = \overline{\mathbf{M}_2}$) этот проектор E_1 переходит в проектор $E_2 \in \in \mathbf{M}_2$. Пусть $\mathfrak{K}_2$ есть область значений проектора E_2. Тогда $\mathfrak{K}_2 \eta \mathbf{M}_2$ $\mathfrak{K}_2 \neq \{0\}$. Кроме того, алгебраический изоморфизм колец $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ индуцирует изоморфизм колец $\mathbf{M}_{1(\mathfrak{K}_1)}$, $\mathbf{M}_{2(\mathfrak{K}_2)}$ (см. лемму 11.3.3, (i) в работе [5, с. 187]). Таким образом,

$$\overline{\mathbf{M}_{1(\mathfrak{K}_1)}} = \overline{\mathbf{M}_{2(\mathfrak{K}_2)}}. \tag{3.3.ι}$$

Кроме того, по п. (ii) цитированной леммы $\overline{\mathbf{M}'_{i(\mathfrak{K}_i)}} = \overline{\mathbf{M}'_i}$, следовательно, из равенства $\overline{\mathbf{M}'_1} = \overline{\mathbf{M}'_2}$ вытекает, что

$$\overline{\mathbf{M}'_{1(\mathfrak{K}_1)}} = \overline{\mathbf{M}'_{2(\mathfrak{K}_2)}}. \tag{3.3.κ}$$

---

[24] Положим $A_{i,u,v} = W_{i;1,v} A_i W_{i;u,1}$. Тогда прямая импликация очевидна, а обратная следует из легко проверяемого равенства $A = \sum_{u,v=1}^{p} W_{i;v,1} A_{i,u,v} W_{i;1,u}$.

[25] Примеч. 24 применимо и в этом случае. Сходимость ряда $\sum_{u,v=1}^{\infty}$ в этой ссылке есть очевидное следствие сходимости ряда $\sum_{u=1}^{\infty} W_{i;u,u}$. Ввиду последней сходимости замечания, сделанные при доказательстве леммы 2.6.1, (iii), также применимы.

Выберем нормировку функций $D_{\mathbf{M}_i}$, $D_{\mathbf{M}'_i}$ так, что $D_{\mathbf{M}_i}(\mathfrak{K}_i) = 1$, $C_i = 1$. При этом автоматически $D_{\mathbf{M}'_i}(\mathfrak{H}_i) = \infty$, так что

$$D_{\mathbf{M}_{i(\mathfrak{K}_i)}}(\mathfrak{K}_i) = D_{\mathbf{M}_i}(\mathfrak{K}_i) = 1, \qquad D_{\mathbf{M}'_{i(\mathfrak{K}_i)}}(\mathfrak{K}_i) = D_{\mathbf{M}'_i}(\mathfrak{H}_i) = \infty$$

и $C_i = 1$. Применим определение 3.3.1 к пространству $\mathfrak{K}_i$ и кольцам $\mathbf{M}_{i(\mathfrak{K}_i)}$, $\mathbf{M}'_{i(\mathfrak{K}_i)}$ вместо использовавшихся там $\mathfrak{H}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ и обозначим соответствующее число через θ_i^0. Из приведенных выше равенств следует, что

$$\theta_1^0 = \theta_2^0 = \infty. \tag{3.3.λ}$$

Соотношения (3.3.ι), (3.3.κ) и (3.3.λ) позволяют нам применить уже разобранную вторую возможность к $\mathfrak{K}_i$, $\mathbf{M}_{i(\mathfrak{K}_i)}$, $\mathbf{M}_{i(\mathfrak{K}_i)}$. Приведенные там рассуждения показывают, что существует изоморфизм $\mathfrak{J}$ пространств $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$, переводящий $\mathbf{M}_{1(\mathfrak{K}_1)}$ в $\mathbf{M}_{2(\mathfrak{K}_2)}$ и $\mathbf{M}'_{1(\mathfrak{K}_1)}$ в $\mathbf{M}'_{2(\mathfrak{K}_2)}$.

Дальнейшие рассмотрения в точности идентичны случаю $\theta = 0$, т. е. идут параллельно доказательству, данному при исследовании первой возможности $(0 < \theta < \infty)$. Пространства $\mathfrak{K}_i$ уже есть, положим опять $\varepsilon = 1$, $p = \infty$. Так как $\varepsilon = 1$, $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}_1$; из равенства $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{K}_1$ следует, что $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{K}_2$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{J}$. Мы имеем далее, что $E_i = P_{\mathfrak{K}_i} = P_{\mathfrak{L}_i}$. Семейства операторов $F_{i,u}$, $u = 1, 2, \ldots$, и $W_{i;u,v}$, u, $v = 1, 2, \ldots$, строятся так же, как и выше. В результате мы получаем изоморфизмы $\mathfrak{F}_u$, $u = 1, 2, \ldots$, и, наконец, изоморфизм $\mathfrak{F}^*$ пространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, переводящий $\mathbf{M}_1$ в $\mathbf{M}_2$.

Таким образом, и третья возможность разобрана, и доказательство полностью завершено.

Теперь мы решим проблему существования.

Л е м м а 3.3.4. *Фактор* $\mathbf{M}$ *типа* (I) *или* (II) *для данных алгебраических типов* $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}}'$ *и данного числа* θ (*см. определение* 3.3.1) *существует тогда и только тогда, когда выполнено любое из альтернативных условий* α)—δ) *леммы* 3.3.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Это есть в точности утверждение леммы 3.3.2.

Достаточность. Мы будем продолжать обозначать два указанных алгебраических типа через $\overline{\mathbf{M}}$ и $\overline{\mathbf{M}}'$, хотя мы до сих пор и не установили, что они соответствуют парным факторам (фактически это мы и собираемся доказывать). Из соотношений α)—δ) леммы 3.3.2, справедливость которых мы предположили, следует равенство родов

$$\overline{\overline{\mathbf{M}'}} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}^c. \tag{3.3. μ}$$

(Это не выводится из леммы 3.3.1, поскольку запись $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ фиктивна, см. выше.) По теореме IX род $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$ содержит (единственный с точностью до алгебраического изоморфизма) фактор $\overline{\mathbf{R}}$ бесконечного типа. Пусть $\mathbf{R}$ есть фактор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{K}$.

Рассмотрим в $\mathfrak{K}$ парный фактор $\mathbf{R}'$. Повторим конструкцию п. 2.4, предшествующую теореме IV, заменив в ней $\mathfrak{H}$, $\mathbf{M}$ на $\mathfrak{K}$, $\mathbf{R}'$. Тогда в обозначениях п. 2.4 наше кольцо $\mathbf{R}'$ есть фактор в пространстве $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_2$. Вводя ($p = \infty$-мерное) гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1$, мы получаем гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ и кольцо $\mathbf{M}_1$ операторов $\langle A'_{t,s}\rangle$ в нем с $A'_{t,s} \in \mathbf{R}'$ (см. аналогичное построение в п. 2.4). Пусть $\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}'_1$, т. е. $\mathbf{M}_1 = \mathbf{R}'_1$. С помощью обычных матричных вычислений легко получить, что $\mathbf{R}_1 = \mathbf{M}'_1$ есть множество операторов вида $\langle A\delta_{t,s}\rangle$, $A \in \mathbf{R}$. Поэтому $\overline{\mathbf{R}_1} = \overline{\mathbf{R}}$; с другой стороны, рассуждения п. 2.4 показывают, что $\overline{\mathbf{R}'_1} = \overline{\mathbf{M}_1} = \overline{\mathbf{R}'}^{\infty}$ Таким образом, фактор $\mathbf{R}'_1$ имеет бесконечный тип (по лемме 2.7.1).

Теперь равенство $\overline{\mathbf{R}_1} = \overline{\mathbf{R}}$ дает возможность нам заменить $\mathfrak{K}$, $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$, $\mathbf{R}_1$. Итак, мы показали, что можно предполагать, что $\overline{\mathbf{R}'}$ имеет бесконечный тип. Мы будем далее предполагать это, сохранив прежние обозначения $\mathfrak{K}$, $\mathbf{R}$.

По лемме 3.3.1 $\overline{\overline{\mathbf{R}'}} = \overline{\overline{\mathbf{R}}}^c$. Теперь $\overline{\overline{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}$, поэтому $\overline{\overline{\mathbf{R}'}} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}^c$. По (3.3. μ) это означает, что $\overline{\overline{\mathbf{R}'}} = \overline{\overline{\mathbf{M}}}'$. Так как $\overline{\mathbf{R}}$, $\overline{\mathbf{R}'}$ оба бесконечны, то (см. теорему IX)

$\overline{\mathbf{R}}$, $\overline{\mathbf{R}'}$ являются (единственными) алгебраическими типами родов $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$, $\overline{\overline{\mathbf{M}'}}$ соответственно. (3.3.ν)

Выберем в пространстве $\mathfrak{K}$ некоторый элемент $f_0 \neq 0$ и рассмотрим замкнутые подпространства $\mathfrak{M}^{\mathbf{R}'}_{f_0}\eta\mathbf{R}$, $\mathfrak{M}^{\mathbf{R}}_{f_0}\eta\mathbf{R}'$ (см. определение 5.1.1 работы [5, с. 143]). Мы можем предполагать, что пространство $\mathfrak{M}^{\mathbf{R}'}_{f_0}$ конечномерно (для этого достаточно выбрать конечномерное подпространство $\mathfrak{M}\eta\mathbf{R}$, $\mathfrak{M} \neq \{0\}$ и затем $f_0 \in \mathfrak{M}$; ясно, что $\mathfrak{M}^{\mathbf{R}'}_{f_0} \subseteq \mathfrak{M}$). Тогда $\mathfrak{M}^{\mathbf{R}}_{f_0}$ автоматически также конечномерно (в этом и последующих рассуждениях мы используем теорему X работы [5, с. 182]). Поэтому обе величины $D_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}^{\mathbf{R}'}_{f_0})$, $D_{\mathbf{R}'}(\mathfrak{M}^{\mathbf{R}}_{f_0})$ конечны и положительны и, кроме того, $C = D_{\mathbf{R}'}(\mathfrak{M}^{\mathbf{R}}_{f_0})/D_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}^{\mathbf{R}'}_{f_0})$. Нормируем теперь функции $D_{\mathbf{R}}$, $D_{\mathbf{R}'}$ так, чтобы $D_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}^{\mathbf{R}'}_{f_0}) = D_{\mathbf{R}'}(\mathfrak{M}^{\mathbf{R}}_{f_0})$. Тогда из приведенной формулы для величины C следует, что

$$C = 1. \tag{3.3.ξ}$$

Запишем $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}^{\mathbf{R}'}_{f_0}$, $\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}^{\mathbf{k}}_{f_0}$, тогда

$$D_{\mathbf{R}}(\mathfrak{M}_1) = D_{\mathbf{R}'}(\mathfrak{M}'_1). \tag{3.3.o}$$

Используем еще раз рассуждения работы [5, п. 11.4, с. 188—190]. В соответствии с ними рассмотрим кольца $\mathbf{R}_{(\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}'_1)}$ и $\mathbf{R}'_{(\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}'_1)}$. Эти кольца являются парными факторами в пространстве $\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}'_1 \neq \{0\}$ точно так же, как и факторы $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Из соотношения (3.3.o) следует, что

$$D_{\mathbf{R}_{(\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}'_1)}}(\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}'_1) = D_{\mathbf{R}'_{(\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}'_1)}}(\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}'_1).$$

Вместе с соотношением (3.3.ξ) и соответствующим выбором нормировки это приводит к тому, что все условия теоремы VI работы [6, с. 239] оказываются выполнен-

ными [21]. Поэтому кольца $R_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}$ и $R'_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}$ двойственно изоморфны [22], т. е.

$$\overline{R'_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}} = \overline{R_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}}^{c}.$$

Кроме того, $\overline{R_{(\mathfrak{M}_1)}} = \overline{R_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}}$, $\overline{R'_{(\mathfrak{M}_1')}} = \overline{R'_{(\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_1')}}$, следовательно,

$$\overline{R'_{(\mathfrak{M}_i')}} = \overline{R_{(\mathfrak{M}_i)}}^{c}. \qquad (3.3.\pi)$$

Поскольку $\bar{\bar{R}} = \bar{\bar{M}}$, то $\bar{R}$, $\bar{M}$ сравнимы. Фактор R имеет бесконечный тип. Следовательно, условия α), β) леммы 3.1.6 и лемма 3.1.4 дают вместе, что $\bar{M}$ является делителем $\bar{R}$. Поэтому по определению 3.1.1

$$\bar{M} = \overline{R_{(\mathfrak{L})}} \text{ при соответствующем выборе } \mathfrak{L}\eta R. \qquad (3.3.\rho)$$

Если пространство $\mathfrak{L}$ имеет конечную относительную размерность, то по теореме X работы [5] мы можем предполагать, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_{f_0}^{R'}$ для некоторого f_0. Аналогично

$$\overline{M'} = \overline{R'_{(\mathfrak{L}')}} \text{ при соответствующем выборе } \mathfrak{L}'\eta R', \text{ и если } \mathfrak{L}' \text{ конечно, то } \mathfrak{L}' = \mathfrak{M}_{g_0}^{R}. \qquad (3.3.\sigma)$$

Здесь нам удобно вновь различать несколько случаев, соответствующих разным значениям величины θ.

Первая возможность: $0 < \theta < \infty$. Это соответствует случаю δ) в лемме 3.3.2. Поэтому $\overline{M'} = (\bar{M}^c)^\theta$ или по (3.3.ρ) и (3.3.σ)

$$\overline{R'_{(\mathfrak{L}')}} = (\overline{R^c_{(\mathfrak{L})}})^\theta.$$

Далее, соотношение (3.3.π) и лемма 3.2.2, (i) дают, что

$$\overline{R'_{(\mathfrak{L}')}} = (\overline{R_{(\mathfrak{L})}}^c)^\beta,$$

где $\beta = D_{R'}(\mathfrak{L}')/D_R(\mathfrak{L})$. Следовательно, ввиду леммы 3.2.2, (ii)

$$\alpha = \beta/\theta = (1/\theta)(D_{R'}(\mathfrak{L}')/D_R(\mathfrak{L})) \in \mathfrak{S}(\bar{\bar{R}}) = \mathfrak{S}(\overline{R_{(\mathfrak{L})}}).$$

Одновременная замена $\bar{M}$ на $\overline{M'}$, θ на $1/\theta$, R на R' и $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{L}'$ приводит к замене α на $1/\alpha$. Поэтому мы можем предполагать, что $\alpha \leqslant 1$. Условие $\alpha \in \mathfrak{S}(\overline{R_{(\mathfrak{L})}})$ дает возможность построения $\overline{R_{(\mathfrak{L})}}^{\alpha}$ в первоначальном смысле п. 2.8. Таким образом, существует подпространство $\mathfrak{L}'' \subset \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}''\eta R_{(\mathfrak{L})}$, такое, что

$$\alpha = \frac{D_{R(\mathfrak{L})}(\mathfrak{L}'')}{D_{R(\mathfrak{L})}(\mathfrak{L})} = \frac{D_R(\mathfrak{L}'')}{D_R(\mathfrak{L})}$$

(из $\mathfrak{L}''\eta R_{(\mathfrak{L})}$ следует, что $\mathfrak{L}''\eta R$). Если $\alpha \in \mathfrak{S}(\overline{R_{(\mathfrak{L})}})$, то

$$\overline{R_{(\mathfrak{L}'')}} = \overline{R_{(\mathfrak{L})}}^{\alpha} = \overline{R_{(\mathfrak{L})}} = \bar{M},$$

поэтому в наших рассмотрениях мы можем заменить $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{L}''$, что соответствует $\alpha = 1$. Переобозначая $\mathfrak{L}''$ через $\mathfrak{L}$, мы видим, что можно предполагать $\alpha = 1$, т. е. что $\theta = D_{\mathbf{R}'}(\mathfrak{L}')/D_{\mathbf{R}}(\mathfrak{L})$.

Рассмотрим теперь в пространстве $\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{L}' \neq \{0\}$ парные факторы $\mathbf{R}_{(\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{L}')}$, $\mathbf{R}'_{(\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{L}')}$. Учитывая полученные результаты, мы имеем, что

$$\overline{\mathbf{R}_{(\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{L}')}} = \overline{\mathbf{R}_{(\mathfrak{L})}} = \overline{\mathbf{M}}, \qquad \overline{\mathbf{R}'_{(\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{L}')}} = \overline{\mathbf{R}_{(\mathfrak{L}')}} = \overline{\mathbf{M}'}.$$

Таким образом, пространственный тип $\dddot{\mathbf{R}}_{(\mathfrak{L}\cdot\mathfrak{L}')}$ удовлетворяет всем требованиям.

Вторая возможность: $\theta = 0$ или $\theta = \infty$. Поскольку мы можем заменить $\overline{\mathbf{M}}$ на $\overline{\mathbf{M}'}$ и θ на $1/\theta$, то можно предполагать, что $\theta = 0$. Эта ситуация соответствует случаю β) леммы 3.3.2.

Фактор $\mathbf{M}$ имеет бесконечный тип, поэтому соотношение (3.3.v) дает $\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{M}}$. Рассмотрим парные факторы $\mathbf{R}_{(\mathfrak{L}')}$, $\mathbf{R}_{(\mathfrak{L}')}$ в пространстве $\mathfrak{L}' \neq \{0\}$. Комбинируя полученные результаты, мы видим, что

$$\overline{\mathbf{R}_{(\mathfrak{L}')}} = \overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{M}}, \qquad \overline{\mathbf{R}'_{(\mathfrak{L}')}} = \overline{\mathbf{M}'},$$

$$D_{\mathbf{R}_{(\mathfrak{L}')}}(\mathfrak{L}) = D_{\mathbf{R}}(\mathfrak{R}) = \infty, \qquad D_{\mathbf{R}'_{(\mathfrak{L}')}}(\mathfrak{L}') = D_{\mathbf{R}'}(\mathfrak{L}') < \infty.$$

Таким образом, пространственный тип кольца $\mathbf{R}_{(\mathfrak{L}')}$ удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Третья возможность: $\theta = \infty/\infty$. Это соответствует случаю α) леммы 3.3.2. Поэтому $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}'}$ оба имеют бесконечный тип; соотношение (3.3.v), следовательно, дает, что

$$\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{M}}, \qquad \overline{\mathbf{R}'} = \overline{\mathbf{M}'}.$$

Кроме того,

$$D_{\mathbf{R}}(\mathfrak{R}) = D_{\mathbf{R}'}(\mathfrak{R}) = \infty.$$

Таким образом, пространственный тип $\dddot{\mathbf{R}}$ удовлетворяет всем необходимым условиям.

Это завершает доказательство.

Суммируем результаты лемм 3.3.3 и 3.3.4.

Теорема X. *Рассмотрим факторы* $\mathbf{M}$ *типов* (I) *и* (II). *Тогда пространственный тип* $\dddot{\mathbf{M}}$ *однозначно определяется алгебраическими типами* $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}'}$ *и числом* θ (*см. определение* 3.3.1).

Пространственный тип $\dddot{\mathbf{M}}$ *существует тогда и только тогда, когда* $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}'}$ *и* θ *удовлетворяют любому из альтернативных условий* α), ..., δ) *леммы* 3.3.2.

Замечание. В некоторых случаях двух данных из $(\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{M}'}, \theta)$ достаточно, чтобы восстановить третье и тем самым $\dddot{\mathbf{M}}$. А именно:

α) если $\overline{\mathbf{M}}$ имеет конечный тип, то $\overline{\mathbf{M}}$ и θ определяют $\overline{\mathbf{M}'}$ с помощью соотношений γ), δ) леммы 3.3.2;

β) если $\overline{\mathbf{M}}'$ имеет конечный тип, то $\overline{\mathbf{M}'}$ и θ определяют $\overline{\mathbf{M}}$ с помощью соотношений β), δ) леммы 3.3.2:

γ) если либо $\overline{\mathbf{M}}$, либо $\overline{\mathbf{M}'}$ имеют бесконечный тип, то $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}'}$ определяют θ с помощью соотношений α), β) или γ) леммы 3.3.2;

δ) если $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}'}$ оба имеют конечный тип, то в соответствии с соотношением ε) леммы 3.3.2, (2.10.α) и с леммой 3.2.1 $\overline{\mathbf{M}}$, $\overline{\mathbf{M}'}$ однозначно определяют θ с точностью до множителя, принадлежащего группе $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}})$. Следовательно, эти соотношения однозначно определяют θ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}(\overline{\overline{\mathbf{M}}}) = (1)$[26].

Таким образом, единственным объектом для факторов типа (I), (II) остается алгебраический тип $\overline{\mathbf{M}}$. Теоремы IX и X (или леммы 3.2.1 и 3.2.2 вместо последней) показывают, что задание алгебраического типа эквивалентно заданию рода. Структура факторов типа (I) совершенно ясна; поэтому необходимо изучить факторы типа (II). При этом мы сможем изучить род $\overline{\mathbf{M}}$ фактора типа (II), изучив один из его конечных алгебраических типов. Следовательно, нам необходимо рассмотреть лишь алгебраические типы факторов типа (II_1).

Глава IV

АППРОКСИМАТИВНАЯ КОНЕЧНОСТЬ

4.1. В соответствии со сказанным выше мы начинаем систематическое изучение факторов типа (II_1). На протяжении этой главы **M** будет фактором типа (II_1) в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Мы будем использовать функции $D_{\mathbf{M}}(E)$ (сейчас в стандартной нормировке), $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ и $[[A]]$ так же, как и в п. 1.2. Мы будем рассматривать также и другие факторы в $\mathfrak{H}$, но они будут обозначаться другими буквами. Все наши рассмотрения, однако, будут происходить только в пространстве $\mathfrak{H}$.

Мы начнем с того, что сформулируем некоторые известные факты относительно факторов типа (I_n), $n = 1, 2, \ldots$

Лемма 4.1.1. *Пусть* **N** *есть фактор типа* (I_p), $p = 1, 2, \ldots$ *Тогда существует взаимно однозначное соответствие между следующими множествами:*

(α) *множеством алгебраических изоморфизмов* $\mathcal{K}$ *кольца* **N** *и кольца комплексных матриц*[27] *порядка* p:

$$a = \{a_{t,s}\} \quad (t, s = 1, \ldots, p)$$

и (β) *множеством матричных базисов в* **N**, *т. е. систем* $W_{u,v}$ $(u, v = 1, \ldots, p)$ *матричных единиц порядка* p, *содержащихся в* **N** *и удовлетворяющих соотношению*

$$E_0 = \sum_{u=1}^{p} W_{u,u} = 1. \tag{4.1.α}$$

[26] Поэтому знание θ никогда не нужно для факторов типа (I) (см. лемму 2.10.4). Другая ситуация имеет место для факторов типа (II). См. теорему XV и замечание в конце п. 5.6.

[27] Комплексные числовые матрицы, которые мы сейчас рассматриваем, допускают те же самые операции, что и операторные матрицы условия B_p в п. 2.4.

Это соответствие определяется формулами:

(i) *если задан изоморфизм* $\mathcal{K}$, *то*

$$W_{u,v} = \mathcal{K}^{-1}\{\delta_{t,v}\delta_{s,u}\};$$

(ii) *если задана система* $W_{u,v}$, *то матрица*

$$\mathcal{K}A = a = \{a_{t,s}\}$$

эквивалентна элементу

$$A = \sum_{u=1}^{p}\sum_{v=1}^{p} a_{v,u}W_{u,v}.$$

Доказательство[28]. Соответствие (i) отображает множество, фигурирующее в (α), в множество, фигурирующее в (β). Условия определения 2.6.1, так же как и (4.1.α), проверяются прямыми матричными вычислениями.

Соответствие (ii) переводит (β) в (α). Правила обращения с матрицами проверяются в этом случае с помощью определения 2.6.1 и (4.1.α).

Тот факт, что из (i) следует (ii), устанавливается матричными вычислениями. Для того чтобы проверить, что из (ii) следует (i), достаточно положить в (ii) $a_{u,v} = \delta_{t,v}\delta_{s,u}$.

Замечание 1. Из соответствия (ii) ясно, что кольцо $\mathbf{N}$ порождено элементами $W_{u,v}$, u, $v = 1, \ldots, p$,

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}(W_{u,v}, \quad u, v = 1, \ldots, p).$$

Замечание 2. Оба множества (α) и (β), конечно, непусты. Это следует из вычислений, основанных на последней лемме. Эквивалентность их была непосредственно установлена в дополнении к лемме 2.10.3.

Лемма 4.1.2. *Пусть* $\mathbf{N}$, $\mathbf{O}$ *есть два фактора типа* (I_p), (I_q) *соответственно*, p, $q = 1, 2, \ldots$ *Предположим, что*

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{O}.$$

Тогда:

(i) p *есть делитель* q, $q = pr$, $r = 1, 2, \ldots$;

(ii) *для каждого матричного базиса* $W_{u,v}$, u, $v = 1, 2, \ldots, p$ *в* $\mathbf{N}$ *существует матричный базис* $X_{o,\omega}$, o, $\omega = 1, \ldots, q$, *в* $\mathbf{O}$, *такой, что*

$$W_{u,v} = \sum_{i=1}^{r} X_{(u-1)r+i,(v-1)r+i};$$

(iii) *если перейти от матричных базисов* $W_{u,v}$ *и* $X_{o,\omega}$ *в* (ii) *к изоморфизмам* $\mathcal{K}$ *и* $\mathcal{L}$, *которые отвечают им в силу леммы* 4.1.1, *то соответствие в* (ii) *сводится к следующему*: *для* $A \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{O}$ *и* $\mathcal{K}A = a = \{a_{t,s}\}$, t, $s = 1, \ldots, p$, $\mathcal{L}A = \bar{a} = \{\bar{a}_{k,l}\}$, $k, l = 1, \ldots, q$, *определены и* $\bar{a}_{k,l} = a_{t,s}\delta_{i,j}$ *для* $k = (t-1)r + i$, $l = (s-1)r + j$.

Доказательство. (i). Значения $D_{\mathbf{O}}(E)$ совпадают со значениями $D_{\mathbf{N}}(E)$ на проекторах $E \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{O}$, если использовать определение 8.2.1 работы [5, с. 165] и стандартную нормировку[29]

[28] Приводится только ради полноты изложения.

[29] См. также лемму 8.3.5 цитированной работы, с. 170. Мы используем тот факт, что фактор $\mathbf{O}$ имеет конечный тип.

Поэтому область значений функции $D_{\mathbf{O}}(E)$ содержит область значений функции $D_{\mathbf{N}}(E)$, т. е. множество $(0, 1/q, \dots, 1)$ содержит множество $(0, 1/p, \dots, 1)$. Следовательно, p есть делитель q.

(ii). Рассмотрим матричный базис $W_{u,v}$ в $\mathbf{N}$ и произвольный матричный базис $X'_{o,\omega}$ в $\mathbf{O}$. Пусть

$$W'_{u,v} = \sum\nolimits_{i=1}^{r} X'_{(u-1)r+i,(v-1)r+i}\,. \qquad (4.1.\beta)$$

Прямым вычислением (используя определение 2.6.1) легко проверить, что $W'_{u,v}$ также образуют систему матричных единиц порядка p. Кроме того,

$$\sum\nolimits_{u=1}^{p} W'_{u,u} = \sum\nolimits_{o=1}^{q} X'_{o,o} = 1.$$

Поскольку $D_{\mathbf{O}}(W'_{u,u}) = D_{\mathbf{O}}(W'_{1,1})$, то $D_{\mathbf{O}}(W'_{1,1}) = 1/p$ и аналогично $D_{\mathbf{O}}(W_{1,1}) = 1/p$. Поэтому существует частично изометричное отображение $U \in \mathbf{O}$ с начальным проектором $W'_{1,1}$ и конечным проектором $W_{1,1}$. Пусть

$$V = \sum\nolimits_{u=1}^{p} W_{u,1} U W'_{1,u}.$$

Ясно, что $V \in \mathbf{O}$ и, как легко проверить прямым вычислением:

(1) $V^*V = VV^* = 1$, т. е. оператор V унитарен,

(2) $VW'_{u,v} = W_{u,v}V$, т. е. $W_{u,v} = VW'_{u,v}V^{-1}$.

Поэтому замена $X'_{u,v}$ на $VX'_{u,v}V^{-1} = X_{u,v}$ сохраняет все свойства матричного базиса, но приводит к замене $W'_{u,v}$ на $W_{u,v} = VW'_{u,v}V^{-1}$. Теперь из соотношения (4.1.β) следует желаемое равенство п. (ii).

(iii). Применим лемму 4.1.1, (ii) к изоморфизмам $\mathcal{K}$ (с $W_{u,v}$) и $\mathcal{L}$ (с $X_{o,\omega}$). Тогда равенство в (ii) переходит в требуемое соотношение п. (iii).

Дадим теперь следующее

Определение 4.1.1. *Фактор* $\mathbf{M}$ *называется аппроксимативно конечным фактором типа* $[p_1, p_2, \dots]$, *если справедливы следующие свойства: существует последовательность факторов* $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots$, *такая, что*

(i) $\mathbf{N}_n$ *имеет тип* (I_{p_n});

(ii) $\mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}_2 \subset \dots$;

(iii) *кольцо* $\mathbf{M}$ *порождается кольцами* $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots$, *т. е.*

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\mathbf{N}_n, \quad n = 1, 2, \dots).$$

Отметим некоторые непосредственные свойства, связанные с этим определением.

Лемма 4.1.3. *Если выполнены условия определения* 4.1.1, *то*

(i) p_n *является делителем* p_{n+1}, $p_{n+1} = p_n r_n$ $(r_n = 1, 2, \dots)$;

(ii) $p_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *т. е. существует бесконечно много* $r_n > 1$.

Доказательство. (i). Так как $\mathbf{N}_n \subseteq \mathbf{N}_{n+1}$, то это следует из леммы 4.1.2, (i).

(ii). Ввиду (i) $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \dots$, поэтому если (ii) не выполнено, то для некоторого m $p_m = p_{m+1} = p_{m+2} = \dots$ Поэтому[30] $\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_{m+1} = \mathbf{N}_{m+2} = \dots$, и, следова-

[30] При $l \geqslant m$ кольца $\mathbf{N}_m$ и $\mathbf{N}_l$ имеют одинаковое число линейно независимых элементов: $p_m^2 = p_l^2$. Так как $\mathbf{N}_m \subseteq \mathbf{N}_l$, то это означает, что $\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_l$.

тельно, условие (iii) определения 4.1.1 дает, что

$$M = R(N_n, \quad n = 1, 2, \ldots) = N_m.$$

Но это невозможно, так как фактор M имеет тип (II_1), а N_m — тип (I_{p_m}).

Для всякой последовательности $[p_1, p_2, \ldots]$, которая удовлетворяет условиям последней леммы, существует аппроксимативно конечный фактор M типа $[p_1, p_2, \ldots]$. Однако поскольку определение 4.1.1 является предварительным, то проблему существования таких факторов мы предпочитаем обсуждать позже, в соединении с окончательной (пере)формулировкой понятия аппроксимативной конечности, данной в теоремах XII и XIV. А сейчас мы продолжим наши рассмотрения в несколько ином направлении.

Лемма 4.1.4. *Для произвольной последовательности колец* $N_1, N_2, \ldots$, *удовлетворяющих условиям* (ii), (iii) *определения* 4.1.1, *обозначим через* S *теоретико-множественную сумму этой последовательности. Тогда*:

(i) S — *алгебра*,

(ii) M *есть множество элементов из* B, *которые являются пределами сходящихся последовательностей, составленных из элементов* S.

Доказательство. (i). Каждое N_n есть операторное кольцо и, следовательно, алгебра. Кроме того, $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ Поэтому теоретико-множественная сумма также является алгеброй.

(ii). Обозначим множество пределов всех метрически сходящихся последовательностей из S через S_1. Мы должны доказать, что $S_1 = M$.

Поскольку

$$M = R(N_n, \ n = 1, 2, \ldots) = R(S)$$

и $S \subseteq S_1 \subseteq M$, то нам достаточно доказать, что множество S_1 является кольцом.

Множество S является алгеброй, и операции αA, A^* (как функции одного аргумента), $A + B$ (как функция двух аргументов) и AB (как функция одного аргумента при фиксированном втором) непрерывны относительно метрической сходимости (это следует из свойства II^0 работы [6, с. 242]). Поэтому множество S_1 также является алгеброй. Следовательно, по теореме I замыкание этого множества относительно метрической сходимости содержит его замыкание относительно слабой топологии, т. е. S_1 является кольцом. Это завершает доказательство.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема XI. *Алгебраический тип* $\overline{M}$ *аппроксимативно конечного фактора* M *типа* $[p_1, p_2, \ldots]$ *зависит лишь от последовательности* $[p_1, p_2, \ldots]$, *но не от частного выбора* M (*предполагается, что такой фактор* M *существует*; *см. обсуждение выше*).

Доказательство. Рассмотрим два таких фактора $M^{(h)}$, $h = 1, 2$, порождающие их последовательности $N_1^{(h)}, N_2^{(h)}, \ldots$ (см определение 4.1.1) и соответствующие суммы $S^{(h)}$ (см. лемму 4.1.4). Мы хотим доказать, что факторы $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ алгебраически изоморфны.

Сейчас мы индуктивно построим для каждого $n = 1, 2, \ldots$ некоторый (алгебраический) изоморфизм $\mathcal{K}_n^{(h)}$ кольца $N_n^{(h)}$ и кольца (комплексных) матриц порядка p_n (см. лемму 4.1.1. (α)). Для $n = 1$ выберем изоморфизм $\mathcal{K}_1^{(h)}$ произвольным

образом (см. замечание 2 к лемме 4.1.1). Если для $n = 2, 3, \ldots$ изоморфизм $\mathcal{K}_{n-1}^{(h)}$ уже построен, то изоморфизм $\mathcal{K}_n^{(h)}$ строится следующим образом. Применим лемму 4.1.2 в ситуации, когда в качестве $\mathbf{N}$, $\mathbf{O}$, $\mathcal{K}$ этой леммы выступают $\mathbf{N}_{n-1}^{(h)}$, $\mathbf{N}_n^{(h)}$, $\mathcal{K}_{n-1}^{(h)}$, и положим $\mathcal{K}_n^{(h)} = \mathcal{L}$. Тогда изоморфизмы $\mathcal{K}_{n-1}^{(h)}$ и $\mathcal{K}_n^{(h)}$ связаны так же, как $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ в лемме 4.1.2, (iii).

Рассмотрим теперь (алгебраический) изоморфизм $\mathfrak{J}_n = (\mathcal{K}_n^{(2)})^{-1}\mathcal{K}_n^{(1)}$ колец $\mathbf{N}_n^{(1)}$ и $\mathbf{N}_n^{(2)}$. Ввиду соотношений, указанных в последнем предложении предыдущего абзаца, $\mathfrak{J}_n$ получается из $\mathfrak{J}_{n+1}$ с помощью операции ограничения на подпространство. Таким образом, изоморфизмы $\mathfrak{J}_n$ колец $\mathbf{N}_n^{(1)}$ и $\mathbf{N}_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \ldots$, согласованы и порождают (алгебраический) изоморфизм $\mathfrak{J}$ алгебры $\mathbf{S}^{(1)}$ в алгебру $\mathbf{S}^{(2)}$. На $\mathbf{N}_n^{(1)}$ изоморфизм $\mathfrak{J}$ совпадает с $\mathfrak{J}_n$, поэтому $\mathfrak{J}$ отображает $\mathbf{N}_n^{(1)}$ в $\mathbf{N}_n^{(2)}$.

Понятие следа $\mathrm{Tr}_{\mathbf{N}_n^{(h)}}(A)$ в кольце $\mathbf{N}_n^{(h)}$ является чисто алгебраическим понятием (см. п. 1.2). Ясно, что $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}^{(h)}}(A)$ и $\mathrm{Tr}_{\mathbf{N}_n^{(h)}}(A)$ ведут себя совершенно одинаково для $A \in \mathbf{N}_n^{(h)}$ (имеется в виду свойство IV работы [6, с. 219]). Поскольку этим свойством след определяется однозначно, то $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}^{(h)}}(A) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{N}_n^{(h)}}(A)$ для $A \in \mathbf{N}_n^{(h)}$. Поэтому $[[A]] = (\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}^{(h)}}(A^*A))^{1/2} = (\mathrm{Tr}_{\mathbf{N}_n^{(h)}}(A^*A))^{1/2}$ для $A \in \mathbf{N}_n^{(h)}$, т. е. величина $[[A]]$, а с ней и $[[A - B]]$ имеют чисто алгебраический характер в $\mathbf{N}_n^{(h)}$.

Таким образом, величина $[[A - B]]$ инвариантна относительно действия изоморфизма $\mathfrak{J}$ во всех кольцах $\mathbf{N}_n^{(h)}$, $n = 1, 2, \ldots$ Поэтому то же самое справедливо и для алгебр $\mathbf{S}_n^{(h)}$.

Итак, $\mathfrak{J}$ есть изоморфизм алгебр $\mathbf{S}^{(1)}$ и $\mathbf{S}^{(2)}$ относительно операций

$$1, \quad \alpha A, \quad A^*, \quad A + B, \quad AB \tag{4.1.γ}$$

и расстояния

$$[[A - B]]. \tag{4.1.δ}$$

По (4.1.δ) $\mathfrak{J}$ изометрично. Продолжим теперь $\mathfrak{J}$ в $\mathbf{B}$ на максимально возможное множество с помощью метрической сходимости. В результате мы получим некоторое новое изометрическое (следовательно, однозначное) соответствие $\mathfrak{J}$. По лемме 4.1.4, (ii) $\mathfrak{J}$ отображает $\mathbf{M}^{(1)}$ на $\mathbf{M}^{(2)}$.

Непрерывность операций (4.1.γ) (см. доказательство утверждения (ii) леммы 4.1.4) гарантирует инвариантность операций (4.1.γ) относительно $\mathfrak{J}$. Поэтому $\mathfrak{J}$ есть (алгебраический) изоморфизм $\mathbf{M}^{(1)}$ и $\mathbf{M}^{(2)}$; это завершает доказательство.

4.2. В качестве предварительных замечаний, предшествующих введению других определений аппроксимативной конечности, мы разовьем несколько дальше идеи п. 1.5.

Лемма 4.2.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $w_3 = w_3(\varepsilon) > 0$, при котором имеет место следующее свойство.*

Рассмотрим произвольное кольцо $\mathbf{N}$ $\mathbf{M}$ и произвольный проектор $E \in \mathbf{M}$. Если существует элемент $A \in \mathbf{N}$, такой, что $[[A - E]] < w_3$, то существует также и проектор $F \in \mathbf{N}$, такой, что $[[F - E]] < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим вначале этот гипотетический элемент A. Мы имеем $[[A^* - E]] = [[(A-E)^*]] = [[A - E]] < \omega_3$. Так как $^1/_2(A + A^*) - E = {}^1/_2((A-E) + (A^* - E))$, то по неравенству треугольника $[[^1/_2(A + A^*) - E]] < \omega_3$. Таким образом, мы можем заменить A на $^1/_2(A + A^*)$, т. е. мы можем предполагать, что A эрмитов.

Рассмотрим теперь следующие функции:

$$\psi_1(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{для } |\lambda| \geqslant 1, \\ 2|\lambda| - 1 & \text{для } {}^1/_2 \leqslant |\lambda| < 1, \\ 0 & \text{для } |\lambda| \leqslant {}^1/_2; \end{cases}$$

$$\psi_2(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{для } |\lambda| \geqslant {}^1/_2, \\ 2|\lambda| & \text{для } |\lambda| < {}^1/_2. \end{cases}$$

Ясно, что к обеим функциям применима лемма 1.5.3. Образуем величину $\omega_2(\varepsilon)$ этой леммы для обеих функций и обозначим через $\omega_2(\varepsilon)$ минимум полученных двух величин.

Пусть

$$\omega_3(\varepsilon) = \omega_2'(\varepsilon/2). \tag{4.2.α}$$

Введем еще функцию[31]

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{для } |\lambda| \geqslant {}^1/_2, \\ 0 & \text{для } |\lambda| < {}^1/_2. \end{cases}$$

Очевидно следующее равенство:

$$\varphi(\lambda) = \overline{\varphi(\lambda)} = \varphi(\lambda)^2.$$

Поэтому оператор $F = \varphi(A)$ является проектором, принадлежащим $\mathbf{M}$ вместе с A. Далее, $\psi_1(\lambda) = \psi_2(\lambda) = \varphi(\lambda) = \lambda$ для $\lambda = 0,1$ — точек спектра проектора E. Поэтому

$$\psi_1(E) = \psi_2(E) = \varphi(E) = E. \tag{4.2.β}$$

Наконец, $(1 - \varphi(\lambda))\psi_1(\lambda) + \varphi(\lambda)\psi_2(\lambda) = \varphi(\lambda)$. Поэтому

$$(1 - F)\psi_1(A) + F\psi_2(A) = F. \tag{4.2.γ}$$

Теперь по лемме 1.5.3 из соотношения (4.2.α) и неравенства $[[A - E]] < \omega_3(\varepsilon)$ следует, что $[[\psi_1(A) - \psi_1(E)]] < \varepsilon/2$, $[[\psi_2(A) - \psi_2(E)]] < \varepsilon/2$. Поэтому если учесть (4.2.β), то $[[\psi_1(A) - E]] < \varepsilon/2$ и $[[\psi_2(A) - E]] < \varepsilon/2$. Поскольку[32] $|||F|||$ и $|||1 - F||| \leqslant 1$, то

$$[[(1 - F)(\psi_1(A) - E) + F(\psi_2(A) - E)]] < \varepsilon.$$

Это неравенство можно переписать в следующем виде:

$$[[(1 - F)\psi_1(A) + F\psi_2(A) - E]] < \varepsilon.$$

[31] Заметим, что функции $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$ непрерывны, $\varphi(\lambda)$ — нет.

[32] На самом деле в обоих соотношениях имеет место знак равенства, за исключением случая, когда одно из них обращается в 0.

Вместе с (4.2.γ) это дает $[[F - E]] < \varepsilon$, что и требовалось.

Лемма 4.2.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $w_4 = w_4(\varepsilon) > 0$, такое, что имеет место следующее свойство.*

Рассмотрим проекторы $E, F \in \mathbf{M}$ на замкнутые подпространства $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$. Если $[[E - F]] < w_4$, то существует частично изометричный оператор $W' \in \mathbf{M}$ с начальным множеством $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ и конечным множеством $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$, такой, что $[[W' - E]] < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим каноническое разложение оператора $A = FE$ (см. определение 4.4.1 работы [5, с. 143].

$$FE = A = W'B, \qquad EF = A^* = BW'^*. \tag{4.2.δ}$$

Здесь оператор B эрмитов и неотрицателен, а W' частично изометричен с начальным множеством $\mathfrak{M}' = [\mathrm{Range}\, A^*] = [\mathrm{Range}\, EF] \subseteq [\mathrm{Range}\, E] = \mathfrak{M}$ и конечным множеством $\mathfrak{N}' = [\mathrm{Range}\, A] = [\mathrm{Range}\, FE] \subseteq [\mathrm{Range}\, F] = \mathfrak{N}$.

При этом $[\mathrm{Range}\, W'^*] = \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M} = [\mathrm{Range}\, E]$. Таким образом, $EW'^* = W'^*$ или, переходя к сопряженным операторам,

$$W'E = W'. \tag{4.2.ε}$$

Для любого канонического разложения $B^2 = A^*A$. В нашем случае $A^*A = EF \cdot FE = EFE$, т. е.

$$B^2 = EFE. \tag{4.2.ζ}$$

Заметим также, что ввиду свойств этих операторов[32]

$$|||E||| \leqslant 1, \quad |||F||| \leqslant 1, \quad |||W'||| \leqslant 1. \tag{4.2.η}$$

Таким образом, из (4.2.ζ) следует, что $|||B^2||| \leqslant 1$, так что

$$|||B||| \leqslant 1. \tag{4.2.θ}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{для } |\lambda| \geqslant 1, \\ \sqrt{|\lambda|} & \text{для } |\lambda| \leqslant 1. \end{cases}$$

К этой функции применима, очевидно, лемма 1.5.3. Образуем для функции $\psi(\lambda)$ соответствующую величину $w_2(\varepsilon)$ этой леммы и положим

$$w_4(\varepsilon) = \min(w_2(\varepsilon/2), \varepsilon/2). \tag{4.2.ι}$$

Ясно, что $\psi(\lambda^2) = \lambda$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Поскольку оператор B неотрицателен и удовлетворяет (4.2.θ), то отрезок $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ содержит спектр оператора B, и поэтому $\psi(B^2) = B$ или ввиду равенства (4.2.ζ)

$$\psi(EFE) = B. \tag{4.2.κ}$$

С другой стороны, $\psi(\lambda) = \lambda$ для $\lambda = 0, 1$ (точек спектра проектора E), поэтому

$$\psi(E) = E. \tag{4.2.λ}$$

Теперь если $[[E - F]] < w_4$, то по (4.2.η) $[[(E - F)E]] < w_4$ и $[[E(E - F)E]] < w_4$, т. е.

$$[[E - FE]] < w_4, \qquad [[E - EFE]] < w_4. \tag{4.2.μ}$$

Из (4.2.μ), леммы 1.5.3 и (4.2.ι) следует, что

$$[[\psi(E)-\psi(EFE)]]<\varepsilon/2,$$

а из этого неравенства, из (4.2.$\varkappa$) и (4.2.λ), в свою очередь, следует, что $[[E-B]]<\varepsilon/2$. Отсюда и из (4.2.η) теперь имеем, что $[[W'(E-B)]]<\varepsilon/2$ или с учетом (4.2.ε) и (4.2.δ)

$$[[W'-FE]]<\varepsilon/2. \qquad (4.2.\nu)$$

Из (4.2.μ) и (4.2.ι) следует, что $[[E-FE]]<\varepsilon/2$, поэтому (4.2.ν) дает, что $[[W'-E]]<\varepsilon$, что и требовалось.

Лемма 4.2.3. *Если оператор $U\in\mathbf{M}$ унитарен, а $W\in\mathbf{M}$ частично изометричен и если U совпадает с W на его начальном множестве, то*

$$[[U-W]]\leqslant(2\,[[W-1]])^{1/2}.$$

Доказательство. Начальное множество оператора W есть область значений или конечное множество оператора W^*. Поэтому $UW^*=WW^*$ или, переходя к сопряженным операторам, $WU^*=WW^*$. Отсюда

$$(U-W)(U-W)^*=UU^*-UW^*-WU^*+WW^*=$$
$$=1-WW^*-WW^*+WW^*=1-WW^*.$$

Поэтому $[[U-W]]^2=\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}((U-W)(U-W)^*)=\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(1-WW^*)$, или

$$[[U-W]]=(\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(1-WW^*))^{1/2}. \qquad (4.2.\xi)$$

Применим теперь неравенство Шварца в том виде, как оно приведено в теореме VIII работы [6, с. 241], помня при этом, что $|||W|||\leqslant 1$ и, следовательно, $[[W]]\leqslant 1$. Тогда мы получим, что

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(1-WW^*)=\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(-W(W-1^*)-(W-1)1^*)\leqslant 2\,[[W-1]].$$

Отсюда и из равенства (4.2.ξ) следует неравенство доказываемой леммы.

Лемма 4.2.4. *Для любого $\varepsilon>0$ существует $\omega_5=\omega_5(\varepsilon)>0$, такое, что выполнено следующее свойство.*

Рассмотрим два проектора $E, F\in\mathbf{M}$, такие, что $D_{\mathbf{M}}(E)=D_{\mathbf{M}}(F)$. Если $[[E-F]]<\omega_5$, то существует унитарный оператор $U\in\mathbf{M}$, такой, что $F=UEU^{-1}$ и $[[U-1]]<\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\omega_5(\varepsilon)=\omega_4(\varepsilon')$, где $\varepsilon'=\varepsilon'(\varepsilon)>0$ будет выбрано позже.

Применим лемму 4.2.2. к проекторам E, F и к подпространствам $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, определяемым этими проекторами. В результате мы получим частично изометрический оператор $W'\in\mathbf{M}$ с начальным множеством $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$ и конечным множеством $\mathfrak{N}'\subseteq\mathfrak{N}$ и такой, что

$$[[W'-E]]<\varepsilon'. \qquad (4.2.o)$$

Поскольку W' переводит $\mathfrak{M}'$ в $\mathfrak{N}'$, то $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}')=D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}')$. По предположению $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M})=D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N})$, поэтому $D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}\ominus\mathfrak{M}')=D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{N}\ominus\mathfrak{N}')$. Выберем частично изо-

метрический оператор $V' \in \mathbf{M}$ с начальным множеством $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}'$ и конечным множеством $\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}'$. Тогда оператор $U' = W' + V' \in \mathbf{M}$ также частично изометричен, отображает $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ и совпадает на $\mathfrak{M}'$ с W'.

Применим все эти соотношения к операторам $1 - E$, $1 - F$ и подпространствам $\mathfrak{M}^{\perp}$ $(= \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})$, $\mathfrak{N}^{\perp}$ вместо E, F, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ (ясно, что $[[(1-E)-(1-F)]] = [[E-F]]$). Тогда мы получим частично изометрический оператор $W'' \in \mathbf{M}$ с начальным множеством $\mathfrak{M}'' \subseteq \mathfrak{M}^{\perp}$ и конечным множеством $\mathfrak{N}'' \subseteq \mathfrak{N}^{\perp}$ и такой, что

$$[[W'' - (1-E)]] < \varepsilon'. \tag{4.2.π}$$

Далее, существует частично изометрический оператор $U'' \in \mathbf{M}$ из $\mathfrak{M}^{\perp}$ в $\mathfrak{N}^{\perp}$, совпадающий с W'' на $\mathfrak{M}''$.

Положим теперь

$$W = W' + W'', \qquad U = U' + U''.$$

Операторы W, $U \in \mathbf{M}$ являются частично изометрическими с начальными множествами $[\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'']$, $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{\perp}] = \mathfrak{H}$ и конечными множествами $[\mathfrak{N}', \mathfrak{N}'']$, $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^{\perp}] = \mathfrak{H}$. Следовательно, оператор U унитарен.

Оператор U совпадает с оператором U' на начальном множестве $\mathfrak{M}$ этого оператора. Поэтому он отображает $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$. Отсюда

$$F = UEU^{-1}. \tag{4.2.ρ}$$

Оператор U совпадает также с оператором W на начальном множестве $[\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'']$ этого оператора. Поэтому по лемме 4.2.3

$$[[U - W]] \leqslant (2[[W-1]])^{1/2}. \tag{4.2.σ}$$

Из (4.2. о) и (4.2. π) следует, что

$$[[W - 1]] < 2\varepsilon'. \tag{4.2.τ}$$

Теперь (4.2.σ) и (4.2.τ) дают вместе, что $[[U - W]] < (4\varepsilon')^{1/2}$. Отсюда и из (4.2.τ) вытекает, что

$$[[U - 1]] < (4\varepsilon')^{1/2} + 2\varepsilon'. \tag{4.2.υ}$$

Поэтому если мы выберем ε' так, что $(4\varepsilon')^{1/2} + 2\varepsilon' \leqslant \varepsilon$, то из (4.2. υ) получим, что

$$[[U - 1]] < \varepsilon. \tag{4.2.φ}$$

Таким образом, ввиду соотношений (4.2.ρ) и (4.2.φ) выбранное нами значение w_5 обеспечивает выполнение условий леммы.

4.3. Мы будем постепенно менять определение аппроксимативной конечности серией шагов (см. ниже определения 4.3.1, 4.5.2 и 4.6.1).

Определение 4.3.1. *Фактор* **M** *(A)-аппроксимативно конечен, если справедливо следующее.*

Для любых $A_1, \ldots, A_m \in \mathbf{M}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $n = n_1(A_1, \ldots, A_m, \varepsilon)$, такое, что для любого $q \geqslant n$ существует фактор $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1(q, A_1, \ldots, A_m, \varepsilon)$ со следующими свойствами:

(i) **N** *имеет тип* (I_q);

(ii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$;

(iii) *существуют элементы* $B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{N}$, *такие, что*

$$[[B_h - A_h]] < \varepsilon \qquad \text{для } h = 1, \ldots, m.$$

В данном пункте нас будут интересовать некоторые следствия этого определения, и в частности, какие еще свойства аппроксимирующего фактора $\mathbf{N}$ можно задавать. В пяти леммах этого пункта мы будем предполагать, что фактор $\mathbf{M}$ (A)-аппроксимативно конечен.

Лемма 4.3.1. *Для произвольных операторов* $A_1, \ldots, A_m \in \mathbf{M}$, *произвольного проектора* $E \in \mathbf{M}$, *такого, что* $D_{\mathbf{M}}(E) = 1/p$, $p = 1, 2, \ldots$, *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует число* $n_2 = n_2(A_1, \ldots, A_m, E, \varepsilon)$, *такое, что для любого* $q \geqslant n_2$, *делящегося на* p, *существует фактор* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_2(q, A_1, \ldots, A_m, E, \varepsilon)$ *со следующими свойствами*[33] :

(i) $\mathbf{N}$ *имеет тип* (I_q);

(ii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$;

(iii) *существуют* $B_1 \ldots, B_m \in \mathbf{N}$ такие, что

$$[[B_h - A_h]] < \varepsilon \qquad \text{для } h = 1, \ldots, m;$$

(iv) *существует проектор* $F \in \mathbf{N}$, *такой, что*

$$D_{\mathbf{M}}(F) = D_{\mathbf{M}}(E) = 1/p \text{ и } [[F - E]] < \varepsilon.$$

Доказательство. Применим определение 4.3.1 к операторам $A_1, \ldots, A_m$, E вместо фигурирующих там операторов $A_1, \ldots, A_m$ и к числу ε' вместо ε, где $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon)$ будет выбрано позже.

Пусть $n_2(A_1, \ldots, A_m, E, \varepsilon) = n_1(A_1, \ldots, A_m, E, \varepsilon')$ и $\mathbf{N}_2(q, A_1, \ldots, A_m, E, \varepsilon) = \mathbf{N}_1(q, A_1, \ldots, A_m, E, \varepsilon')$. Рассмотрим некоторое $q \geqslant n_2$, делящееся на p, и соответствующее кольцо $\mathbf{N} = \mathbf{N}_2$.

Ввиду данного выше определения кольца $\mathbf{N}_2$ утверждения (i) и (ii) доказываемой леммы следуют из условий (i) и (ii) определения 4.3.1. Далее, согласно условию (iii) этого определения

$$[[B_h - A_h]] < \varepsilon' \qquad \text{для } h = 1, \ldots, m \tag{4.3.α}$$

и

$$[[B_{m+1} - E]] < \varepsilon'. \tag{4.3.β}$$

Пусть

$$\varepsilon' = \min(w_3(\varepsilon''), \varepsilon), \tag{4.3.γ}$$

где $\varepsilon'' = \varepsilon''(\varepsilon)$ будет выбрано позже. Тогда из соотношений (4.3.α) и (4.3.γ) следует утверждение (iii) рассматриваемой леммы, поэтому остается лишь вывести свойство (iv) из (4.3.β).

По лемме 4.2.1 из соотношений (4.3.β) и (4.3.γ) следует существование проектора $F_1 \in \mathbf{N}$, такого, что

$$[[F_1 - E]] < \varepsilon''. \tag{4.3.δ}$$

---

[33] Заметим, что это есть усиленный вариант определения 4.3.1.

Отсюда[34]

$$|D_{\mathbf{M}}(F_1) - D_{\mathbf{M}}(E)| < \varepsilon''. \tag{4.3.ε}$$

Так как $\mathbf{N}$ — фактор типа (I_q) и q делится на p, то существует проектор $F \in \mathbf{N}$, такой, что

$$D_{\mathbf{M}}(F) = D_{\mathbf{M}}(E) = 1/p; \tag{4.3.ζ}$$

при этом F можно выбрать так, что либо $F_1 \leqslant F$, либо $F_1 \geqslant F$. В этом случае[35] $[[F_1 - F]] = (|D_{\mathbf{M}}(F_1) - D_{\mathbf{M}}(F)|)^{1/2}$. Из этого равенства и соотношений (4.3.ε), (4.3.ζ) следует, что $[[F_1 - F]] < (\varepsilon'')^{1/2}$, поэтому ввиду (4.3.δ)

$$[[F - E]] < (\varepsilon'')^{1/2} + \varepsilon''. \tag{4.3.η}$$

Таким образом, если мы выберем $\varepsilon'' = \varepsilon''(\varepsilon) > 0$ так, что $(\varepsilon'')^{1/2} + \varepsilon'' \leqslant \varepsilon$, то из (4.3.η) мы можем заключить, что $[[F - E]] < \varepsilon$. Ввиду (4.3.ζ) и того факта, что $F \in \mathbf{N}$, кольцо $\mathbf{N}$ обладает свойством (iv), что и требовалось показать.

Лемма 4 3.2. *Пусть даны произвольные операторы* $A, \ldots, A_m \in \mathbf{M}$, *произвольный проектор* $E \in \mathbf{M}$, *такой, что* $D_{\mathbf{M}}(E) = 1/p$, $p = 1, 2, \ldots$, *и произвольное* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует число* $n_3 = n_3(A_1, \ldots, A_m, E, \varepsilon)$, *такое, что для любого* $q \geqslant n_3$, *делящегося на* p, *существует фактор* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_3(q, A_1, \ldots, A_m, E, \varepsilon)$, *обладающий свойствами* (i), (ii), (iii) *леммы* 4.3.1 *и дополнительно свойством* (iv') $E \in \mathbf{N}$[33].

Доказательство. Условия этой леммы идентичны условиям леммы 4.3.1. Применим последнюю к операторам $A_1, \ldots, A_m, E$, но с числом ε' вместо ε, таким, что

$$\varepsilon' = \min(w_5(\varepsilon''), \varepsilon''), \tag{4.3.θ}$$

где $\varepsilon'' = \varepsilon''(\varepsilon) > 0$ будет выбрано позже.

---

[34] Для любых двух проекторов $E, F \in \mathbf{M}$

$$|D_{\mathbf{M}}(F) - D_{\mathbf{M}}(E)| \leqslant [[F - E]].$$

Доказательство. Имеем

$$|D_{\mathbf{M}}(F) - D_{\mathbf{M}}(E)| = |\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(F) - \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E)| = |\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(F - E)|.$$

Это, в свою очередь, $\leqslant [[1]] \cdot [[F - E]]$ (см. теорему VIII работы [6, с. 241]), т. е. $\leqslant [[F - E]]$, что и требовалось.

[35] Для любых двух проекторов $E, F \in \mathbf{M}$, таких, что либо $E \geqslant F$, либо $E \leqslant F$,

$$[[F - E]] = (|D_{\mathbf{M}}(F) - D_{\mathbf{M}}(E)|)^{1/2}$$

Доказательство. Ввиду симметрии можно предполагать, что $E \leqslant F$. Тогда оператор $F - E$ является проектором и $D_{\mathbf{M}}(F) - D_{\mathbf{M}}(E) = D_{\mathbf{M}}(F - E)$. Пусть $G = F - E$. Мы должны доказать, что $[[G]] = (D_{\mathbf{M}}(G))^{1/2}$. Имеем

$$[[G]]^2 = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(G^* G) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(G) = D_{\mathbf{M}}(G).$$

Обозначим полученные таким образом число n_2, кольцо $\mathbf{N}_2$ и операторы $B_1, \ldots$ $\ldots, B_m, F$ соответственно через $n_2', \mathbf{N}_2^{+\prime}, B_1', \ldots, B_m', F'$. Пусть $n_3 = n_2'$ и $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N}_2^+$. Ввиду выбора (4.3.θ) лемма 4.3.1, (iii) дает, что

$$[[B_h' - A_h]] < \varepsilon'' \qquad \text{для } h = 1, \ldots, m, \tag{4.3.ι}$$

тогда как из свойства (iv) этой леммы следует, что

$$[[F' - E]] < w_5(\varepsilon'') \tag{4.3.κ}$$

и

$$D_{\mathbf{M}}(F') = D_{\mathbf{M}}(E). \tag{4.3.λ}$$

Соотношения (4.3.κ) и (4.3.λ) позволяют нам применить к операторам F', E лемму 4.2.4, заменив ими операторы E, F этой леммы. Следовательно, существует унитарный оператор $U \in \mathbf{M}$, такой, что

$$[[U - 1]] < \varepsilon'' \tag{4.3.μ}$$

и

$$E = UF'U^{-1}. \tag{4.3.ν}$$

Из (4.3.μ) следует, что $[[A_h - U^{-1}A_hU]] = [[A_h - A_hU + A_hU - U^{-1}A_hU]] \leqslant$ $\leqslant |||A_h|||\,[[1 - U]] + [[1 - U^{-1}]]\,|||A_hU||| \leqslant 2\,|||A_h|||\,\varepsilon''$. Поэтому по (4.3.ι) $[[B_h' -$ $- U^{-1}A_hU]] < (2\,|||A_h||| + 1)\,\varepsilon''$, отсюда

$$[[UB_h'U^{-1} - A_h]] < (2\,|||A_h||| + 1)\,\varepsilon''. \tag{4.3.ξ}$$

Выберем теперь $\varepsilon'' = \varepsilon''(\varepsilon) > 0$ так, что

$$\varepsilon'' = \varepsilon/(2\max_{h=1,\ldots,m} |||A_h||| + 1). \tag{4.3.ο}$$

Пусть $\mathbf{N} = \mathbf{N}_3 = U\mathbf{N}^+U^{-1}$. Тогда $\mathbf{N}$ есть фактор типа (I_q), поскольку $\mathbf{N}^+$ был таким фактором. Таким образом, свойство (i) справедливо. Так как $U \in \mathbf{M}$, то $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$. Далее, $B_h' \in \mathbf{N}^+$ дает $B_h = UB_h'U^{-1} \in \mathbf{N}$, а из соотношений (4.3.ο) и (4.3.ξ) следует, что $[[B_h - A_h]] < \varepsilon$, так что выполнено (iii). Наконец, $F' \in \mathbf{N}^+$ и поэтому по (4.3.ν) $E = UF'U^{-1} \in \mathbf{N}$, отсюда (iv′) также выполнено.

Лемма 4.3.3. *Если мы дополним условия леммы 4.3.2 равенствами*

$$EA_h = A_hE = A_h, \tag{α}$$

то в ее утверждения мы можем дополнительно включить равенства[36]

$$EB_h = B_hE = B_h. \tag{β}$$

Доказательство. Применим лемму 4.3.2 и возьмем B_h' вместо B_h. Положим теперь $B_h = EB_h'E$. Тогда соотношение (β) выполнено, и поскольку B_h', $E \in \mathbf{N}$, то $B_h \in \mathbf{N}$. Ввиду (α) $EA_hE = A_h$, а по свойству (iii) леммы 4.3.2 $[[B_h' - A_h]] < \varepsilon$. Поэтому $[[E(B_h' - A_h)E]] < \varepsilon$ или $[[B_h - A_h]] < \varepsilon$. Тем самым свойство (iii) выполнено и для операторов B_h.

[36] С теми же самыми значениями величин n_3, $\mathbf{N}_3$, что и в лемме 4.3.2.

Другие утверждения леммы ((i), (ii) и (iv′)) не зависят от выбора элементов B_b. Таким образом, доказательство завершено.

Лемма 4.3.4. *Если дополнить условия леммы* 4.3.3 *предположением* $E \in \mathbf{N}^0$, *где* $\mathbf{N}^0$ *есть фактор типа* (I_p), *то можно дополнительно утверждать, что*

(v) $\mathbf{N}^0 \subseteq \mathbf{N}^{33,36}$.

Доказательство. Применим лемму 4.3.3 и переобозначим $\mathbf{N}$ через $\mathbf{N}^+$.

Рассуждения, использованные в начале доказательства свойства (i) леммы 4.1.2, показывают, что для всех проекторов $G \in \mathbf{N}^0$ $(\subseteq \mathbf{M})$ по-прежнему справедливо равенство $D_{\mathbf{M}}(G) = D_{\mathbf{N}^0}(G)$.

Поэтому, в частности, $D_{\mathbf{N}^0}(E) = D_{\mathbf{M}}(E) = 1/p$. Следовательно, в силу аргументов, приведенных в доказательстве леммы 2.6.2, существует система матричных единиц $W^0_{u,v}$, $u, v = 1, \dots, p$, порядка p в кольце $\mathbf{N}^0$, такая, что $\sum_{u=1}^{p} W^0_{u,u} = 1$ и $W^0_{1,1} = E$. Таким образом, в обозначениях леммы 4.1.1, (β)

Существует матричный базис $W^0_{u,v}$, $u, v = 1, \dots, p$, в $\mathbf{N}^0$, такой, что $W^0_{1,1} = E$. (4.3.π)

С другой стороны, в силу аргументов леммы 2.6.3, примененных к кольцу $\mathbf{N}^+$, существует система матричных единиц $W^+_{u,v}$, $u, v = 1, \dots, p$, порядка p в $\mathbf{N}^+$, такая, что $\sum_{u=1}^{p} W^+_{u,u} = 1$ и $W^+_{1,1} = E$ (заметим, что это не есть матричный базис в кольце $\mathbf{N}^+$, поскольку $\mathbf{N}^+$ имеет тип (I_q), а не (I_p)!).

Положим теперь $U = \sum_{u=1}^{p} W^0_{u,1} W^+_{1,u}$. Поскольку $W^0_{u,1} \in \mathbf{N}^0 \subseteq \mathbf{M}$, $W^+_{1,u} \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$, то $U \in \mathbf{M}$. Прямым вычислением непосредственно проверяется, что $U^*U = UU^* = 1$, т. е. оператор U унитарен. Кроме того,

$$UW^+_{u,v} = W^0_{u,v}U \quad \text{или} \quad W^0_{u,v} = UW^+_{u,v}U^{-1}, \tag{4.3.ρ}$$

и поскольку $W^0_{1,1} = W^+_{1,1} = E$, то

$$EU = UE = E. \tag{4.3.σ}$$

Рассмотрим отображение

$$X \to UXU^{-1}: \tag{4.3.τ}$$

Оно переводит кольцо $\mathbf{N}^+$ в кольцо $\mathbf{N} = U\mathbf{N}^+U^{-1}$, и $\mathbf{N}$ вместе с $\mathbf{N}^+$ является фактором типа (I_q). Таким образом, свойство (i) установлено. Далее, так как $\mathbf{N}^+ \subseteq \mathbf{M}$ и $U \in \mathbf{M}$, то $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$, поэтому свойство (ii) также имеет место. Ввиду равенства (β) леммы 4.3.3 и (4.3.σ) отображение (4.3.τ) сохраняет все операторы B_h, поэтому все они принадлежат как к кольцу $\mathbf{N}^+$, так и к кольцу $\mathbf{N}$. Далее, свойства (iii) и (iv′) сохраняются при отображении U, поэтому они справедливы и в новой ситуации. Ввиду равенств (4.3.ρ) отображение (4.3.τ) переводит оператор $W^+_{u,v}$ в оператор $W^0_{u,v}$, поэтому $W^+_{u,v} \in \mathbf{N}^+$ дает $W^0_{u,v} \in \mathbf{N}$. Отсюда по (4.3.π) и лемме 4.1.1, (ii) следует, что каждый оператор $A \in \mathbf{N}^0$ имеет вид $A = \sum_{u=1}^{p} \sum_{v=1}^{p} a_{v,u} W^0_{u,v}$, т. е. $A \in \mathbf{N}$. Таким образом, $\mathbf{N}^0 \subseteq \mathbf{N}$, а это и есть требуемое соотношение (v). Доказательство завершено.

Лемма 4.3.5. *Предположим, что фактор* $\mathbf{M}$ (A)-*аппроксимативно конечен. Тогда для произвольных операторов* $A_1, \ldots, A_m \in \mathbf{M}$, *произвольного числа* $p = 1, 2, \ldots$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует число* $n_4 = n_4(A_1, \ldots, A_m, p, \varepsilon)$, *такое, что для любого* $q \geqslant n_4$, *делящегося на* p, *и любого фактора* $\mathbf{N}^0 \subseteq \mathbf{M}$ *типа* (I_p) *существует фактор* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_4(q, A_1, \ldots, A_m, \mathbf{N}^0, p, \varepsilon)$, *обладающий следующими свойствами*:

(i) $\mathbf{N}$ *имеет тип* (I_q);

(ii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$;

(iii) *существуют операторы* $B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{N}$, *такие, что* $[[B_h - A_h]] < \varepsilon$ *для* $h = 1, \ldots, m$;

(v) $\mathbf{N}^0 \subseteq \mathbf{N}$.

Замечание. Эта лемма совершенно аналогична лемме 4.3.4. Однако из этой леммы исключены условие (α) и утверждение (β). Ввиду этого проектор E вообще больше не упоминается.

Доказательство. Выберем в кольце $\mathbf{N}^0$ матричный базис $W_{u,v}$, $u, v = 1, \ldots, p$, и пусть $E = W_{1,1}$. Положим $A_{u,v;h} = W_{1,u} A_h W_{v,1}$.

Мы имеем равенство $D_{\mathbf{M}}(E) = D_{\mathbf{M}}(W_{1,1}) = 1/p$ (см. вывод соотношения $(2.7.\alpha)$). Очевидно, $EA_{u,v;h} = A_{u,v;h}E = A_{u,v;h}$.

Воспользуемся теперь леммой 4.3.4, заменив в ней операторы $A_1, \ldots, A_m$ и число ε mp^2 операторами $A_{u,v;h}$, $h = 1, \ldots, m$, $u, v = 1, \ldots, p$, и числом ε/p^2.

Обозначим соответствующие n_3, $\mathbf{N}_3$ через n_4, $\mathbf{N}_4$. Запишем $\mathbf{N} = \mathbf{N}_4$. Обозначим операторы, отвечающие операторам $A_{u,v;h}$ (так же как B_h отвечали A_h в лемме 4.3.4), через $B_{u,v;h}$.

Ясно, что

$$A_h = \sum_{u=1}^{p} \sum_{v=1}^{p} W_{u,1} A_{u,v;h} W_{1,v}. \qquad (4.3.\upsilon)$$

Пусть

$$B_h = \sum_{u=1}^{p} \sum_{v=1}^{p} W_{u,1} B_{u,v;h} W_{1,v}. \qquad (4.3.\varphi)$$

Далее мы ведем рассуждения следующим образом.

Свойства (i), (ii) и (v) леммы 4.3.4 остаются без изменений. Поскольку $B_{u,v;h} \in \mathbf{N}$ и $W_{u,v} \in \mathbf{N}^0 \subseteq \mathbf{N}$, то $B_h \in \mathbf{N}$. Так как $[[B_{u,v;h} - A_{u,v;h}]] < \varepsilon/p^2$, то $[[W_{u,1} \times (B_{u,v;h} - A_{u,v;h}) W_{1,v}]] < \varepsilon/p^2$ и

$$\left[\left[\sum_{u=1}^{p} \sum_{v=1}^{p} W_{u,1} (B_{u,v;h} - A_{u,v;h}) W_{1,v} \right]\right] < \varepsilon.$$

Поэтому в силу $(4.3.\upsilon)$ и $(4.3.\varphi)$ $[[B_h - A_h]] < \varepsilon$, следовательно, имеет место свойство (iii), и доказательство завершено.

4.4. Теперь мы воспользуемся результатами двух предыдущих пунктов, чтобы сравнить два введенных понятия аппроксимативной конечности.

Лемма 4.4.1. *Допустим, что фактор* $\mathbf{M}$ (A)-*аппроксимативно конечен и последовательность* $\{p_1, p_2, \ldots\}$ *удовлетворяет условиям* (i), (ii) *леммы* 4.1.3. *Тогда существует подпоследовательность* $\{p_{1'}, p_{2'}, \ldots\}$ *последовательности* $\{p_1, p_2, \ldots\}$, *такая, что* $\mathbf{M}$ *есть аппроксимативно конечный фактор типа* $\{p_{1'}, p_{2'}, \ldots\}$.

Доказательство. Согласно работе [2, с. 387—388] существует последовательность $A_1, A_2, \ldots \in \mathbf{M}$, всюду плотная в $\mathbf{M}$ в смысле сильной сходимости. Пусть $p_0 = 1$ и $\mathbf{N}_0 = (\alpha 1)$. $\mathbf{N}_0$ есть фактор типа (I_1), принадлежащий $\mathbf{M}$. Выберем

по индукции для каждого $n = 1, 2, \ldots$ число p_n и фактор $\mathbf{N}_n \subseteq \mathbf{M}$ типа $(\mathrm{I}_{p_{n'}})$. Если для любого $n = 1, 2, \ldots$ число $p_{(n-1)'}$ и фактор $\mathbf{N}_{n-1}$ уже выбраны, то выберем $p_{n'}$ и $\mathbf{N}_n$ следующим образом. Воспользуемся леммой 4.3.5, заменив в ней элементы $A_1, \ldots, A_m$, p, ε, $\mathbf{N}^0$ на $A_1, \ldots, A_n$, $p_{(n-1)}$, $1/n$, $\mathbf{N}_{n-1}$ соответственно. Выберем p_n из последовательности $[p_1, p_2, \ldots]$ произвольным образом, но так, что $p_n > \max(n_4, p_{(n-1)'})$. При этом, в частности, p_n будет делиться на $p_{(n-1)'}$. Положим $q = p_{n'}$ и $\mathbf{N}_n = \mathbf{N}$ (кольцо, возникающее при использовании леммы 4.3.5; см. выше).

В результате мы имеем подпоследовательность $[p_{1'}, p_{2'}, \ldots]$ последовательности $[p_1, p_2, \ldots]$. Кроме того, $\mathbf{N}_{n-1} \subseteq \mathbf{N}_n$, т. е.

$$\mathbf{N}_1 \subseteq \mathbf{N}_2 \subseteq \ldots \tag{4.4.α}$$

Далее, $\mathbf{N}_n$ есть фактор типа $(\mathrm{I}_{p_{n'}})$ и $\mathbf{N}_n \subseteq \mathbf{M}$. Ясно, что

$$\mathbf{R}(\mathbf{N}_n,\ n = 1, 2, \ldots) \subseteq \mathbf{M}. \tag{4.4.β}$$

Теперь для $n \geqslant h$ существует элемент $B_h^{(n)} \in \mathbf{N}_n$, такой, что $[[B_h^{(n)} - A_h]] < 1/n$. Следовательно, A_h есть метрический предел множества $\mathbf{R}(\mathbf{N}_n, n = 1, 2, \ldots)$, и поэтому в силу теоремы I $A_h \in \mathbf{R}(\mathbf{N}_n, n = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots \in \mathbf{R}(\mathbf{N}_n, n = 1, 2, \ldots)$. Поскольку множество $A_1, A_2, \ldots$ всюду плотно в $\mathbf{M}$ в смысле сильной сходимости, то, учитывая (4 4.β), мы получаем

$$\mathbf{R}(\mathbf{N}_n,\ n = 1, 2, \ldots) = \mathbf{M}. \tag{4.4.γ}$$

Соотношения (4.4.α) и (4.4.γ) означают, что $\mathbf{M}$ является аппроксимативно конечным фактором типа $[p_{1'}, p_{2'}, \ldots]$, что и утверждалось.

Нам понадобится далее еще одно вспомогательное утверждение. Имея в виду последующие приложения, мы докажем его в несколько более общей форме, чем это необходимо сейчас.

Лемма 4.4.2. *Пусть* $\mathbf{N}$, $\mathbf{O}$ — *два фактора типа* (I_p) *и* (I_q) *или* (II_1) *соответственно. Пусть p есть делитель r и (если q существует) r — делитель q. Допустим, что* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{O}$. *Тогда существует фактор* $\mathbf{R}$ *типа* (I_r), *такой, что* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{O}$.

Доказательство. На основании леммы 2.6.2 или 2.6.3 и того, что фактор $\mathbf{O}$ имеет тип (II_1) или (I_q), q делится на r, существует фактор $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{O}$ типа (I_r) с некоторым матричным базисом $W^{+}_{\mathrm{o},\omega}$, $\mathrm{o}, \omega = 1, \ldots, r$. Выберем также какой-нибудь матричный базис $W^{0}_{u,v}$, $u, v = 1, \ldots, p$, в $\mathbf{N}$. Тогда $W^{+}_{\mathrm{o},\omega}$ есть система матричных единиц порядка r с $\sum'_{\mathrm{o}=1} W^{+}_{\mathrm{o},\mathrm{o}} = 1$, а $W^{0}_{u,v}$ есть система матричных единиц порядка p с $\sum^{r}_{u=1} W^{0}_{u,u} = 1$.

Пусть

$$W^{++}_{u,v} = \sum_{i=0}^{r/p} W^{+}_{(u-1)r/p+i,(v-1)r/p+i}. \tag{4.4.δ}$$

Тогда прямым вычислением проверяется, что $W^{++}_{u,v}$, $u, v = 1, \ldots, p$, образуют систему матричных единиц порядка p с $\sum^{p}_{u=1} W^{++}_{u,v} = 1$. Непосредственно доказывается, что при стандартной нормировке $D_{\mathrm{O}}(W^{++}_{1,1}) = 1/p = D_{\mathrm{O}}(W^{0}_{1,1})$. Поэтому

существует частично изометричный оператор $V \in \mathbf{O}$, такой, что $V^*V = W^{++}_{1,1}$, $VV^* = W^0_{1,1}$. Положим теперь

$$U = \sum_{u=1}^{t} W^0_{u,1} V W^{++}_{1,u}.$$

Ясно, что $U \in \mathbf{O}$. Прямым вычислением проверяется, что $U^*U = UU^* = 1$, т. е. оператор U унитарен. Кроме того,

$$UW^{++}_{u,v} = W^0_{u,v} U, \qquad W^0_{u,v} = UW^{++}_{u,v} U^{-1}. \tag{4.4.ε}$$

Поэтому замена фактора $\mathbf{R}$ на фактор $U\mathbf{R}U^{-1}$ и системы $W^+_{0,\omega}$ на систему $UW^+_{0,\omega}U^{-1}$ не меняет их свойств, но при этом оператор $W^{++}_{u,v}$ переходит в оператор $W^0_{u,v} = UW^{++}_{u,v}U^{-1}$. Следовательно, мы можем предполагать, что $W^{++}_{u,v} = W^0_{u,v}$, т. е.

$$W^0_{u,v} = \sum_{i=1}^{r/p} W^+_{(u-1)r/p+i,(v-1)r/p+i}. \tag{4.4.ζ}$$

Таким образом, все операторы $W^0_{u,v} \in \mathbf{R}$, т. е. $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$. Как мы уже знаем, $\mathbf{R}$ является фактором типа (I_r) и $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{O}$.

Доказательство окончено.

Теперь мы можем окончить рассуждения, связанные с определением 4.3.1.

Лемма 4.4.3. *При тех же предположениях, что и в лемме* 4.4.1, $\mathbf{M}$ *является аппроксимативно конечным фактором типа* $[p_1, p_2, \ldots]$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 4.4.1. Обозначим соответствующие факторы $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots$ через $\mathbf{N}_{1'}, \mathbf{N}_{2'}, \ldots$ Пусть, кроме того, $0' = 0$, $\mathbf{N}_{0'} = \mathbf{N}_0 = (\alpha \cdot 1)$.

Тогда факторы $\mathbf{N}_n$ определены лишь для $n = 0', 1', 2', \ldots$ Рассмотрим произвольное $m' = 1', 2', \ldots$ Мы имеем, что $\mathbf{N}_{(m-1)'} \subseteq \mathbf{N}_{m'}$, причем $\mathbf{N}_{(m-1)'}$, $\mathbf{N}_{m'}$ являются факторами типов $(\mathrm{I}_{p_{(m-1)'}})$, $(\mathrm{I}_{p_{m'}})$ соответственно. Каждый член последовательности $p_{(m-1)'}, p_{(m-1)'+1}, \ldots, p_{m'-1}, p_{m'}$ является делителем последующего члена. Поэтому, применяя лемму 4.4.2, мы получаем последовательность факторов $\mathbf{N}_{(m-1)'+1}$, $\mathbf{N}_{(m-1)'+2}, \ldots, \mathbf{N}_{m'-1}$ со следующими свойствами:

$$\mathbf{N}_{(m-1)'} \subseteq \mathbf{N}_{(m-1)'+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{N}_{m'-1} \subseteq \mathbf{N}_{m'},$$

и $\mathbf{N}_n$ $(n = (m-1)' + 1, \ldots, m' - 1)$ имеет тип (I_{p_n}).

Итак, мы определили факторы $\mathbf{N}_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Имеем

$$\mathbf{N}_1 \subseteq \mathbf{N}_2 \subseteq \ldots \tag{4.4.η}$$

и $\mathbf{N}_n$ есть фактор типа (I_{p_n}). Наконец, ввиду соотношения (4.4.η) и леммы 4.4.1

$$\mathbf{R}(\mathbf{N}_n;\ n = 1, 2, \ldots) = \mathbf{R}(\mathbf{N}_{m'},\ m' = 1, 2, \ldots) = \mathbf{M}. \tag{4.4.θ}$$

Из всех этих свойств следует, что $\mathbf{M}$ является аппроксимативно конечным фактором типа $[p_1, p_2, \ldots]$, что и утверждалось .

4.5. Перейдем теперь к еще одному определению аппроксимативной конечности, анонсированному в начале п. 4.3.

Определение 4.5.1. *Кольцо* $\mathbf{N}$ *имеет конечный порядок, если обладает конечным линейным базисом, т. е. (конечной) системой операторов* $A^0_1, \ldots, A^0_a$,

такой, что кольцо **N** *является множеством всех линейных комбинаций* $A = \sum_{u=1}^{q} x_u A_u^0$ ($x_1, \ldots, x_q$ *— произвольные комплексные числа*).

Определение 4.5.2. *Фактор* **M** (*B*)-*аппроксимативно конечен, если для любых операторов* $A_1, \ldots, A_m \in$ **M** *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует кольцо* **N**, *обладающее следующими свойствами*:

(i) **N** *имеет конечный порядок*;

(ii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$;

(iii) *существуют операторы* $B_1, \ldots, B_m \in$ **N**, *такие, что*

$$[[B_h - A_h]] < \varepsilon \qquad \text{для } h = 1, \ldots, m.$$

Лемма 4.5.1. *Если* **M** *является аппроксимативно конечным фактором типа* $[p_1, p_2, \ldots]$, *то он* (*B*)-*аппроксимативно конечен.*

Доказательство. Допустим, что заданы операторы $A_1, \ldots, A_m \in$ **M** и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим последовательность факторов $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots$, участвующих в определении 4.1.1. По лемме 4.1.4, (ii) для каждого $h = 1, \ldots, m$ существует фактор $\mathbf{N}_{n_h}$, такой, что для некоторого оператора $B_h \in \mathbf{N}_n$

$$[[B_h - A_h]] < \varepsilon. \tag{4.5.α}$$

Пусть $n = \max(n_1, \ldots, n_m)$, тогда $B_h \in \mathbf{N}_{n_h} \subseteq \mathbf{N}_n$, т. е.

$$B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{N}_n. \tag{4.5.β}$$

Фактор $\mathbf{N}_n$ имеет тип (I_{p_n}), и поэтому по лемме 4.1.1, (ii) он является кольцом конечного порядка. С учетом (4.5.α), (4.5.β) это завершает доказательство.

Сравнение лемм 4.4.3 и 4.5.1 показывает, что если нам удастся вывести (*A*)-аппроксимативную конечность из (*B*)-аппроксимативной конечности, то эквивалентность всех типов аппроксимативной конечности будет установлена. Этим мы займемся в следующем пункте, а пока мы докажем некоторые предварительные леммы о кольцах конечного порядка; на самом деле мы определим их структуру[37]. Таким образом, в настоящем пункте **N** будет кольцом конечного порядка.

Лемма 4.5.2. (i) *Существует некоторое максимальное число* r, *для которого найдется система* $E_1, \ldots, E_r$ *попарно ортогональных проекторов, которые* $\neq 0$ *и* $\in$ **N**.

(ii) *Для всякой такой системы* (*с максимальным* r) *оператор* $E = \sum_{s=1}^{r} E_s$ *является единицей кольца* **N**.

(iii) *Каждый проектор* E_s *такой системы* (*с максимальным* r) *минимален* (*относительно* **N**) *в смысле определения* 5.1.2 *работы* [5, с. 143].

Доказательство. (i). Всякая такая система необходимо линейно независима. Поэтому число ее элементов должно быть $\leqslant q$ (см. определение 4.5.1). Следовательно, среди чисел, для которых указанная система существует, есть максимальное.

---

[37] Последующие леммы есть просто вывод приспособленных к настоящей ситуации структурных теорем Веддербурна о полупростых алгебрах. Кроме того, эти леммы можно рассматривать и как некоторые результаты теории унитарных представлений, включающие в себя аналог теоремы Бернсайда—Фробениуса—Шура.

(ii). Пусть E есть единица кольца $\mathbf{N}$. Сператор $\sum'_{s=1} E_s$ является проектором в $\mathbf{N}$, поэтому $\sum'_{s=1} E_s \leqslant E$. Следовательно, оператор $E_{r+1} = E - \sum'_{s=1} E_s$ является проектором в $\mathbf{N}$, ортогональным всем E_s. Ввиду предположения о максимальности числа r необходимо, чтобы $E_{r+1} = 0$, т. е. $E = \sum'_{s=1} E_s$.

(iii). Рассмотрим произвольный проектор $F \leqslant E_s$, принадлежащий $\mathbf{N}$. Тогда проекторы $E'_s = F$ и $E''_s = E_s - F$ попарно ортогональны и ортогональны всем $E_{s'}$, $s' \neq s$. Поэтому ввиду предположения о максимальности числа r необходимо $E'_s = 0$ или $E''_s = 0$, т. е. $F = 0$ или E_s. Это и есть условие минимальности E_s.

Замечание. Центр $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$ кольца $\mathbf{N}$ также имеет конечный порядок. Поэтому к нему применима доказанная лемма. Соответствующая максимальная система проекторов $\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_{\bar{r}}$ удовлетворяет тому условию, что проектор $\bar{E} = \sum^{\bar{r}}_{s=1} \bar{E}_s$ является единицей кольца $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$ и, следовательно, по теоремам 3, 4 работы [2, с. 393] единицей кольца $\mathbf{N}$.

Лемма 4.5.3. (i) *Проекторы* $\bar{E}_s$, $s = 1, \ldots, \bar{r}$, (*см. выше*) *таковы, что их образы* $\overline{\mathfrak{M}}_s$ *приводят кольца* $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$,

(ii) $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}')_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)} = (\bar{E}_s)_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$.

Доказательство. (i). Это следует из того, что $\bar{E}_s \in \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$.

(ii). Это эквивалентно утверждению о том, что $\bar{E}_s A = A\bar{E}_s = \alpha\bar{E}_s$ для всех операторов $A \in \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$. Пусть $\bar{E}_s A = A\bar{E}_s = A'$. Ясно, что $A' \in \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$, $\bar{E}_s A' = A'\bar{E}_s = A'$. Поскольку $\bar{E}_s$ есть минимальный проектор в $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$, то отсюда следует, что $A' = \alpha\bar{E}_s$ (см. последнюю часть доказательства леммы 5.1.3 работы [5, с. 144]).

Лемма 4.5.4. *Кольцо* $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ *является фактором* (*в* $\overline{\mathfrak{M}}_s$) *типа* (I_{q_s}), $q_s = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Если A' принадлежит центру кольца $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$, то $A'\bar{E}_s$ принадлежит центру кольца $\mathbf{N}$, причем $A\bar{E}_s = \bar{E}_s A = A$. Таким образом, центр кольца $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ принадлежит $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}')_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$. Обратное включение очевидно.

Отсюда следует, что центр кольца $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ есть $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}')_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$, и, следовательно, само кольцо $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ является фактором (см. лемму 4.5.3, (ii)).

Кольцо $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ имеет конечный порядок, поскольку таковым было $\mathbf{N}$ Поэтому из леммы 4.5.2 следует, что $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ имеет минимальный проектор. Таким образом, $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ является прямым фактором (см. теорему IV и лемму 8.6.1 работы [5, с. 150, 173]). Поскольку кольцо $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ имеет конечный порядок, оно не

может быть фактором типа (I_∞) и поэтому есть фактор типа (I_{q_s}), $q_s = 1, 2, \ldots$ Доказательство завершено.

Лемма 4.5.5. *Кольцо* N *имеет конечный линейный базис, состоящий из операторов* $W^s_{u,v}$, $s = 1, \ldots, \bar{r}$; $u, v = 1, \ldots, q_s$, *такой, что для каждого* s *операторы* $W^s_{u,v}$, $u, v = 1, \ldots, q_s$, *образуют систему матричных единиц порядка* q_s *с* $\bar{E}_s = \sum_{u=1}^{q_s} W^s_{u,u}$. *Таким образом, число* q *определения* 4.5.1 *равно* $\sum_{s=1}^{\bar{r}} (q_s)^2$.

Доказательство. Пользуясь леммой 4.5.4, мы получаем, что кольцо $\mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ обладает конечным линейным базисом из операторов $\tilde{W}^s_{u,v}$ (в $\overline{\mathfrak{M}}_s$), $u, v = 1, \ldots, q_s$, которые образуют систему матричных единиц порядка q_s в $\overline{\mathfrak{M}}_s$ с $\bar{E}_{s(\overline{\mathfrak{M}}_s)} = \sum_{u=1}^{q_s} \tilde{W}^s_{u,u}$.

Поскольку $\tilde{W}^s_{u,v} \in \mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$, то существует оператор $W^{s0}_{u,v} \in \mathbf{N}$, ограничение которого на $\overline{\mathfrak{M}}_s$ совпадает с $\tilde{W}^s_{u,v}$. Пусть $W^s_{u,v} = W^{s0}_{u,v}\bar{E}_s$. Так как $\bar{E}_s \in \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$, то $W^s_{u,v} \in \mathbf{N}$ и, кроме того, $W^s_{u,v} = W^s_{u,v}\bar{E}_s = \bar{E}_s W^s_{u,v}$. Ясно, что $(W^s_{u,v})_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)} = \tilde{W}^s_{u,v}$, и, как непосредственно проверяется, операторы $W^s_{u,v}$ образуют систему матричных единиц в пространстве $\mathfrak{H}$ с $\bar{E}_s = \sum_{u=1}^{q_s} W^s_{u,u}$.

Рассмотрим произвольный оператор $A_s \in \mathbf{N}$, такой, что $\bar{E}_s A_s = A_s \bar{E}_s = A_s$. Тогда существует ограничение $A_{s(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$ оператора A_s на подпространство $\overline{\mathfrak{M}}_s$, а ограничение A_s на $\overline{\mathfrak{M}}_s^{\perp}$ равно 0. Рассматривая $\bar{E}_s$ как оператор из $\mathfrak{H}$ в $\overline{\mathfrak{M}}_s$, мы имеем равенства $A_s = A_{s(\overline{\mathfrak{M}}_s)} \bar{E}_s$, $W^s_{u,v} = \tilde{W}^s_{u,v}\bar{E}_s$. Так как $A_{s(\overline{\mathfrak{M}}_s)} \in \mathbf{N}_{(\overline{\mathfrak{M}}_s)}$, то из первого абзаца проводимого доказательства следует, что $A_{s(\overline{\mathfrak{M}}_s)} = \sum_{u=1}^{q_s} \sum_{v=1}^{q_s} a^s_{u,v} \tilde{W}^s_{u,v}$, и поэтому $A_s = A_{s(\overline{\mathfrak{M}}_s)} \bar{E}_s = \sum_{u=1}^{q_s} \sum_{v=1}^{q_s} a^s_{u,v} \tilde{W}^s_{u,v} \bar{E}_s = \sum_{u=1}^{q_s} \sum_{v=1}^{q_s} a^s_{u,v} W^s_{u,v}$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $A \in \mathbf{N}$. Пусть $A_s = \bar{E}_s A$, что равно также $A\bar{E}_s$, поскольку $\bar{E}_s \in \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}'$. По предыдущему $A_s = \sum_{u=1}^{q_s} \sum_{v=1}^{q_s} a^s_{u,v} W^s_{u,v}$. Ввиду замечания к лемме 4.5.2

$$A = \bar{E}A = \sum_{s=1}^{\bar{r}} \bar{E}_s A = \sum_{s=1}^{\bar{r}} \sum_{u=1}^{q_s} \sum_{v=1}^{q_s} a^s_{u,v} W^s_{u,v}.$$

Таким образом, операторы $W^s_{u,v}$, $s = 1, \ldots, \bar{r}$; $u, v = 1, \ldots, q_s$, действительно образуют конечный линейный базис в $\mathbf{N}$.

Теперь мы докажем одну лемму, представляющую определенный самостоятельный интерес. Она применима к любому кольцу $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$ конечного порядка. Мы предполагаем, что задано представление кольца $\mathbf{N}$ в смысле леммы 4.5.5, порожденное некоторыми матричными элементами $W^s_{u,v}$.

Лемма 4.5.6. *Для данного $q = 1, 2, \dots$ можно найти фактор* **O** *типа* (I_q), *удовлетворяющий включениям* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{O} \subseteq \mathbf{M}$, *тогда и только тогда, когда в кольце* **N**

$$\text{Все числа } qD_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}) \text{ — целые.} \tag{4.5.γ}$$

Доказательство. *Необходимость.* Допустим, что фактор с указанными свойствами существует.

Рассмотрения в начале доказательства леммы 4.1.2, (i) показывают, что $D_{\mathbf{M}}(G) = D_{\mathbf{O}}(G)$ для всех проекторов $G \in \mathbf{O}\,(\subseteq \mathbf{M})$, т. е., в частности, $D_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}) = D_{\mathbf{O}}(W^s_{1,1})$, поскольку $W^s_{1,1}$ есть проектор $\in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{O}$. Но поскольку **O** есть фактор типа (I_q), то величина $D_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}) = D_{\mathbf{O}}(W^s_{1,1})$ должна быть равна одному из значений $(0, 1/q, \dots, 1)$, т. е. число $qD_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1})$ должно быть целым. Таким образом, соотношение (4.5.γ) выполнено.

Достаточность. Допустим, что кольцо **N** удовлетворяет условию (4.5.γ). Ввиду леммы 4.5.5 мы должны доказать следующее.

> Пусть дана система $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{\bar{r}}$ попарно ортогональных проекторов, которые $\neq 0$ и $\in \mathbf{M}$. Пусть, кроме того, для каждого s дана система матричных единиц $W^s_{u,v} \in \mathbf{M}$ порядка q_s, такая, что $\bar{E}_s = \sum_{u=1}^{q_s} W^s_{u,u}$ и $q_s = 1, 2, \dots$
>
> Пусть, наконец, для данного q все числа $qD_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1})$ — целые. Тогда существует фактор $\mathbf{O} \subseteq \mathbf{M}$ типа (I_q), такой, что все $W^s_{u,v} \in \mathbf{O}$. (4.5.δ)

Поэтому далее мы полностью забудем про кольцо **N** и будем иметь дело лишь с (4.5.δ).

Доказательство (4.5.δ). Имеем $D_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}) = p_s/q$, $p_s = 1, 2, \dots$ Ввиду частичной изометричности оператора $W^s_{u,1}$ проекторы $W^s_{1,1}$ и $W^s_{u,u}$ эквивалентны (см. лемму 2.6.1). Поэтому

$$D_{\mathbf{M}}(W^s_{u,u}) = p_s/q, \quad D_{\mathbf{M}}(\bar{E}_s) = p_s q_s/q. \tag{4.5.ε}$$

Мы можем предполагать, что

$$\sum_{s=1}^{\bar{r}} \bar{E}_s = 1. \tag{4.5.ζ}$$

Действительно, иначе мы могли бы взять $\bar{E}_{\bar{r}+1} = 1 - \sum_{s=1}^{\bar{r}} \bar{E}_s$. Тогда $\bar{E}_{\bar{r}+1}$ есть проектор $\neq 0$ и число $qD_{\mathbf{M}}(\bar{E}_{\bar{r}+1}) = q - \sum_{s=1}^{\bar{r}} qD_{\mathbf{M}}(\bar{E}_s)$ является целым. Поэтому мы могли бы добавить проектор $\bar{E}_{\bar{r}+1}$ к системе $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{\bar{r}}$, положив $q_{\bar{r}+1} = 1$ и $W^{\bar{r}+1}_{1,1} = \bar{E}_{\bar{r}+1}$.

Ввиду (4.5.ε) и (4.5.ζ) $\sum_{s=1}^{\bar{r}} p_s q_s = q$. Положим $l_s = \sum_{t=1}^{s} p_t q_t$, $s = 0, 1, \dots, \bar{r}$. Тогда

$$l_s = l_{s-1} + p_s q_s \qquad \text{для } s = 1, \dots, \bar{r},$$

$$l_0 = 0, \qquad l_{\bar{r}} = q. \tag{4.5.η}$$

Так как $\mathbf{M}$ — фактор типа (II_1), то по лемме 2.6.2 существует фактор $\mathbf{O}^+ \subseteq \mathbf{M}$ типа (I_q) с матричным базисом $W^+_{o,\omega}$, o, $\omega = 1, \dots, q_s$. Таким образом, $W^+_{o,\omega}$ есть система матричных единиц порядка q с $\sum_{u=1}^{q} W^+_{u,u} = 1$. Положим

$$E^+_s = \sum_{u=l_{s-1}+1}^{l_s} W^+_{u,u}, \qquad s = 1, \dots, \bar{r}, \tag{4.5.θ}$$

$$W^{+s}_{u,v} = \sum_{u=1}^{p_s} W^+_{l_{s-1}+(u-1)p_s+i,\ l_{s-1}+(v-1)p_s+i}$$

$$\text{для} \quad s = 1, \dots, \bar{r}; \quad u, v = 1, \dots, q_s. \tag{4.5.ι}$$

Тогда прямым вычислением проверяется, что $E^+_s \neq 0$ являются попарно ортогональными проекторами с $\sum_{s=1}^{\bar{r}} E^+_s = 1$ и что $W^{+s}_{u,v}$ образуют (при фиксированном s) систему матричных единиц порядка q_s с $\sum_{u=1}^{q_s} W^{+s}_{u,u} = E^+_s$. Ясно, что все эти операторы принадлежат $\mathbf{M}$.

Проекторы $W^+_{u,u}$ эквивалентны (ввиду наличия операторов $W^+_{u,v}$), и так как $\sum_{u=1}^{q} W^+_{u,u} = 1$, то $D_{\mathbf{M}}(W^+_{u,u}) = 1/q$ Поэтому по (4.5.ι) $D_{\mathbf{M}}(W^{+s}_{1,1}) = p_s/q$, а по (4.5.ε) $D_{\mathbf{M}}(W^{+s}_{1,1}) = D_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1})$. Следовательно, существует частично изометрический оператор $V_s \in \mathbf{M}$ с начальным проектором $W^{+s}_{1,1}$ и конечным проектором $W^s_{1,1}$. Положим теперь

$$U = \sum_{s=1}^{\bar{r}} \sum_{u=1}^{q_s} W^s_{u,1} V_s W^{+s}_{1,u}.$$

Ясно, что $U \in \mathbf{M}$. Прямым вычислением проверяется, что $U^*U = UU^* = 1$, т. е. U унитарен, и что

$$UW^{+s}_{u,v} = W^s_{u,v}U \qquad \text{или } W^s_{u,v} = UW^{+s}_{u,v}U^{-1}. \tag{4.5.κ}$$

Кольцо $\mathbf{O} = U\mathbf{O}^+U^{-1}$ является фактором типа (I_q), $\mathbf{O} \subseteq \mathbf{M}$. По (4.5.ι) $W^{+s}_{u,v} \in \mathbf{O}^+$, и поэтому ввиду (4.5.κ) $W^s_{u,v} = UW^{+s}_{u,v}U^{-1} \in U\mathbf{O}^+U^{-1} = \mathbf{O}$. Таким образом, все операторы $W^s_{u,v} \in \mathbf{O}$.

4.6. Теперь мы в состоянии завершить наше доказательство о связи различных определений аппроксимативной конечности.

Лемма 4.6.1. *Предположим, что даны кольца* $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, *операторы* $\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{\bar{r}}$ *и* $W^s_{u,v}$, *такие же, как и в лемме* 4.5.5, *причем* $\bar{E} = \sum_{s=1}^{\bar{r}} \bar{E}_s = 1$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $n_5 = n_5(\mathbf{N}, \varepsilon)$, *такое, что для любого* $q \geqslant n_5$ *существует проектор* $E = E(q, \mathbf{N}, \varepsilon) \in \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}'$, *для которого*

(i) $D_{\mathbf{M}}(1 - E) < \varepsilon$;

(ii) *все числа* $qD_{\mathbf{M}}(EW^s_{1,1}) \neq 0$ *и целые.*

Доказательство. Для данного $q = 1, 2, \dots$ мы хотим выбрать числа $k_s = 1, 2, \dots$; $s = 1, \dots, \bar{r}$, такие, что

$$q\left(D_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}) - \varepsilon / \sum_{s=1}^{\prime} q_s\right) < k_s \leqslant qD_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}). \tag{4.6.α}$$

Это, конечно, возможно, если $qD_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}) \geqslant 1$ и $q\varepsilon / \sum_{s=1}^{\bar r} q_s \geqslant 1$ для $s = 1, \ldots, \bar r$. Предположим поэтому, что $q \geqslant n_5$, где

$$n_5 = n_5(\mathbf{N}, \varepsilon) = \max\left(\sum_{s=1}^{\bar r} q_s/\varepsilon,\ 1/D_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}),\ s = 1, \ldots, \bar r\right). \qquad (4.6.\beta)$$

Теперь соотношения (4.6.α) и $k_s \neq 0$ дают

$$D_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}) - \varepsilon / \sum_{s=1}^{\bar r} q_s < k_s/q \leqslant D_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1}), \qquad k_s/q \neq 0.$$

Так как $\mathbf{M}$ — фактор типа (II_1), то можно найти проектор $G^s \in \mathbf{M}$, такой, что

$$D_{\mathbf{M}}(G^s) = k_s/q \neq 0, \qquad (4.6.\gamma)$$

$$G^s \leqslant W^s_{1,1} \qquad (4.6.\delta)$$

и

$$D_{\mathbf{M}}(W^s_{1,1} - G^s) < \varepsilon / \sum_{s=1}^{\bar r} q_s. \qquad (4.6.\varepsilon)$$

Оператор $W^s_{u,1}$ частично изометричен с начальным проектором $W^s_{1,1}$ и конечным проектором $W^s_{u,u}$. Поэтому он переводит проектор $G^s \leqslant W^s_{1,1}$ в некоторый другой проектор $G^s_u \in \mathbf{M}$

$$G^s_u \leqslant W^s_{u,u}. \qquad (4.6.\zeta)$$

Кроме того, при этом неравенство (4.6.ε) переходит в неравенство

$$D_{\mathbf{M}}(W^s_{u,u} - G^s_u) < \varepsilon / \sum_{s=1}^{\bar r} q_s. \qquad (4.6.\eta)$$

Наконец, поскольку $W^s_{u,v} W^s_{v,1} = W^s_{u,1}$, то $W^s_{u,v}$ переводит проектор G^s_v в проектор G^s_u, т. е.

$$W^s_{u,v} G^s_v = G^s_u W^s_{u,v}. \qquad (4.6.\theta)$$

При $s \neq t$ или $v \neq w$ проектор $W^s_{v,v}$, начальный проектор оператора $W^s_{u,v}$, ортогонален проектору $W^t_{w,w}$ и, следовательно, $G^t_w \leqslant W^t_{w,w}$. Таким образом, мы имеем равенства

$$W^s_{u,v} G^t_w = 0 \qquad \text{для } s \neq t \quad \text{или } v \neq w, \qquad (4.6.\iota)$$

$$G^t_w W^s_{u,v} = 0 \qquad \text{для } s \neq t \quad \text{или } u \neq w. \qquad (4.6.\varkappa)$$

Положим теперь $E = \sum_{s=1}^{\bar r} \sum_{u=1}^{q_s} G^s_u$. Очевидно, $E \in \mathbf{M}$, и поскольку $\sum_{s=1}^{\bar r} \sum_{u=1}^{q_s} W^s_{u,u} = \sum_{s=1}^{\bar r} \bar E_s = 1$, то $1 - E = \sum_{s=1}^{\bar r} \sum_{u=1}^{q_s} (W^s_{u,u} - G^s_u)$.

Поэтому из (4.6.η) следует, что

$$D_{\mathbf{M}}(1 - E) < \varepsilon. \qquad (4.6.\lambda)$$

Соотношения (4.6. θ), (4.6.ι), (4.6.ϰ) вместе дают, что

$$W^s_{u,v} E = E W^s_{u,v} \left(= W^s_{u,v} G^s_v = G^s_u W^s_{u,v}\right).$$

Следовательно, проектор E коммутирует с операторами $W^s_{u,v}$ и поэтому по лемме 4.5.5 со всем кольцом $\mathbf{N}$. Так как $E \in \mathbf{M}$, то это дает

$$E \in \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}'. \tag{4.6.μ}$$

Наконец, прямое вычисление показывает, что

$$EW^s_{1,1} = G^s_1 = G^s. \tag{4.6.ν}$$

Из этих соотношений следуют все наши утверждения: (4.6 μ) дает принадлежность $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}'$, (4.6. λ) означает выполнение (i), а (4.6.ν) и (4.6.γ) означают (ii). Таким образом, лемма доказана.

Теперь мы можем сделать последний шаг.

Лемма 4.6.2. *Если фактор* $\mathbf{M}$ *(В)-аппроксимативно конечен, то он (А)-аппроксимативно конечен.*

Доказательство. Мы должны проверить для $\mathbf{M}$ справедливость критерия, фигурирующего в определении 4.3.1.

Пусть поэтому заданы произвольные операторы $A_1, \ldots, A_m \in \mathbf{M}$ и $\varepsilon > 0$. Применим определение 4.5.2 к операторам $A_1, \ldots, A_m$ и числу $\varepsilon/2$. Тогда мы получим кольцо $\mathbf{N}$ и операторы $B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{N}$, описанные в этом определении, так что

$$[[B_s - A_s]] < \varepsilon/2. \tag{4.6.o}$$

Кольцо $\mathbf{N}$ имеет конечный порядок и $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$. Образуем проекторы $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_r$ и операторы $W^s_{u,v}$ леммы 4.5.5 для этого $\mathbf{N}$. К образованным операторам и числу

$$\varepsilon' = ((\varepsilon/2) \max (|||B_s|||; \quad s = 1, \ldots, r)))^2 \tag{4.6.π}$$

применим лемму 4.6.1 и полученное число обозначим через $n_5 = n_5(\mathbf{N}, \varepsilon')$. Для любого $q \geqslant n_5$ рассмотрим проектор $E = E(q, \mathbf{N}, \varepsilon')$ леммы 4.6.1.

В соответствии с выбранным $E \in \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}'$ и кольцо $\mathbf{N}_E = E \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot E$ имеет конечный порядок, поскольку $\mathbf{N}$ имеет конечный порядок. Операторы $E\overline{E}_1, \ldots, E\overline{E}_r$ и $EW^s_{u,v}$ играют для $\mathbf{N}_E$ роль операторов $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_r$ и $W^s_{u,v}$ в $\mathbf{N}$ (см. лемму 4.5.5). По лемме 4.6.1, (ii) все числа $qD_{\mathbf{M}}(EW^s_{1,1})$ — целые. Поэтому к кольцу $\mathbf{N}_E$ применима лемма 4.5.6, и в результате мы получаем фактор $\mathbf{O}$ типа (I_q), такой, что

$$\mathbf{N}_E - \mathbf{O} \subseteq \mathbf{M}. \tag{4.6.ρ}$$

Так как $B_s \in \mathbf{N}$, то

$$C_s = EB_s \in \mathbf{N}_E \subseteq \mathbf{O}. \tag{4.6.σ}$$

Теперь лемма 4.6.1, (i) дает $D_{\mathbf{M}}(1 - E) < \varepsilon'$. Поэтому $[[1 - E]] < \varepsilon'^{1/2}$[35], откуда

$$[[B_s - C_s]] = [[B_s(1 - E)]] < |||B_s|||\, \varepsilon'^{1/2}.$$

Поэтому по (4.6. π)

$$[[B_s - C_s]] < \varepsilon/2. \tag{4.6.τ}$$

Учитывая (4. 6. o) и (4. 6. τ), имеем

$$[[C_s - A_s]] < \varepsilon. \tag{4.6.υ}$$

Таким образом, мы удовлетворим определению 4.3.1, если положим $n_1 = n_1(A_1, \ldots, A_m, \varepsilon) = n_5(\mathbf{N}, \varepsilon)$ и для $q \geqslant n_1 = n_5$ $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_1(q, A_1, \ldots, A_m, \varepsilon) = \mathbf{O}$[38]. Таким образом, наши операторы $C_1, \ldots, C_m$ заменяют операторы $B_1, \ldots, B_m$ определения 4.3.1, а условия (i)—(iii) получаются следующим образом: (i) имеет место в силу построения кольца **O**, (ii) следует из (4.6.ρ), (iii) совпадает с (4.6.υ).

Таким образом, доказательство завершено.

Прежде чем сделать заключительные замечания, мы введем еще один вариант понятия аппроксимативной конечности.

Определение 4.6.1. *Фактор* **M** *(C)-аппроксимативно конечен, если существует последовательность колец* $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots,$ *таких, что*

(i) $\mathbf{N}_n$ *имеет конечный порядок;*

(ii) $\mathbf{N}_1 \subseteq \mathbf{N}_2 \subseteq \ldots;$

(iii) *кольцо* **M** *порождено кольцами* $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots,$

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\mathbf{N}_n, n = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 4.6.3. *Если* **M** *— аппроксимативно конечный фактор типа* $[p_1, p_2, \ldots]$, *то он (C)-аппроксимативно конечен.*

Доказательство. Немедленно следует из сравнения определений 4.1.1 и 4.6.1.

Лемма 4.6.4. *Если фактор (C)-аппроксимативно конечен, то он (B)-аппроксимативно конечен.*

Доказательство. Условия (ii), (iii) определений 4.6.1 и 4.1.1 совпадают. Воспользуемся теперь леммой 4.1.4.

Пусть заданы соответственно операторы $A_1, \ldots, A_m \in \mathbf{M}$ и $\varepsilon > 0$. По лемме 4.1.4 A_k есть предел некоторой метрически сходящейся последовательности, принадлежащей теоретико-множественной сумме колец $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots$ Поэтому существует оператор $B_k \in \mathbf{N}_{n_k}$, такой, что

$$[[B_k - A_k]] < \varepsilon.$$

Положим теперь $n = \max(n_1, \ldots, n_m)$. Тогда каждый оператор $B_k \in \mathbf{N}_{n_k} \subseteq \mathbf{N}_n$. Таким образом, кольцо $\mathbf{N} = \mathbf{N}_n$ удовлетворяет всем требованиям определения 4.5.2.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема XII. *Все виды аппроксимативной конечности эквивалентны друг другу: (A), (B), (C) и любой тип* $[p_1, p_2, \ldots]$ *(с числами* $[p_1, p_2, \ldots]$, *удовлетворяющими условиям* (i), (ii) *леммы* 4.1.3).

В связи с этим мы в дальнейшем будем использовать выражение «аппроксимативно конечный» без особых уточнений.

Доказательство. Импликации

$$(A) \rightarrow \text{тип } [p_1, p_2, \ldots] \rightarrow (B) \rightarrow (A)$$

были установлены в леммах 4.4.3, 4.5.1 и 4.6.2 соответственно. Следовательно,

$$\text{тип } [p_1, p_2, \ldots] \leftrightarrows (A) \leftrightarrows (B).$$

[38] Заметим, что последняя величина зависит от аргументов предыдущего выражения.

Далее,

$$\text{тип } [p_1, p_2, \ldots] \to (C) \to (B)$$

следует из лемм 4.6.3, 4.6.4 соответственно, поэтому также

$$\text{тип } [p_1, p_2, \ldots] \leftrightarrows (C).$$

4.7. Мы до сих пор не установили, что аппроксимативно конечные факторы вообще существуют. В п. 5.2, 5.3 и 5.6 мы дадим различные примеры таких факторов. В действительности труднее указать фактор типа (II_1), не являющийся аппроксимативно конечным.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы доказать одну общую теорему, которая в качестве побочного результата дает существование аппроксимативно конечных факторов.

Нам необходима следующая подготовительная лемма.

Лемма 4.7.1. *Пусть дан фактор* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$ *типа* (I_p), $p = 1, 2, \ldots$ *Если оператор* $A \in \mathbf{N}$ *таков, что*:

(i) $[[AX - XA]] \leqslant \varepsilon \, ||| X ||| $ *для любого* $X \in \mathbf{N}$;

(ii) $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = 0$,

то $[[A]] \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Для любого унитарного оператора $U \in \mathbf{N}$ $|||U||| = |||U^{-1}||| = 1$. Поэтому ввиду (i) $[[UAU^{-1} - A]] = [[U(AU^{-1} - U^{-1})A]] \leqslant [[AU^{-1} - U^{-} A]] \leqslant \varepsilon$. Кроме того, ввиду (ii)

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(UAU^{-1}) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = 0.$$

Таким образом, если операторы $U_1, \ldots, U_m$ унитарны и принадлежат $\mathbf{N}$, то $[[U_iAU_i^{-1} - A]] \leqslant \varepsilon$, $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(U_iAU_i^{-1}) = 0$. Поэтому если

$$B = (1/m) \sum_{i=1}^{m} U_iAU_i^{-1}, \qquad (4.7.\alpha)$$

то

$$[[B - A]] \leqslant \varepsilon, \qquad (4.7.\beta)$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B) = 0. \qquad (4.7.\gamma)$$

Рассмотрим теперь произвольный изоморфизм $\mathcal{K}$ кольца $\mathbf{N}$ и кольца (комплексных) матриц порядка p (см. лемму 4.1.1). Пусть

$$\mathcal{K}A = a = \{a_{t,s}\}, \qquad \mathcal{K}B = b = \{b_{t,s}\}.$$

Образуем далее операторы $V, X_1, \ldots, X_p \in \mathbf{N}$, такие, что

$$\mathcal{K}V = v = \{v_{s,t}\}, \qquad v_{s,t} = \begin{cases} 1, & \text{если } s - t \equiv 1 \bmod p, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\mathcal{K}X_r = x_r = \{x^r_{s,t}\}, \qquad x^r_{s,t} = \begin{cases} 1, & \text{если } t = s \neq r, \\ -1, & \text{если } t = s = r, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Матрицы v, x_r унитарны, поэтому операторы V, X_r также унитарны.

Положим теперь $m = p2^p$. Обозначим через $U_1, \ldots, U_m$ операторы $V^h X_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot X_p^{k_p}$, $h = 0, 1, \ldots, p-1$; $k_1, \ldots, k_p = 0, 1$. Тогда прямое вычисление, основанное на использовании приведенных формул, показывает с учетом (4.7.α), что[39]

$$b_{t,s} = \begin{cases} (1/p) \sum_{u=1}^{p} a_{u,u} = a_0 & \text{для } t = s, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$B = a_0 \cdot 1. \tag{4.7.δ}$$

Соотношения (4.7.δ) и (4.7.γ) дают вместе, что $0 = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B) = a_0$, т. е. $B = 0$. Поэтому неравенство (4.7.β) превращается в неравенство $[[A]] \leqslant \varepsilon$, что и требовалось.

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

Теорема XIII. *Если* **M** *есть фактор типа* (II_1), *то* **M** *содержит подкольцо* **O**, *являющееся аппроксимативно конечным фактором типа* (II_1).

Доказательство. Выберем последовательность $\{p_1, p_2, \ldots\}$, удовлетворяющую условиям (i), (ii) леммы 4.1.3; например, можно взять $p_n = 2^n$.

Положим $p_0 = 1$ и $\mathbf{N}_0 = (\alpha 1)$. Кольцо $\mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{M}$ есть фактор типа (I_1). Мы индуктивно построим сейчас для $n = 1, 2, \ldots$ фактор $\mathbf{N}_n \subseteq \mathbf{M}$ типа (I_{p_n}). Если для любого $n = 1, 2, \ldots$ фактор $\mathbf{N}_{n-1}$ уже построен, построим фактор $\mathbf{N}_n$ следующим образом. Факторы $\mathbf{N}_{n-1}$, **M** имеют соответственно типы ($\mathrm{I}_{p_{n-1}}$), (II_1); $\mathbf{N}_{n-1} \subseteq \mathbf{M}$,

---

[39] Это вычисление может быть проведено следующим образом. Пусть $\varepsilon_{s,t}^{(r)} = (-1)^{\delta_{r,s} + \delta_{r,t}}$, т. е.

$$\varepsilon_{s,t}^{(r)} = \begin{cases} 1, & \text{если либо } r \neq t \text{ и } s \neq r, \text{ либо } r = s = t, \\ -1, & \text{если либо } r = s \text{ и } r \neq t, \text{ либо } r \neq s,\ r = t. \end{cases}$$

Тогда если $X_r A X_r^{-1} = c^{(r)} = (c_{s,t}^{(r)})$, то

$$c_{s,t}^{(r)} = \varepsilon_{s,t}^{(r)} a_{s,t}.$$

Пусть $B_0 = \sum_{k_1, \ldots, k_p = 0, 1} (X_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot X_p^{k_p}) A (X_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot X_p^{k_p})^{-1}$ и $B_0 = d = (d_{t,s})$. Тогда

$$d_{t,s} = \sum_{k_1, \ldots, k_p = 0, 1} (\varepsilon_{s,t}^{(1)})^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\varepsilon_{s,t}^{(p)})^{k_p} a_{s,t} = ((\varepsilon_{s,t}^{(1)})^0 + (\varepsilon_{s,t}^{(1)})^1) \cdot \ldots \cdot ((\varepsilon_{s,t}^{(p)})^0 + (\varepsilon_{s,t}^{(p)})^1)\, a_{s,t} =$$

$$= (1 + \varepsilon_{s,t}^{(1)}) \cdot \ldots \cdot (1 + \varepsilon_{s,t}^{(p)})\, a_{s,t},$$

при $s \neq t$, $\varepsilon_{s,t}^{(s)} = -1$ и $d_{s,t} = 0$. Если $s = t$, то $d_{s,t} = 2^p a_{s,s}$. Таким образом, матрица B диагональна.

Действие матрицы V на диагональную матрицу сводится к циклической перестановке диагональных элементов. Поэтому если B и $b_{s,t}$ такие, как указано в тексте, то

$$B = (1/(p2^p)) \sum_{h=0}^{p-1} V^h B_0 V^{-h},$$

$$b_{s,t} = 0, \quad \text{если } s \neq t,$$

$$b_{s,s} = (1/p) \sum_{u=1}^{p} a_{u,u}.$$

p_{n-1} есть делитель p_n. Применим поэтому к $\mathbf{N}_{n-1}$, $\mathbf{M}$, p_{n-1}, p_n лемму 4.4.2, заменив в ней указанными элементами элементы $\mathbf{N}$, $\mathbf{0}$, p, r. Положим $\mathbf{N}_n = \mathbf{R}$. Тогда кольцо $\mathbf{N}_n \subseteq \mathbf{M}$ является фактором типа (I_{p_n}).

Таким образом,

$$\mathbf{N}_1 \subseteq \mathbf{N}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{M}. \tag{4.7.ε}$$

Обозначим через $\mathbf{S}$ теоретико-множественную сумму последовательности $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \ldots$ Ввиду (4.7.ε) $\mathbf{S}$ есть алгебра.

Обозначим множество предельных точек $\mathbf{S}$ в смысле метрической сходимости через $\mathbf{S}_1$. Те же самые аргументы, что и в доказательстве леммы 4.1.4, показывают, что $\mathbf{S}_1$ есть алгебра и более того — кольцо. Поэтому вложение $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}_1$ влечет за собой вложение $\mathbf{R}(\mathbf{S}) \subseteq \mathbf{S}_1$. Следовательно, $\mathbf{R}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}_1$, так что

$$\mathbf{M} \supseteq \mathbf{R}(\mathbf{N}_n, n = 1, 2, \ldots) = \mathbf{R}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}_1. \tag{4.7.ζ}$$

Теперь мы докажем, что $\mathbf{S}_1$ есть фактор, т. е. что каждый оператор $A \in \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_1'$ принадлежит $(\alpha \cdot 1)$.

Рассмотрим произвольный оператор $A \in \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_1'$. Выберем $\varepsilon > 0$. Так как $A \in \mathbf{S}_1$, то существует оператор $B_\varepsilon \in \mathbf{N}_{p_{n_\varepsilon}}$, такой, что

$$[[B_\varepsilon - A]] < \varepsilon. \tag{4.7.η}$$

Пусть $C_\varepsilon = B_\varepsilon - \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B_\varepsilon) \cdot 1$. Тогда $C_\varepsilon \in \mathbf{N}_{p_{n_\varepsilon}}$ и

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(C_\varepsilon) = 0. \tag{4.7.θ}$$

Рассмотрим произвольный оператор $X \in \mathbf{N}_{p_{n_\varepsilon}}$. Так как $A \in \mathbf{S}_1'$, $X \in \mathbf{S}_1$, то $AX - XA = 0$. Кроме того, очевидно, $B_\varepsilon X - XB_\varepsilon = C_\varepsilon X - XC_\varepsilon$. Следовательно, $C_\varepsilon X - XC_\varepsilon = B_\varepsilon X - XB_\varepsilon = (B_\varepsilon - A)X - X(B_\varepsilon - A)$, откуда $[[C_\varepsilon X - XC_\varepsilon]] \leqslant 2 ||| X ||| \, [[B_\varepsilon - A]]$. Учитывая (4.7.η), имеем теперь, что

$$[[C_\varepsilon X - XC_\varepsilon]] \leqslant 2 ||| X ||| \cdot \varepsilon. \tag{4.7.ι}$$

Соотношения (4.7.θ) и (4.7.ι) дают возможность применить лемму 4.7.1 к C_ε, 2ε вместо соответствующих A, ε. Таким образом,

$$[[C_\varepsilon]] \leqslant 2\varepsilon.$$

Пусть $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(B_\varepsilon) = \alpha_\varepsilon$. Тогда последнее неравенство означает, что

$$[[B_\varepsilon - \alpha_\varepsilon \cdot 1]] \leqslant 2\varepsilon,$$

поэтому по (4.7.η)

$$[[A - \alpha_\varepsilon \cdot 1]] \leqslant 3\varepsilon. \tag{4.7κ}$$

Так как это неравенство справедливо для всех $\varepsilon > 0$, то оно означает, что A есть предел метрически сходящейся последовательности, принадлежащей множеству $(\alpha \cdot 1)$. Поскольку множество $(\alpha \cdot 1)$, очевидно, замкнуто, то $A \in (\alpha \cdot 1)$, что и требовалось.

Таким образом, кольцо $\mathbf{S}_1$ является фактором. Рассмотрения начала доказательства леммы 4.1.2, (i) показывают, что $D_{\mathbf{S}_1}(E) = D_{\mathbf{M}}(E)$ для всех проекторов $E \in \mathbf{S}_1$. Поэтому $\mathbf{S}_1$, так же как и $\mathbf{M}$, имеет конечный тип. Если бы $\mathbf{S}_1$ имел тип

(I_q), $q = 1, 2, \ldots$, то мы могли бы рассуждать следующим образом. Фактор $\mathbf{N}_n \subseteq \mathbf{S}_1$ имеет тип (I_{p_n}), поэтому по лемме 4.1.2, (i) p_n является делителем q. Но это невозможно, так как $p_n \to \infty$, когда $n \to \infty$. Поэтому кольцо $\mathbf{S}_1$ должно быть фактором типа (II_1).

Теперь соотношения (4.7. ε) и (4.7.ζ) показывают, что S_1— аппроксимативно конечный фактор типа $[p_1, p_2, \ldots]$, т. е. по теореме XII — аппроксимативно конечный.

Таким образом, фактор $\mathbf{O} = \mathbf{S}_1$ удовлетворяет всем нашим требованиям.

И в заключение мы докажем следующую теорему.

Теорема XIV. *Аппроксимативно конечные факторы (типа (II_1)) существуют, и все они принадлежат одному и тому же алгебраическому типу* $\overline{\mathbf{M}}$.

Мы будем обозначать этот алгебраический тип через $\overline{\mathbf{A}}$.

Доказательство. Существование следует из теоремы XIII.

Рассмотрим два аппроксимативно конечных фактора $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$. Выберем какую-нибудь последовательность $[p_1, p_2, \ldots]$, удовлетворяющую условиям (i), (ii) леммы 4.1.3; например, можно взять $p_n = 2^n$. Тогда по теореме XII $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ оба являются аппроксимативно конечными факторами типа $[p_1, p_2, \ldots]$. Следовательно, по теореме XI они алгебраически изоморфны, т. е. $\overline{\mathbf{M}_1} = \overline{\mathbf{M}_2}$.

Таким образом, $\overline{\mathbf{M}}$ ($\mathbf{M}$ аппроксимативно конечен) однозначно определен и определение $\overline{\mathbf{A}}$ корректно.

4.8. Инварианты алгебраического изоморфизма, описанные в конце п. 2.10, мы изучим сейчас для алгебраического типа $\overline{\mathbf{A}}$. Этими инвариантами являются

(1) справедливость равенства $\overline{\mathbf{A}}^c = \overline{\mathbf{A}}$;

(2) фундаментальная группа $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\overline{\mathbf{A}})$.

Лемма 4.8.1. $\overline{\mathbf{A}}^c = \overline{\mathbf{A}}$.

Доказательство. По теореме XIV, с одной стороны, и по теореме III — с другой, достаточно показать, что определение аппроксимативной конечности инвариантно относительно сопряженного или двойственного изоморфизма. Это, очевидно, справедливо для обоих упомянутых выше типов общих изоморфизмов (см. B^*) в п. 2.2).

Лемма 4.8.2. *Фундаментальная группа $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\overline{\mathbf{A}})$ содержит все рациональные числа θ в интервале $0 < \theta < \infty$.*

Доказательство. Поскольку множество $\mathfrak{G}$ является группой, достаточно доказать, что оно содержит все числа $1/p$, $p = 2, 3, \ldots$

Рассмотрим какое-нибудь число $1/p$. Выберем произвольную последовательность $[p_1, p_2, \ldots]$, удовлетворяющую условиям (i), (ii) леммы 4.1.3 и такую, что все p_n делятся на p; можно взять $p_n = p^n$.

Пусть $\mathbf{M}$ — аппроксимативно конечный фактор типа $[p_1, p_2, \ldots]$ и $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots$— соответствующая последовательность колец (см. определение 4.1.1).

Рассмотрения начала доказательства леммы 4.1.2, (i) показывают, что $D_{\mathbf{M}}(G) = D_{\mathbf{N}_n}(G)$ для всех проекторов $G \in \mathbf{N}_n$ ($\mathbf{M}$).

Так как $\mathbf{N}_1$ имеет тип (I_{p_1}) и p_1 делится на p, то существует проектор $E \in \mathbf{N}_1$, такой, что $D_{\mathbf{N}_1}(E) = 1/p$. Таким образом,

$$E \in \mathbf{N}_1 \subseteq \mathbf{N}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{M}, \tag{4.8.α}$$

и поскольку $D_{\mathbf{N}_1}(E) = 1/p$, то

$$D_{\mathbf{O}}(E)/D_{\mathbf{O}}(1) = D_{\mathbf{O}}(E) = 1/p \text{ для } \mathbf{O} = \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{M}. \qquad (4.8.\beta)$$

Обозначим область значений проектора E через $\mathfrak{M}$.

По (4.8.α) существуют факторы $\mathbf{N}_{1(\mathfrak{M})}, \mathbf{N}_{2(\mathfrak{M})}, \ldots, \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ в $\mathfrak{M}$ и при этом

$$\mathbf{N}_{1(\mathfrak{M})} \quad \mathbf{N}_{2(\mathfrak{M})} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}. \qquad (4.8.\gamma)$$

По (4.8.β) $\overline{\mathbf{N}_{n(\mathfrak{M})}} = \overline{\mathbf{N}}_n^{1/p}$, $\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}} = \overline{\mathbf{M}}^{1/p}$ (см. обсуждение, предшествующее теореме VI). Первое из этих равенств влечет за собой по лемме 2.10.3, что

$$\mathbf{N}_{n(\mathfrak{M})} \text{ — фактор типа } (\mathrm{I}_{p_n}/p). \qquad (4.8.\delta)$$

Выпишем еще раз второе равенство

$$\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}} = \overline{\mathbf{M}}^{1/p}. \qquad (4.8.\varepsilon)$$

Как мы знаем, $\mathbf{M}$ есть замыкание теоретико-множественной суммы колец $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2, \ldots$ в сильной топологии[40]. Поэтому из (4.8.α) следует, что $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ есть замыкание теоретико-множественной суммы $\mathbf{N}_{1(\mathfrak{M})}, \mathbf{N}_{2(\mathfrak{M})}, \ldots$ в сильной топологии. Отсюда и из (4.8.γ) следует, что

$$\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})} = \mathbf{R}\,(\mathbf{N}_{n(\mathfrak{M})}, \qquad n = 1, 2, \ldots). \qquad (4.8.\zeta)$$

Соотношения (4.8.δ), (4.8.γ) и (4.8.ζ) совпадают соответственно с условиями (i), (ii), (iii) определения 4.1.1, примененного к кольцам $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}, \mathbf{N}_{1(\mathfrak{M})}, \mathbf{N}_{2(\mathfrak{M})}, \ldots$ и числам $p_1/p, p_2/p, \ldots$ вместо $\mathbf{M}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ этого определения. Поэтому фактор $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ аппроксимативно конечен.

Так как $\mathbf{M}$ также аппроксимативно конечен, то $\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}} = \overline{\mathbf{M}}$ по теореме XIV. Ввиду (4.8.ε) это дает, что $\overline{\mathbf{M}}^{1/p} = \overline{\mathbf{M}}$. Поэтому $1/p \in \mathfrak{G}$, что и требовалось.

Лемма 4.8.3. *Если для любого $\varepsilon > 0$ существует α, $1 - \varepsilon < \alpha < 1$, такое, что фактор $\overline{\mathbf{M}}^{\alpha}$ аппроксимативно конечен, то $\mathbf{M}$ сам аппроксимативно конечен.*

Доказательство. Предположим, что фактор $\mathbf{M}$ обладает указанным свойством. Покажем, что он аппроксимативно конечен в смысле определения 4.5.2.

Пусть соответственно заданы произвольные операторы $A_1, \ldots, A_m \in \mathbf{M}$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Построим кольцо $\mathbf{N}$, удовлетворяющее условиям (i)—(iii) этого определения.

Применим вначале наше предположение относительно $\mathbf{M}$ к числу

$$\varepsilon' = ((\varepsilon/4) \max (\,|||\, A_s \,|||,\ s = 1, \ldots, m))^2 \qquad (4.8.\eta)$$

вместо соответствующего ε. Выберем одно из упомянутых α так, что $1 - \varepsilon' < \alpha < 1$. Выберем затем проектор $E \in \mathbf{M}$, такой, что $D_{\mathbf{M}}(E) = \alpha$. Пусть $\mathfrak{M}$ есть

---

[40] Это замыкание, очевидно, равно $\mathbf{R}\,(\mathbf{N}_n,\ n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому по условию (iii) определения 4.1.1 оно совпадает с $\mathbf{M}$.

область значений проектора E. Рассмотрим кольцо $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$. Тогда $\overline{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}} = \bar{\mathbf{M}}^{\alpha}$ (см. обсуждение, предшествующее теореме VI). Из наших предположений относительно α следует, что фактор $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ аппроксимативно конечен.

По лемме 11.3.3 работы [5, с. 187] отображение

$$A \rightleftarrows A_{(\mathfrak{M})}$$

является взаимно однозначным соответствием между элементами $A \in \mathbf{M}$, такими, что $EA = AE = A$, и элементами $A_{(\mathfrak{M})} \in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$. Теперь мы можем повторить с небольшим изменением рассуждение, использованное в доказательстве теоремы XIV. А именно величины $c\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ и $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}(A_{(\mathfrak{M})})$ при указанном соответствии A и $A_{(\mathfrak{M})}$ ведут себя совершенно одинаково с точки зрения выполнения условий свойства IV работы [6, с. 219], если нормирующий множитель $c > 0$ выбрать из условия $c\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = 1$, когда соответствующее $A_{(\mathfrak{M})}$ есть единица кольца $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$. В этом случае $A = E$, т. е. мы хотим, чтобы $c\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E) = 1$. Так как $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(E) = D_{\mathbf{M}}(E) = \alpha$, то это означает, что $c = 1/\alpha$. Поскольку след однозначно определяется указанным выше свойством IV, то $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}(A_{(\mathfrak{M})}) = (1/\alpha)\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$. Отсюда $(1/\alpha)\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A^*A) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}((A^*A)_{(\mathfrak{M})}) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}}((A^*)_{(\mathfrak{M})}(A)_{(\mathfrak{M})})$ при соответствующих A и $A_{(\mathfrak{M})}$, поэтому[41]

$$[[A_{(\mathfrak{M})}]]_{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}} = (1/\alpha)^{1/2}\,[[A]]_{\mathbf{M}}. \tag{4.8.θ}$$

Положим теперь $B_s = EA_sE$, $s = 1, \dots, m$. Тогда $D_{\mathbf{M}}(1 - E) < \varepsilon'$, поэтому $[[1 - E]]_{\mathbf{M}} < \varepsilon'^{1/2}$ [35], следовательно, $[[A_s - B_s]]_{\mathbf{M}} = [[A_s(1 - E) + (1 - E)A_sE]] < \|| A_s \|| \varepsilon'$. Поэтому, учитывая выбор ε' в (4.8.η), можем написать

$$[[A_s - B_s]]_{\mathbf{M}} < \varepsilon/2. \tag{4.8.ι}$$

Далее, $B_s \in \mathbf{M}$ и $EB_s = B_sE = B_s$, следовательно, $B_{s(\mathfrak{M})} \in \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$. Применим теперь к аппроксимативно конечному фактору $\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ определение 4.5.2 с операторами $B_{1(\mathfrak{M})}, \dots, B_{m(\mathfrak{M})}$ и числом $\varepsilon/(2\alpha^{1/2})$ вместо операторов $A_1, \dots, A_m$ и числа ε соответственно. Это дает кольцо $\mathbf{N}^+ \subseteq \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$ конечного порядка с операторами $C_1^+, \dots, C_m^+ \in \mathbf{N}^+$, такими, что

$$[[C_s^+ - B_{s(\mathfrak{M})}]]_{\mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}} < \varepsilon/(2\alpha^{1/2}). \tag{4.8.κ}$$

Так как $\mathbf{N}^+ \subseteq \mathbf{M}_{(\mathfrak{M})}$, то каждый оператор $C^+ \in \mathbf{N}^+$ может быть продолжен до оператора $C \in \mathbf{M}$ с $EC = CE = C$ и [42] $C^+ = C_{(\mathfrak{M})}$. Эти операторы C образуют, очевидно, некоторое кольцо $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$ конечного порядка, причем $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N}_{(\mathfrak{M})}$. С помощью указанного процесса операторы $C_1^+, \dots, C_m^+ \in \mathbf{N}^+$ переходят в операторы

---

[41] Как правило, мы не указываем тот фактор (конечного типа), относительно которого берется $[[A]]$. Здесь это, однако, желательно.

[42] Оператор C приводим пространством $\mathfrak{M}$, и его ограничение на $\mathfrak{M}$ равно C^+, а на $\mathfrak{M}^{\perp}$ равно 0.

$C_1, \ldots, C_m \in \mathbf{N}$. Соотношение (4.8.θ) дает, что

$$[[C_s^+ - B_{s(\mathfrak{M})}]]_{\mathbf{M}(\mathfrak{M})} = [[(C_s - B_s)_{(\mathfrak{M})}]]_{\mathbf{M}(\mathfrak{M})} = (1/\alpha^{1t2})\, [[C_s - B_s]]_{\mathbf{M}},$$

и, следовательно, неравенство (4.8.ϰ) переходит в неравенство

$$[[C_s - B_s]]_{\mathbf{M}} < \varepsilon/2. \qquad (4.8.\lambda)$$

Учитывая совместно неравенства (4.8.ι) и (4.8.λ), получаем, что

$$[[C_s - A_s]]_{\mathbf{M}} < \varepsilon. \qquad (4.8.\mu)$$

Таким образом, кольцо $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$ конечного порядка удовлетворяет всем условиям (i)—(iii) определения 4.5.2. Поэтому фактор $\mathbf{M}$ аппроксимативно конечен, что и утверждалось.

Лемма 4.8.4. *Фундаментальная группа $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\overline{\mathbf{A}})$ совпадает с множеством P всех (вещественных) чисел θ в интервале* $0 < \theta < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное θ, $0 < \theta < \infty$. По лемме 4.8.2 для любого рационального числа ξ в интервале $0 < \xi < \infty$ имеет место равенство $\overline{\mathbf{A}}^{\xi} = \overline{\mathbf{A}}$. Следовательно, фактор $\overline{\mathbf{A}}^{\xi}$ аппроксимативно конечен. Поэтому фактор $(\overline{\mathbf{A}}^{\theta})^{\alpha} = \overline{\mathbf{A}}^{\theta\alpha}$ аппроксимативно конечен, если только число $\theta\alpha$ рационально.

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует, очевидно, такое α, $1 - \varepsilon < \alpha < 1$, что число $\theta\alpha$ рационально, т. е. соответствующий фактор $(\overline{\mathbf{A}}^{\theta})^{\alpha}$ аппроксимативно конечен. Следовательно, по лемме 4.8.3 с $\overline{\mathbf{A}}^{\theta}$ вместо $\overline{\mathbf{M}}$ фактор $\overline{\mathbf{A}}^{\theta}$ аппроксимативно конечен. Поэтому по теореме XIV $\overline{\mathbf{A}}^{\theta} = \overline{\mathbf{A}}$, т. е. $\theta \in \mathfrak{G}$, что и требовалось.

Мы сформулируем еще раз результаты лемм 4.8.1 и 4.8.4.

Теорема XV. *Алгебраические инварианты* (1), (2), *указанные в начале этого пункта, имеют для аппроксимативно конечного алгебраического типа $\overline{\mathbf{A}}$ следующий вид*:

(1) $\overline{\mathbf{A}}^{c} = \overline{\mathbf{A}}$;

(2) $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{A}}) = P$.

Стоит указать, что инвариантов (1), (2) недостаточно для однозначного определения алгебраического типа $\overline{\mathbf{M}}$ факторов типа (II_1). Доказательство этого, однако, возможно только в том случае, если существуют не аппроксимативно конечные факторы $\mathbf{M}$ типа (II_1). В противном случае теорема XIV давала бы, что $\overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{A}}$, т. е. что существует единственный алгебраический тип в множестве факторов типа (II_1) и никакие алгебраические инварианты вообще не нужны.

В теоремах XVI, XVI′ мы докажем, что не аппроксимативно конечные факторы типа (II_1) существуют. Предполагая этот результат установленным, можно получить следующее утверждение.

Лемма 4.8.5. *Алгебраических инвариантов* (1), (2) (*см. начало этого пункта*) *недостаточно для однозначного определения алгебраического типа $\overline{\mathbf{M}}$ фактора типа* (II_1).

Доказательство. Предположим противное.

Рассмотрим фактор $\mathbf{M}$ типа (II_1).

Ввиду соотношений (2.3.α) и (2.8.β) справедливость равенства $\overline{\mathbf{M}}^{c} = \overline{\mathbf{M}}$ не нарушится, если мы заменим $\overline{\mathbf{M}}$ на $\overline{\mathbf{M}}^{c}$ или на $\overline{\mathbf{M}}^{\theta}$ $(0 < \theta < \infty)$. По лемме 2.10.2

фундаментальная группа сохраняется при заменах $\overline{M}$ на $\overline{M}^c$ и на $\overline{M}^\theta$ $(0<\theta<\infty)$. Другими словами, инварианты (1) и (2) сохраняются также при заменах $\overline{M}$ на $\overline{M}^c$ и на $\overline{M}^\theta$.

Поэтому из наших предположений относительно этих инвариантов следует, что $\overline{M}=\overline{M}^c$ и $\overline{M}=\overline{M}^\theta$. Последнее означает, что $\theta\in\mathfrak{G}(\overline{M})$, и поэтому $\mathfrak{G}(\overline{M})=P$.

Таким образом, для факторов типа (II_1) инварианты (1) и (2) определены однозначно.

Предположим теперь, что среди факторов типа (II_1) существует единственный алгебраический тип. Тогда он должен совпадать с $\overline{A}$, т. е. быть аппроксимативно конечным.

Однако, как было указано выше, в теоремах XVI, XVI′ будет установлено обратное. Таким образом, мы приходим к противоречию, и это завершает доказательство.

Мы закончим эту главу замечанием, что существование не аппроксимативно конечных факторов M типа (II_1) будет доказано с помощью алгебраических инвариантов, отличных от инвариантов (1), (2) (см. начало п. 6.1).

Глава V

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

5.1. Мы установили существование аппроксимативно конечных факторов (т. е. факторов, имеющих алгебраический тип $\overline{A}$), используя непрямые рассуждения теорем XIII и XIV[43]. Желательно поэтому иметь какие-то явные и прямые конструкции таких факторов и, в частности, исследовать уже имеющиеся примеры факторов типа (II_1) на аппроксимативную конечность. Это исследование необходимо также для поиска не аппроксимативно конечных факторов типа (II_1).

В связи с этим мы разовьем новую технику построения факторов типа (II_1), являющуюся некоторым упрощением техники, использованной в работе [5, с. 192—209, часть IV].

Мы начнем с того, что установим аппроксимативную конечность факторов в наших старых примерах, приведенных в работах [5] и [7, с. 72—77, п. 7.5].

5.2. Л е м м а 5.2.1. *Кольцо* $C^{\#'}$ *работы* [7, с. 72, *лемма* 7.5.1] *аппроксимативно конечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя обозначения цитированной статьи (см. особенно с. 68 и 72), мы имеем

$$C^{\#'} = R(\overline{\overline{B}}_{(n,1)},\ n=1,2,\ldots).$$

Поэтому

$$C^{\#'} = R(N_m,\ m=1,2,\ldots), \qquad (5.2.\alpha)$$

где

$$N_m = R(\overline{\overline{B}}_{(n,1)},\quad n=1,\ldots,m). \qquad (5.2.\beta)$$

[43] Решающим моментом при переходе от теоремы XIII к теореме XIV было использование существования факторов типа (II_1); такие факторы построены, например, в работе [5].

Таким образом, $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ и поэтому в соответствии с определением 4.6.1 фактор $C^{\#'}$ будет аппроксимативно конечным, если мы сможем показать, что кольца N_m имеют конечный порядок[44].

Все эти кольца операторов действуют в неполном тензорном произведении $\prod^{\mathfrak{D}}_{\otimes, n=1,2,..} (\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$, где $C^{\#}$ является фактором типа (II_1), однако для доказательства конечности порядка колец N_m удобно рассмотреть полное тензорное произведение $\prod_{\otimes, n=1,2,..} (\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$.

Пусть $B_{(n,1)}$ есть кольцо всех ограниченных операторов в пространстве $\mathfrak{H}_{(n,1)}$. Следуя цитированной статье, продолжим сначала $B_{(n,1)}$ до кольца $\overline{B}_{(n,1)}$ в пространстве $\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)}$, а затем до кольца $\overline{\overline{B}}_{(n,1)}$ в пространстве $\prod_{\otimes, n=1,2,...}(\mathfrak{H}_{(n,1)} \otimes \otimes \mathfrak{H}_{(n,2)})$. Кольца $\overline{\overline{B}}_{(m,1)}$ коммутируют друг с другом. Поэтому кольца N_m в (5.2.β) имеют конечный порядок, если конечный порядок имеют кольца $\overline{\overline{B}}_{(n,1)}$. Но кольцо $B_{(n,1)}$ имеет конечный порядок, поскольку оно действует в двумерном пространстве $\mathfrak{H}_{(n,1)}$, следовательно, и кольцо $\overline{\overline{B}}_{(n,1)}$ имеет конечный порядок.

Лемма 5.2.2. *Кольцо* **M** *теоремы* XI *работы* [5, с. 203—204] *аппроксимативно конечно, если группа* $\mathfrak{G}$ *обладает следующим свойством:*

(i) $\mathfrak{G}$ *есть теоретико-множественная сумма последовательности конечных групп* $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2 \subseteq \ldots$ (Мы предполагаем, конечно, что фактор **M** имеет тип (II_1) и удовлетворяет всем требованиям леммы 13.1.2 работы [5, с. 206]).

Доказательство. Используя обозначения цитированной статьи (см. особенно с. 198—200), имеем

$$M = R(\overline{U}_{a_0}, \overline{L}_{\varphi(x)};\ a_0 \in \mathfrak{G},\ \varphi(x) \text{ ограничена и измерима}). \qquad (5.2.\gamma)$$

Хорошо известно, что можно значительно ограничить множество функций $\varphi(x)$ в (5.2.γ), не изменяя кольца **M**. А именно, во-первых, по соображениям непрерывности достаточно рассматривать лишь $\varphi(x)$ с конечной областью значений. Во-вторых, такие функции $\varphi(x)$ являются конечными линейными комбинациями характеристических функций

$$\chi_S^{(x)} = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in S, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В-третьих, пусть $T_1, T_2, \ldots$ есть счетный базис множеств T ($\subseteq S$ и измеримых)[45]

---

[44] Нетрудно показать, что N_m есть фактор типа (I_{2^m}). Поэтому $C^{\#'}$ является аппроксимативно конечным фактором типа [2, 4, 8, ...].

[45] Пространство всех измеримых множеств (рассматриваемых с точностью до множеств меры нуль) метризуемо, если ввести расстояние

$$\overline{T'T''} = \mu(T' + T'') - \mu(T'T'').$$

Это, очевидно, равно

$$|\chi_{T'} - \chi_{T''}|^2 = \int_S |\chi_{T'}(x) - \chi_{T''}(x)|^2 \, dx.$$

Так как $\mathfrak{H}_S$ сепарабельно, то существует последовательность $\chi_{T_1}, \chi_{T_2}, \ldots$, всюду плотная в множестве всех характеристических функций χ_T, и соответственно последовательность $T_1, T_2, \ldots$, всюду плотная в множестве всех T. Именно это мы и имеем в виду под базисом.

Тогда, по соображениям непрерывности, достаточно рассматривать лишь $\varphi(x) = \chi_{T_i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots$

Наконец, систему $T_1, T_2, \ldots$ можно заменить на содержащую ее любую другую счетную систему множеств. Мы расширим систему $T_1, T_2, \ldots$ таким образом, чтобы новая система $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots$ обладала следующими свойствами:

(1) вместе с множествами T', T'' она содержит множество $T' \cdot T''$;

(2) вместе с множеством T' и любым элементом $a_0 \in \mathfrak{G}$ она содержит множество $a_0 T'$.

Если эти свойства выполнены, то

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\overline{U}_{a_0}, \overline{L}_{\chi_{\overline{T}_i}(x)};\quad a_0 \in \mathfrak{G},\ i = 1, 2, \ldots). \tag{5.2.δ}$$

Рассмотрим конечные группы $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ условия (i). Множества $\overline{T}_1, \ldots$ $\ldots, \overline{T}_n$, порождают с помощью операций (1) и (2), в которых a_0 ограничено до $\mathfrak{G}_n$, конечную подсистему в $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots$, скажем подсистему $(\overline{T}_i,\ \iota \in I_n)$, где множество I_n конечно. Ясно, что $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ и что множество I_n содержит числа $1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. Поэтому теоретико-множественная сумма множеств $I_1, I_2, \ldots$ совпадает с множеством $(1, 2, \ldots)$.

Следовательно, (5.2.δ) дает, что

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\mathbf{N}_n,\quad n = 1, 2, \ldots), \tag{5.2.ε}$$

где

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{R}(\overline{U}_{a_0}, \overline{L}_{\chi_{\overline{T}_i}(x)};\quad a_0 \in \mathfrak{G}_n,\quad i \in I_n). \tag{5.2.ζ}$$

Таким образом, $\mathbf{N}_1 \subseteq \mathbf{N}_2 \subseteq \ldots$ и поэтому фактор $\mathbf{M}$ был бы аппроксимативно конечен в соответствии с определением 4.6.1, если бы мы показали, что кольца $\mathbf{N}_n$ имеют конечный порядок[46].

Из группового свойства $\mathfrak{G}_n$ и построения I_n следует, что операторы

$$\overline{U}_{a_0}\overline{L}_{\chi_{\overline{T}_i}(x)},\quad a_0 \in \mathfrak{G}_n,\quad i \in I_n, \tag{5.2.η}$$

воспроизводятся при умножениях. Поскольку и $\mathfrak{G}_n$, и I_n конечны, то множество операторов (5.2.η) также конечно. Поэтому они образуют конечный базис в $\mathbf{N}_n$, и это завершает доказательство.

Доказанный результат устанавливает аппроксимативную конечность факторов в примерах (β), (γ) работы [5, с. 208]. Поэтому теорема XIV настоящей статьи доказывает их алгебраический изоморфизм. Согласно теореме XI работы [6, с. 244] эти факторы пространственно изоморфны, что было анонсировано в работе [5, с. 229, (V)]. Чтобы включить в рассмотрение пример (α), нам понадобится следующий результат.

Лемма 5.2.3. *Условие* (i) *леммы* 5.2.2 *может быть заменено условием*

(ii) *группа* $\mathfrak{G}$ *абелева.*

Доказательство этой леммы является довольно сложным. Оно использует некоторые глубокие результаты о разложениях отображений измеримых множеств, которые будут опубликованы в другой статье. В связи с этим мы не будем сейчас затрагивать этот вопрос.

5.3. Перейдем теперь к изложению нового (упрощенного) метода построения факторов типа (II_1), анонсированного в п. 5.1.

[46] Сейчас мы действительно должны использовать именно определение 4.6.1, а не определение 4.1.1.

Пусть дана группа $\mathfrak{G}$. В данный момент группа может быть как конечной, так и счетной, однако в дальнейшем мы будем вынуждены предполагать ее счетность (см. лемму 5.3.4 и замечание к ней).

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, возникающее при использовании элементов группы $\mathfrak{G}$ в качестве индексов векторных компонент, т. е. $\mathfrak{H}$ есть множество комплексных векторов $f = [x_a;\ a \in \mathfrak{G}]$ с конечной нормой $\sum_{a\in\mathfrak{G}} |x_a|^2$, и если $f = [x_a;\ a \in \mathfrak{G}]$, $g = [y_a;\ a \in \mathfrak{G}]$, то[47] $(f, g) = \sum_{a\in\mathfrak{G}} x_a \bar{y}_a$.

Введем теперь и обсудим некоторые операторы в пространстве $\mathfrak{H}$.

Лемма 5.3.1. *Определим операторы*

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & U_{a_0}[x_a;\ a\in\mathfrak{G}] = [x_{aa_0};\ a\in\mathfrak{G}],\\ \text{(ii)} & V_{a_0}[x_a;\ a\in\mathfrak{G}] = [x_{a_0^{-1}a};\ a\in\mathfrak{G}],\end{array}\right\} a_0\in\mathfrak{G}$$

$$\text{(iii)}\quad W[x_a;\ a\in\mathfrak{G}] = [x_{a^{-1}};\ a\in\mathfrak{G}].$$

Эти операторы унитарны и[48]

$$W = W^{-1}, \quad WU_{a_0}W = V_{a_0}.$$

Другими словами, отображение $f \to Wf$ является инволютивным пространственным автоморфизмом $\mathfrak{H}$, переставляющим операторы U_{a_0} с V_{a_0}.

Доказательство. Все утверждения проверяются непосредственно.

Введем, как обычно, полную ортонормированную систему

$$\varphi_a, \quad a\in\mathfrak{G}, \tag{5.3.α}$$

в $\mathfrak{H}$, где $\varphi_a = [\delta_{a,b};\ b\in\mathfrak{G}]$. Таким образом, вектор $f = [x_a; a\in\mathfrak{G}]$ записывается в виде $f = \sum_{a\in\mathfrak{G}} x_a\varphi_a$ и

$$U_{a_0}\varphi_a = \varphi_{aa_0^{-1}}, \qquad V_{a_0}\varphi_a = \varphi_{a_0a}, \qquad W\varphi_a = \varphi_{a^{-1}}. \tag{5.3.β}$$

Лемма 5.3.2. *Пусть* **I** *есть множество всех операторов U_{a_0}, а* **J** *есть множество всех операторов V_{a_0}. Сопоставим обычным образом каждому ограниченному оператору A в $\mathfrak{H}$ его матрицу*[49] $\{\alpha_{a,b}\}$ $(a, b\in\mathfrak{G})$.

[47] Это пространство $\mathfrak{H}$ совпадает с пространством $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ работы [5, с. 194, определение 12.1.4]. Единственное различие состоит в том, что мы пишем x_a вместо $f(a)$ цитированной статьи.

[48] Легко проверяется также, что

$$U_{a_1}U_{a_0} = U_{a_1a_0}, \quad V_{a_1}V_{a_0} = V_{a_1a_0},$$

т. е. отображения $a \to U_a$ и $a \to V_a$ задают представления группы $\mathfrak{G}$. Они соответствуют в действительности регулярному представлению группы $\mathfrak{G}$.

[49] Эта матрица определяется соотношениями

$$\alpha_{a,b} = (A\varphi_a, \varphi_b) = (\varphi_a, A^*\varphi_b). \tag{49, α}$$

Поэтому

$$\|A\varphi_a\|^2 = \sum_{b\in\mathfrak{G}} |(A\varphi_a, \varphi_b)|^2 = \sum_{b\in\mathfrak{G}} |\alpha_{a,b}|^2,$$

$$\|A^*\varphi_b\|^2 = \sum_{a\in\mathfrak{G}} |(\varphi_a, A^*\varphi_b)|^2 = \sum_{a\in\mathfrak{G}} |\alpha_{a,b}|^2,$$

Тогда $A \in \mathbf{I}'$ в том и только том случае, когда матричные элементы $\alpha_{a,b}$ записываются в виде $\alpha_{a,b} = \eta_{ab^{-1}}$. Кроме того, $A \in \mathbf{J}'$ тогда и только тогда, когда элементы $\alpha_{a,b}$ записываются в виде $\alpha_{ab} = \eta_{a^{-1}b}$, т. е. $\alpha_{a,b}$ зависит лишь от ab^{-1} или от $a^{-1}b$ соответственно (мы не уточняем, для каких наборов η_c, $c \in \mathfrak{G}$, соответствующий ограниченный оператор A существует).

Доказательство. Если $A \sim \{\alpha_{a,b}\}$, то (5.3.β) дает, что[50] $U_{a_0}^{-1} A U_{a_0} \sim \{\alpha_{aa_0^{-1}, ba_0^{-1}}\}$. Теперь соотношение $A \in \mathbf{I}'$ означает, что A коммутирует со всеми U_{a_0}, т. е. что

$$\alpha_{a,b} = \alpha_{aa_0^{-1}, ba_0^{-1}} \text{ для всех } a_0 \in \mathfrak{G}. \tag{5.3.γ}$$

Пусть $\eta_c = \alpha_{c,1}$. Тогда, выбрав в (5.3.γ) $a_0 = b$, получим, что

$$\alpha_{a,b} = \eta_{ab^{-1}}. \tag{5.3.δ}$$

Обратно, из (5.3.δ) следует (5.3.γ). Поэтому равенство (5.3.δ) является характеристическим равенством для операторов $A \in \mathbf{I}'$. Это доказывает наше утверждение относительно $\mathbf{I}'$.

Если $A \sim \{\alpha_{a,b}\}$, то $WAW \sim \{\alpha_{a^{-1}, b^{-1}}\}$[50]. Поэтому автоморфизм $f \to Wf$ пространства $\mathfrak{H}$ переводит соотношение (5.3.δ) в

$$\alpha_{a,b} = \eta_{a^{-1}b}. \tag{5.3.ε}$$

Так как этот автоморфизм переводит $\mathbf{I}$ в $\mathbf{J}$, то $\mathbf{I}'$ он переводит в $\mathbf{J}'$. Поэтому соотношение (5.3.ε) является характеристическим для $A \in \mathbf{J}'$. Это доказывает наше утверждение относительно $\mathbf{J}'$.

Лемма 5.3.3. $\mathbf{R}(\mathbf{I}) = \mathbf{J}'$, $\mathbf{R}(\mathbf{J}) = \mathbf{I}'$.

т. е.

$$\text{все } \sum_{b \in \mathfrak{G}} |\alpha_{a,b}|^2, \quad \sum_{a \in \mathfrak{G}} |\alpha_{a,b}|^2 \text{ конечны.} \tag{49, β}$$

Наконец, $(Af, \varphi_b) = (f, A^*\varphi_b) = \sum_{a \in \mathfrak{G}} (f, \varphi_a)(\varphi_a, A^*\varphi_b) = \sum_{a \in \mathfrak{G}} \alpha_{a,b}(f, \varphi_a)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\text{если } f = \sum_{a \in \mathfrak{G}} x_a \varphi_a, \quad Af = \sum_{a \in \mathfrak{G}} y_a \varphi_a, \\ &\text{то } y_b = \sum_{a \in \mathfrak{G}} \alpha_{a,b} x_a. \end{aligned}\right\} \tag{49, γ}$$

Матричные операции для этих (комплексных числовых) матриц определяются точно также, как и для (операторных) матриц в определении B_p п.2.4.

50 Воспользуемся соотношениями (49, α) и (5.3. β). Тогда

$$(U_{a_0}^{-1} A U_{a_0} \varphi_a, \varphi_b) = (AU_{a_0}\varphi_a, U_{a_0}\varphi_b) = (A\varphi_{aa_0^{-1}}, \varphi_{ba_0^{-1}}),$$

$$(WAW\varphi_a, \varphi_b) = (AW\varphi_a, W\varphi_b) = (A\varphi_{a^{-1}}, \varphi_{b^{-1}}).$$

Поэтому если $A \sim \{\alpha_{a,b}\}$, то $U_{a_0}^{-1} A U_{a_0} \sim \{\alpha_{aa_0^{-1}, ba_0^{-1}}\}$ и $WAW \sim \{\alpha_{a^{-1}, b^{-1}}\}$.

Доказательство. Оператор V_{a_0}, очевидно, коммутирует со всеми операторами U_{b_0}. Следовательно, $V_{a_0} \in \mathbf{I}'$ и поэтому $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}'$. Так как $\mathbf{I}'$ — кольцо, то $\mathbf{R}(\mathbf{J}) \subseteq \mathbf{I}'$.

Если $A \in \mathbf{I}'$, $B \in \mathbf{J}'$, то $A \sim \{\eta_{ab^{-1}}\}$, $B \sim \{\theta_{a^{-1}b}\}$. Прямое вычисление показывает, что $AB = BA$ (умножение происходит по правилу умножения матриц, указанному в конце примеч.[49]). Таким образом, $A \in \mathbf{J}''$ и поэтому $\mathbf{I}' \subseteq \mathbf{J}''$. Так как $1 \in \mathbf{J}$, то $\mathbf{J}'' = \mathbf{R}(\mathbf{J})$ (см. [2, с. 397 Поэтому $\mathbf{I}' \subset \mathbf{R}(\mathbf{J})$.

Таким образом, доказано, что $\mathbf{R}(\mathbf{J}) = \mathbf{I}'$. Пространственный автоморфизм $f \to Wf$ переставляет $\mathbf{I}$ с $\mathbf{J}$, и, таким образом, мы также получаем, что $\mathbf{R}(\mathbf{I}) = \mathbf{J}'$. Доказательство окончено.

Лемма 5.3.4. *Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{R}(\mathbf{I}) = \mathbf{J}'$. Тогда $\mathbf{M}' = \mathbf{R}(\mathbf{J})$. Кольцо $\mathbf{M}$ является фактором тогда и только тогда, когда группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет следующему условию:*

(i) *Для каждого $a \in \mathfrak{G}$, $a \neq 1$, множество*

$$\mathfrak{L}_a = (c^{-1}ac; \quad c \in \mathfrak{G})$$

сопряженных элементов бесконечно.

Доказательство. Очевидно, $\mathbf{M}' = (\mathbf{R}(\mathbf{I}))' = \mathbf{I}'$.

Рассмотрим теперь произвольный оператор $A \in \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}'$. Пусть $A \sim \{\alpha_{a,b}\}$. Из $A \in \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}'$ следует, что справедливы оба отношения:

$$\alpha_{a,b} = \eta_{a^{-1}b} \text{ и } \alpha_{a,b} = \theta_{ab^{-1}}. \tag{5.3.ζ}$$

Возьмем $b = 1$. Тогда это дает, что $\eta_{a^{-1}} = \theta_a$. Таким образом, равенства (5.3.ζ) эквивалентны тому, что

$$\alpha_{a,b} = \eta_{a^{-1}b} = \eta_{ba^{-1}}. \tag{5.3.η}$$

Перепишем второе из этих равенств, заменив в нем a, b на b, ab. Тогда оно превратится в равенство $\eta_{b^{-1}ab} = \eta_a$, т. е. элемент η_d постоянен для всех $d \in \mathfrak{L}_a$. Следовательно,

$$\alpha_{a,b} = \eta_{a^{-1}b}, \quad \eta_d \text{ постоянен для всех } d \in \mathfrak{L}_a. \tag{5.3.θ}$$

Докажем теперь, что свойство (i) является характеристическим.

Достаточность. Предположим, что (i) справедливо. Если $a \neq 1$, то $\mathfrak{L}_a$ бесконечно. Поэтому из конечности величины[51] $\sum_{d \in \mathfrak{G}} |\eta_d|^2$ и (5.3.θ) следует, что $\eta_a = 0$, если $a \neq 1$.

---

[51] Конечность величины $\sum_{d \in \mathfrak{G}} |\eta_d|^2$ немедленно следует из первой формулы в ([49], β) с $a=1$:

$$\sum_{b \in \mathfrak{G}} |\alpha_{1,b}|^2 = \sum_{b \in \mathfrak{G}} |\eta_b|^2.$$

Таким образом,

$$\alpha_{a,b} = \eta_{a^{-1}b} = \begin{cases} \eta_1 & \text{для } a = b, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

или $A = \eta \cdot 1$, т. е. **M** — фактор.

Необходимость. Допустим, что (i) несправедливо. Выберем элемент $a_0 \neq 1$, такой, что множество $\mathfrak{L}_{a_0}$ конечно. Определим

$$\alpha_{a,b} \neq \eta_{a^{-1}b}, \quad \eta_d = \begin{cases} 1 & \text{для } d \in \mathfrak{L}_{a_0}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5.3.ι}$$

Легко проверить, что оператор $A \sim \{\alpha_{a,b}\}$ записывается в виде[52] $A = \sum_{d \in \mathfrak{L}_{a_0}} U_d$. Таким образом, по (5.3.θ) и (5.3.ι) $A \in \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}'$.

Если **M** — фактор, то $A = \alpha \cdot 1$ или $A \sim \{\alpha\delta_{a,b}\}$, где $\delta_{a,b} = 1$ для $a = b$ и $\delta_{a,b} = 0$ в противном случае. Следовательно,

$$\alpha_{a,b} = \alpha\delta_{a,b}. \tag{5.3.ϰ}$$

Соотношения (5.3.ι) и (5.3.ϰ) дают для $a = 1$ и $b = a_0$ (напомним, что $a_0 \neq 1$) $\alpha_{1,a_0} = 1$ и $\alpha_{1,a_0} = 0$. Это противоречие показывает, что **M** не фактор.

Этот последний результат заставляет нас предположить, что группа $\mathfrak{G}$ бесконечна, ибо даже ее классы $\mathfrak{L}_a$ сопряженных элементов должны быть бесконечны при $a \neq 1$. Группы $\mathfrak{G}$ с таким свойством построить нетрудно. Мы приведем несколько примеров в конце п. 5.5 и в п. 5.6 Очевидно, что такие группы не могут быть абелевыми.

Прежде чем мы двинемся дальше, стоит указать на одно обстоятельство. Ясно, что приведенная конструкция есть не что иное, как обобщение групповых чисел Фробениуса на бесконечные группы[53] . Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и операторы в нем являются лишь вспомогательными средствами, позволяющими справиться с трудностями, связанными со сходимостью. И операторы U_a, и операторы V_a порождают представление группы $\mathfrak{G}$ (см. примеч. 48), и, следовательно, оба кольца — и $\mathbf{M} = \mathbf{R}(\mathbf{I})$, и $\mathbf{M}' = \mathbf{R}(\mathbf{J})$ — являются эквивалентами чисел Фробениуса. Однако в случае конечной группы $\mathfrak{G}$ эта процедура не приводит к факторам. Среди групповых чисел есть, как известно, и другие центральные элементы, помимо $\alpha \cdot 1$. Существует столько линейно независимых центральных элементов, сколько различных классов $\mathfrak{L}_a$ в $\mathfrak{G}$. Истинный смысл леммы 5.3.4, как мы видим, состоит в следующем: роль всех классов сопряженных элементов в конечной группе $\mathfrak{G}$ играют в бесконечной группе конечные классы[54]. В конечной группе все классы конечны, в бесконечной — это, вообще говоря, не так, что имеет для нас решающее значение.

---

[52] Заметим, что эта сумма может быть образована ввиду конечности множества $\mathfrak{L}_{a_0}$.

[53] Мы рассматриваем эти группы как дискретные и всюду используем суммы, а не интегралы. Известные обобщения Петера—Вейля на непрерывные группы и фон Неймана на почти периодические группы, где используются интегралы и средние, не приводят к обсуждающимся сейчас проблемам. В указанных случаях бесконечные группы ведут себя почти так же, как и конечные группы.

[54] Относительно связи факторов с теорией представлений см. также п. 3 введения работы [5, с. 118—120].

Другими словами, мы обобщили конструкцию групповых чисел Фробениуса на случай бесконечных групп $\mathfrak{G}$. Для конечных групп эта конструкция никогда не приводит к факторам и используется в совершенно иных целях. Для бесконечных групп $\mathfrak{G}$ она, напротив, является очень удобной при построении факторов.

Теперь мы вычислим типы факторов **M** и **M′** и некоторые другие их характеристики.

Условие (i) леммы 5.3.4 предполагается выполненным.

Лемма 5.3.5 (i) **M**, **M′** *являются сопряженными факторами типа* (II_1).

(ii) *При использовании стандартной нормировки константа C теоремы X работы* [5, с. 182] *равна* 1.

(iii) *Если* $A \in \mathbf{M}$ ($A \in \mathbf{M}'$), *то след* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A)$ ($\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}'}(A)$) *равен* η_1, *где* η_c *определено в лемме* 5.3.2.

Доказательство. Мы несколько изменим порядок рассмотрения. Определим для $A \in \mathbf{M}$ величину $T'(A) = \eta_1$, где η_c введено в лемме 5.3.2. Проверим для $T'(A)$ свойства (i)—(vi′) в [6, с. 218].

Свойства (1)—(iii), (v) очевидны.

Если $A \sim \{\alpha_{a,b}\} = \{\eta_{a^{-1}b}\}$, $B \sim \{\beta_{a,b}\} = \{\theta_{a^{-1}b}\}$, то $AB \sim \{\gamma_{a,b}\} = \{\zeta_{a^{-1}b}\}$, где $\zeta_a = \sum_{c \in \mathfrak{G}} \eta_c \theta_{ac^{-1}}$ (используется правило умножения матриц; см. конец примеч. 49). Поэтому $T'(AB) = \zeta_1 = \sum_{c \in \mathfrak{G}} \eta_c \theta_{c^{-1}}$. Это выражение симметрично по η_a и θ_a. Поэтому

$$T'(AB) = T'(BA) = \sum_{c \in \mathfrak{G}} \eta_c \theta_{c^{-1}}. \tag{5.3.μ}$$

Это доказывает свойство (vi), а также и свойство (vi′), если заменить A, B на $U^{-1}A$, U.

Так как $A^* \sim \{\overline{\alpha_{b,a}}\} = \{\xi_{a^{-1}b}\}$, где $\xi_a = \overline{\eta_{a^{-1}}}$, то (5.3.μ) при $B = A^*$ дает

$$T'(A^*A) = \sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_c|^2. \tag{5.3.ν}$$

Это доказывает свойства (iv), (iv′) цитированной статьи.

Таким образом, все свойства проверены.

Если рассмотреть $T'(E)$ только для проекторов $E \in \mathbf{M}$, то эти свойства позволяют доказать справедливость соотношений (ii), (iii) определения 8.2 1 работы [5, с. 165]. Кроме того, $T'(1) = 1 \neq 0, \infty$ Поэтому по лемме 8.3.5 работы [5, с. 170] $T'(E)$ является функцией относительной размерности фактора **M** и **M** имеет конечный тип

Типы (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, исключены, так как **M** — не конечное кольцо. Поэтому **M** имеет тип (II_1).

Теперь из свойства IV работы [6, с. 218] следует, что $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = T'(A)$, т. е. что $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A) = \eta_1$.

Таким образом, утверждения (i), (iii) доказываемой леммы установлены для кольца **M**. Пространственный изоморфизм $f \to Wf$ в $\mathfrak{H}$ показывает ввиду леммы 5.3.1, что они справедливы и для кольца **M′**.

Рассмотрим теперь утверждение (ii). Заметим, что по (5.3.β) подпространства $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}_{\varphi_1}$ и $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}'}_{\varphi_1}$ (см. определение 5.1.1 работы [5, с. 143]) содержат все элементы

φ_a, $a \in \mathfrak{G}$. Поэтому оба эти подпространства совпадают с $\mathfrak{H}$. Отсюда следует, что в стандартной нормировке

$$D_{\mathbf{M}}(\mathfrak{M}_{\varphi_1}^{\mathbf{M}'}) = D_{\mathbf{M}'}(\mathfrak{M}_{\varphi_1}^{\mathbf{M}}) = 1.$$

Поэтому в силу теоремы X работы [5, с. 182] $C = 1$, что и утверждалось.

Лемма 5.3.6. *Рассмотрим произвольный оператор* $A \in \mathbf{M}$ $(A \in \mathbf{M}')$ *и его элементы* η_c (*см. лемму* 5.3.2). *Тогда*

(i) $[[A]] = \left(\sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_c|^2\right)^{1/2}$,

(ii) $A = \sum_{c \in \mathfrak{G}} \eta_c U_c$ $\left(A = \sum_{c \in \mathfrak{G}} \eta_c V_c\right)$

в смысле метрической сходимости в $\mathbf{M}$ $(\mathbf{M}')$ *независимо от порядка, в котором выбираются элементы* $c \in \mathfrak{G}$.

Доказательство. Пространственный автоморфизм $f \to Wf$ в $\mathfrak{H}$ переставляет $\mathbf{M}$ с $\mathbf{M}'$. Поэтому достаточно рассмотреть $A \in \mathbf{M}$.

(i). По равенству (5.3.ν) в доказательстве леммы 5.3.5

$$[[A]]^2 = \mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(A^*A) = T'(A^*A) = \sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_c|^2.$$

Поэтому $[[A]] = \left(\sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_c|^2\right)^{1/2}$.

(ii). Выберем любую нумерацию $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ элементов $\mathfrak{G}$. Непосредственно проверяется, что для $A^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \eta_{a^{(k)}} U_{a^{(k)}}$

$$A^{(n)} \sim \{\eta^{(n)}_{a^{-1}b}\}, \qquad \text{где } \eta_c^{(n)} = \begin{cases} \eta_c & \text{для } c = a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому

$$A - A^{(n)} \sim \{\eta^{(n)1}_{a^{-1}b}\}, \qquad \text{где } \eta_c^{(n)1} = \begin{cases} 0 & \text{для } c = a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, \\ \eta_c & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, (i) дает

$$[[A - A^{(n)}]] = \left(\sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_c^{(n)1}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{c \in \mathfrak{G}, c \neq a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}} |\eta_c|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\eta_{a^{(i)}}|^2\right)^{1/2}.$$

Это эквивалентно равенству

$$[[A - \sum_{k=1}^{n} \eta_{a^{(k)}} U_{a^{(k)}}]] = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\eta_{a^{(k)}}|^2\right)^{1/2}. \qquad (5.3.\xi)$$

Величина $\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_{a^{(k)}}|^2 = \sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_c|^2$ конечна ввиду (i). Поэтому правая часть (5.3.ξ) стремится к 0, когда $n \to \infty$. Это означает, что $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{a^{(k)}} U_{a^{(k)}}$ метрически сходится к A.

Поскольку это имеет место при произвольной нумерации $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ элементов $\mathfrak{G}$, то лемма доказана.

5.4. Как мы уже отмечали, конструкция п. 5.3 тесно связана с конструкцией части IV работы [5, с. 192—209]. Группа $\mathfrak{G}$ в обоих случаях играет одинаковую роль, и различие состоит в отказе от использования пространства S.

Это пространство занимало важное место в построении в [5], а именно каждый элемент $a \in \mathfrak{G}$ порождал отображение $x \to xa$ пространства S (см определение 12.1.5 цитированной статьи, с. 195). Отсутствие S в настоящей конструкции может быть также интерпретировано как тривиальность S в рассматриваемом случае: множество S состоит из единственного элемента (x_0) и для каждого $a \in \mathfrak{G}$ $x_0a = x_0$.

Различие двух конструкций поэтому может быть выражено следующим образом. В [5] на группу $\mathfrak{G}$ не налагалось никаких ограничений, но пространство S должно было удовлетворять условию (iii) определения 12.1.5 этой статьи, с. 195: для $a \neq 1$ и $x \in S$ всегда $xa \neq x$[55]. В п. 5.3 группа $\mathfrak{G}$ должна удовлетворять условию (i) леммы 5.3.4, однако при этом условие (iii) определения 12.1.5 в [5] существенно нарушается [56,57]. Таким образом, указанные две процедуры соответствуют двум разным способам обеспечения факторного свойства кольца **M**, в чем они и проявляются как единая конструкция. Но в одном случае ряд условий налагается на пространство S, а в другом — на группу $\mathfrak{G}$.

Можно указать более общую процедуру, обобщающую указанные две конструкции. В этом случае условия имеют смешанный тип и налагаются на S и $\mathfrak{G}$. В данный момент мы не будем рассматривать этот вопрос подробнее.

5.5. Вторая связь между двумя обсуждаемыми конструкциями, которая заслуживает определенного внимания, состоит в следующем.

Пусть дана произвольная счетная группа $\mathfrak{G}$. Мы попытаемся использовать ее в упомянутой выше конструкции работы [5]. Для этого нам необходимо найти пространство S, удовлетворяющее вместе с группой $\mathfrak{G}$ всем подготовительным условиям этой конструкции.

Требуемая конструкция реализуется следующим образом [58].

(I). Пусть S есть множество всех наборов $x = [\alpha_a,\ a \in \mathfrak{G}]$, где каждое $\alpha_a = 0, 1$. Пусть $\mathfrak{S}$ есть множество тех $x = [\alpha_a;\ a \in \mathfrak{G}]$, для которых $\alpha_a = 0$, за исключением конечного множества индексов a.

Определим в S операцию сложения: если $x = [\alpha_a,\ a \in \mathfrak{G}]$, $y = [\beta_a,\ a \in \mathfrak{G}]$, то $x \oplus y = [\gamma_a,\ a \in \mathfrak{G}]$, где $\gamma_a = \alpha_a + \beta_a \pmod 2$, $\gamma_a = 0$ или 1. Ясно, что относительно этой операции S есть (коммутативная) группа с «единицей» $0 = [0;\ a \in \mathfrak{G}]$, а $\mathfrak{S}$ есть счетная подгруппа S.

Кроме того, если $x = [\alpha_a,\ a \in \mathfrak{G}]$ и $a_0 \in \mathfrak{G}$, то обозначим $xa_0 = [\alpha_{a_0a},\ a \in \mathfrak{G}]$. Тогда отображение $x \to xa_0$ является представлением группы $\mathfrak{G}$ в множестве перестановок S, таких, которые переводят $\mathfrak{S}$ в себя.

Выберем теперь произвольную, но фиксированную нумерацию $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ элементов $\mathfrak{G}$. Введем отображение

$$\Xi : x = [\alpha_a,\ a \in \mathfrak{G}] \to \xi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{a^{(m)}}}{2^m}$$

[55] За исключением множества точек x меры нуль.

[56] Мы имеем $x_0a = x_0$ и $\mu((x_0)) = \mu(S) \neq 0$.

[57] С точки зрения остальных условий определения 12.1.5 различия между этими конструкциями не существует. В частности, группа $\mathfrak{G}$ в настоящей конструкции действует эргодично, поскольку $S = (x_0)$ есть одноточечное множество.

[58] Описываемая далее конструкция (I)—(V) во многих отношениях аналогична конструкции (I)—(VII) работы [7, с. 72—77]. Основные различия состоят в следующем: мы используем $\mathfrak{G}$, а не $\mathfrak{S}$ в качестве группы отображений в S и последние части этих двух конструкций преследуют разные цели.

множества S на единичный числовой интервал $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Это отображение взаимно однозначно всюду, кроме образа множества $\mathfrak{S}$ — множества всех двоично-рациональных чисел, имеющего лебеговскую меру нуль. Поэтому лебеговская мера на $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ переходит при отображении, обратном к Ξ, в лебеговскую меру на S с ее обычными свойствами.

Рассмотрим теперь $\mathfrak{G}$ как «группу» и S (с «отображениями» $x \to xa_0$ для $x \in S$, $a_0 \in \mathfrak{G}$), как «пространство» в смысле терминологии, используемой в работе [5, с. 192—195]. Тогда в той же терминологии $\mathfrak{G}$ является m-группой, эргодичной в S (см. определение 12.1.5 в [5, с. 195]).

Покажем вначале, что это — m-группа (условие (i) цитированной статьи). Оно связано с сохранением внешней меры для порождающих множеств $\{T_i\}$. Ввиду определения меры на S, данного выше, мы можем в качестве $\{T_i\}$ взять образы ξ-интервалов $k/2^m \leqslant \xi < (k+1)/2^m$ при отображении, обратном к Ξ. Образ ξ-интервала $k/2^m \leqslant \xi < (k+1)/2^m$ задается конечной последовательностью величин $\alpha_{a^{(1)}}, \ldots, \alpha_{a^{(m)}}$. Поэтому при отображении $x \to xa_0$ он переходит в аналогичное множество, порождаемое последовательностью $\alpha_{a_0^{-1}a^{(1)}}, \ldots, \alpha_{a_0^{-1}a^{(m)}}$. Выберем такое n, что все элементы $a_0^{-1}a^{(1)}, \ldots, a_0^{-1}a^{(m)}$ встречаются среди элементов множества $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$. Тогда указанное множество представляется суммой 2^{n-m} множеств, каждое из которых определяется некоторой последовательностью $\alpha_{a^{(1)}}, \ldots$ $\ldots, \alpha_{a^{(n)}}$, т. е. каждое из которых соответствует некоторому интервалу $l/2^n \leqslant$ $\leqslant \xi < (l+1)/2^n$. Таким образом, множество, соответствующее ξ-интервалу $k/2^m \leqslant$ $\leqslant \xi < (k+1)/2^m$ и имеющее меру $1/2^m$, переходит при отображении $x \to xa_0$ в множество, имеющее меру $2^{n-m}/2^n = 2^{-m}$. Таким образом, мера каждого такого множества сохраняется. Условие (ii), утверждающее, что $(xa_0)b_0 = x(a_0b_0)$, проверяется прямым вычислением [59]. Условие (iii) состоит в том, что если $a_0 \neq 1$, то равенство $xa_0 = x$ имеет место лишь для множества точек x меры нуль. Для $x = [\alpha_a, a \in \mathfrak{G}]$ равенство $xa_0 = x$ эквивалентно выполнению равенств $\alpha_{a_0a} = \alpha_a$ для всех a. Но поскольку $a_0 \in \mathfrak{G}$, $a_0 \neq 1$, то мы можем построить бесконечную последовательность $a_1, a_2, \ldots$, такую, что все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_0a_1, a_0a_2, \ldots$ различны [60,61]. Выберем для любого m величину $n = n(m)$ так, что конечная последовательность $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ содержит все элементы $a_1, \ldots, a_m$, $a_0a_1, \ldots, a_0a_m$. Тогда множество $S^{(m)}$ тех x, для которых $\alpha_{a_0a_i} = \alpha_{a_i}$, $i = 1, \ldots, m$, состоит из

---

[59] Пусть $x = [\alpha_a, a \in \mathfrak{G}]$, $xa_0 = [\beta_a, a \in \mathfrak{G}]$, $(xa_0)b_0 = [\gamma_a, a \in \mathfrak{G}]$. Тогда $\beta_a = \alpha_{a_0a}$, $\gamma_a = \beta_{b_0a} = \alpha_{a_0(b_0a)} = \alpha_{(a_0b_0)a}$. Поэтому $(xa_0)b_0 = [\alpha_{(a_0b_0)a}, a \in \mathfrak{G}] = x(a_0b_0)$.

[60,61] Если элементы $a_0, a_0^2, \ldots$ все различны, то положим $a_i = a_0^{2i-1}$. Нужное свойство проверяется в этом случае непосредственно. В противном случае a_0 имеет конечный порядок $p = 2, 3, \ldots$ ($p \neq 1$, так как $a_0 \neq 1$). Для каждого a определим S_a как множество элементов $b \in \mathfrak{G}$, таких, что $b = a_0^k a$ для некоторого $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Легко видеть, что можно выбрать последовательность $a_1, a_2, \ldots$, такую, что множества S_{a_i} не пересекаются. Для этой последовательности все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_0a_1, a_0a_2, \ldots$ различны. Это прямо следует из того, что множества S_{a_i} не пересекаются и $a_0 \neq 1$.

2^{n-m} подмножеств $I^{(n)}$, каждое из которых определяется некоторой последовательностью $\alpha_{a(1)}, \ldots, \alpha_{a(n)}$. Такое подмножество $I^{(n)}$ является образом ξ-интервала меры 2^{-n}, и поэтому мера множества $S^{(m)}$ равна $2^{n-m} \cdot 2^{-n} = 2^{-m}$. Множество тех x, для которых $a_{a_0 a} = \alpha_a$ для всех $a \in \mathfrak{G}$, принадлежит $S^{(m)}$ при любом m. Поэтому мера этого множества равна нулю. Так как это и есть множество тех x, для которых $xa_0 = x$, то утверждение (iii) доказано.

Свойство эргодичности будет установлено ниже, в (III).

(II). Образуем для рассматриваемых пространства S и группы $\mathfrak{G}$ пространства $\mathfrak{H}_S$ и $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}S}$ всех комплекснозначных функций $f(x)$ соответственно $F(x, a)$, $x \in S$, $a \in \mathfrak{G}$, которые измеримы по x и имеют конечные значения величин $\int_S |f(x)|^2 dx$, соответственно $\sum_{a \in \mathfrak{G}} \int_S |F(x, a)|^2 dx$. Таким образом, $(f, g) = \int_S f(x)\overline{g(x)}\, dx$, $(F, G) = \sum_{a \in \mathfrak{G}} \int_S F(x, a)\overline{G(x, a)}\, dx$ (см. [5, с. 194]). Рассмотрим ограниченные операторы

$$\left.\begin{aligned} U_{a_0} f(x) &= f(xa_0), \\ \overline{U}_{a_0} F(x, a) &= F(xa_0, aa_0), \end{aligned}\right\} a_0 \in \mathfrak{G}$$

$$\overline{L}_{\varphi(x)} F(x, a) = \varphi(x) F(x, a) \quad (\varphi(x) \text{ ограничена и измерима})$$

(см. [5, с. 196, 198—199]) и кольцо $\mathbf{M}$ операторов в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}S}$, порожденное операторами $\overline{U}_{a_0}$, $\overline{L}_{\varphi(x)}$ (см. с. 200 цитированной статьи):

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\overline{U}_{a_0}, \overline{L}_{\varphi(x)};\quad a_0 \in \mathfrak{G},\ \varphi(x) \text{ ограничена и измерима}). \tag{5.5.α}$$

Прежде чем двигаться дальше, образуем в пространстве $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}S}$ следующую систему функций [62]:

$$\omega_{\bar{x}}(x) = (-1)^{\sum_{a \in \mathfrak{G}} \bar{\alpha}_a \alpha_a}$$

$$(\bar{x} = [\bar{\alpha}_a,\ a \in \mathfrak{G}] \in \mathfrak{S}, \quad x = [\alpha_a,\ a \in \mathfrak{G}] \in S).$$

Легко проверить, что эти функции (для всех $\bar{x} \in \mathfrak{S}$) образую полное ортонормированное множество[63] в $\mathfrak{H}_S$. Следовательно, функции

$$F_{\bar{x}, \bar{a}}(x, a) = \omega_{\bar{x}}(x)\,\delta_{a, \bar{a}} \qquad (\bar{x} \in \mathfrak{S}, \quad \bar{a} \in \mathfrak{G}),$$

образуют полную ортонормированную систему в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}, S}$.

---

[62] Поскольку $\bar{x} = [\bar{\alpha}_a,\ a \in \mathfrak{G}] \in \mathfrak{S}$, то $\bar{\alpha}_a \neq 0$ лишь для конечного множества индексов a. Поэтому сумма $\sum_{a \in \mathfrak{G}} \bar{\alpha}_a \alpha_a$ в действительности конечна.

[63] В этом частном случае групповая структура $\mathfrak{G}$ не нужна. Поэтому мы можем заменить $\mathfrak{G}$ любым другим счетным множеством. Заменим $a \in \mathfrak{G}$ на $a = 1, 2, \ldots$ Тогда наши функции $\omega_{\bar{x}}(x)$ превращаются в хорошо известные функции Уолша—Радемахера, образующие полное ортонормированное множество. Эти функции в обозначении $\omega_a(x)$ рассматривались также в работе [7, с. 74].

Известные аргументы показывают, что набор функций $\varphi(x)$ в (5.5.α) может быть существенно уменьшен без изменения кольца **M**.

Во-первых, по соображениям непрерывности достаточно рассматривать лишь те $\varphi(x)$, которые являются конечными линейными комбинациями функций[64] $\omega_{\bar{x}}(x)$. Во-вторых, мы можем далее ограничить $\varphi(x)$ до множества самих функций $\omega_{\bar{x}}(x)$. Следовательно,

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\bar{U}_{a_0}, \bar{L}_{\omega_{\bar{x}}(x)}; \quad a_0 \in \mathfrak{G}, \quad \bar{x} \in \mathfrak{S}). \tag{5.5.β}$$

Так как среди операторов $\bar{U}_{a_0}$ (при $a_0 = 1$) и среди операторов $\bar{L}_{\omega_{\bar{x}}(x)}$ (при $\bar{x}=0$) встречается 1, то можно также записать, что

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\bar{U}_{a_0}\bar{L}_{\omega_{\bar{x}}(x)}, \quad a_0 \in \mathfrak{G}, \quad \bar{x} \in \mathfrak{S}). \tag{5.5.γ}$$

(III). Очевидно,

$$U_{a_0}\omega_{\bar{x}}(x) = \omega_{\bar{x}}(xa_0) = \omega_{\bar{x}a_0^{-1}}(x).$$

Рассмотрим теперь произвольный элемент $f \in \mathfrak{H}_S$, такой, что $U_{a_0}f = f$ для всех $a_0 \in \mathfrak{G}$. Используем ортогональное разложение $f(x) = \sum_{\bar{x}\in\mathfrak{S}} \lambda_{\bar{x}}\omega_{\bar{x}}(x)$. Тогда из приведенной формулы следует, что $f = \sum_{\bar{x}\in\mathfrak{S}} \lambda_{\bar{x}}\omega_{\bar{x}}$, $U_{a_0}f = \sum_{\bar{x}\in\mathfrak{S}} \lambda_{\bar{x}}\omega_{\bar{x}a_0^{-1}} = \sum_{\bar{x}\in\mathfrak{S}} \lambda_{\bar{x}a_0}\omega_{\bar{x}}$. Поэтому $\lambda_{\bar{x}} = \lambda_{\bar{x}a_0}$. Так как величина $\|f\|^2 = \sum_{\bar{x}\in\mathfrak{S}} |\lambda_{\bar{x}}|^2$ конечна, то $\lambda_{\bar{x}} = 0$, если только существует бесконечное множество различных $\bar{x}a_0$, $a_0 \in \mathfrak{G}$. Последнее имеет место для всех[65] $\bar{x} \in \mathfrak{S}$, $\bar{x} \neq 0$. Поэтому если $\bar{x} \neq 0$, то $\lambda_{\bar{x}} = 0$. Таким образом, $f(x) = \lambda_0\omega_0(x) = \lambda_0$. Следовательно, если $U_{a_0}f = f$ (для всех $a_0 \in \mathfrak{G}$), то f — константа. Поэтому группа $\mathfrak{G}$ действует эргодично.

(IV). Очевидно,

$$\omega_{\bar{x}}(x)\,\omega_{\bar{y}}(x) = \omega_{\bar{x}\dotplus\bar{y}}(x),$$

$$\bar{L}_{\omega_{\bar{x}}(x)}F_{\bar{y},\bar{b}}(x, a) = \omega_{\bar{x}}(x)\,F_{\bar{y},\bar{b}}(x, a) = F_{\bar{x}\dotplus\bar{y},\bar{b}}(x, a).$$

Кроме того,

$$\bar{U}_{\bar{a}}F_{\bar{y},\bar{b}}(x, a) = F_{\bar{y},\bar{b}}(x\bar{a}, a\bar{a}) = F_{\bar{y}\bar{a}^{-1},\bar{b}\bar{a}^{-1}}(x, a).$$

[64] См. работу [7, с. 73—74, (II)].

[65] Мы докажем это следующим образом. Пусть $\bar{x} = [\bar{\alpha}_a, a \in \mathfrak{G}]$. Так как $\bar{x} \neq 0$, то существует элемент a^*, такой, что $\bar{\alpha}_{a^*} \neq 0$. Теперь, так же как и в примеч. 60, мы можем построить бесконечную последовательность элементов $a \in \mathfrak{G}$, такую, что все элементы $a_1a^*, a_2a^*, \ldots$ различны. Тогда у вектора $\bar{x}a_i^{-1} = [\bar{\alpha}_{a_i^{-1}a}, a \in \mathfrak{G}]$ компонента с индексом a_ia^* равна $\alpha_{a^*} \neq 0$. Таким образом, для последовательности векторов $\bar{x}a_1^{-1}, \bar{x}a_2^{-1}, \ldots$ существует бесконечное число элементов $a \in \mathfrak{G}$, таких, что компонента с индексом a не равна нулю по крайней мере для одного вектора $\bar{x}a_i^{-1}$. Поскольку каждый вектор $\bar{x}a_i^{-1}$ может иметь лишь конечное число компонент, отличных от нуля, то среди этих векторов существует бесконечное множество различных.

Учитывая эти равенства, имеем

$$\bar U_{\bar a}\bar L_{\omega_{\bar x}(x)}F_{\bar y,\bar b}(x, a) = F_{(\bar x \dotplus \bar y)\bar a^{-1}, \bar b\bar a^{-1}}(x, a). \qquad (5.5.\varepsilon)$$

Будем теперь обращаться с индексами $\bar y$, $\bar b$ в $F_{\bar y,\bar b}$ как с единой парой. Эти пары образуют группу $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\}$ относительно умножения

$$\{\bar y, \bar b\}\{\bar z, \bar c\} = \{\bar y\bar c \oplus \bar z, \bar b\bar c\}. \qquad (5.5.\zeta)$$

Так как $\bar x \oplus \bar x = 0$, то

$$\{\bar y, \bar b\}\{\bar x, \bar a\}^{-1} = \{(\bar x \oplus \bar y)\bar a^{-1}, \bar b\bar a^{-1}\}.$$

Поэтому равенство (5.5.ε) можно переписать в виде

$$\bar U_{\bar a}\bar L_{\omega_{\bar x}(x)}F_{\{\bar y,\bar b\}}(x, a) = F_{\{\bar y,\bar b\}\{\bar x,\bar a\}^{-1}}(x, a). \qquad (5.5.\eta)$$

(V). Применим конструкцию п.5.3 к группе $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\}$ с умножением (5.5.ζ). Это возможно, поскольку группа $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\}$ удовлетворяет условию (i) леммы 5.3.4, т. е. если $\{\bar x, \bar a\} \neq \{0, 1\}$, то существует бесконечное число различных элементов вида $\{\bar y, \bar b\}^{-1}\{\bar x, \bar a\}\{\bar y, \bar b\}$. Действительно, если $\bar x \neq 0$, то рассмотрим $\{0, \bar b\}^{-1}\{\bar x, \bar a\}\{0, \bar b\} = \{\bar x\bar b, \bar b^{-1}\bar a\bar b\}$. Среди векторов вида $\bar x\bar b$, $\bar b \in \mathfrak{G}$, существует бесконечное число различных векторов (см. примеч. [65]). Поэтому наше утверждение справедливо при $\bar x \neq 0$. Если же $\bar x = 0$, то необходимо $\bar a \neq 1$. Рассмотрим пары $\{\bar y, 1\}^{-1}\{0, \bar a\}\{\bar y, 1\} = \{\bar y\bar a \oplus \bar y, \bar a\}$. Среди векторов вида $\bar y\bar a + \bar y$ существует бесконечное число различных векторов[66], что доказывает наше утверждение и в этом случае.

Обозначим соответствующие пространство $\mathfrak{H}$ и кольцо **M** конструкции п. 5.3 через $\mathfrak{H}_I$ и $\mathbf{M}_I$. Тогда

$$\mathbf{M}_I = \mathbf{R}(U_{\{\bar x,\bar a\}};\quad \bar x \in \mathfrak{S},\quad \bar a \in \mathfrak{G}) \qquad (5.5.\theta)$$

и ввиду (5.3.β)

$$U_{\{\bar x,\bar a\}}\varphi_{\{\bar y,\bar b\}} = \varphi_{\{\bar y,\bar b\}\{\bar x,\bar a\}^{-1}}. \qquad (5.5.\iota)$$

Мы можем изоморфно отобразить $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}S}$ на $\mathfrak{H}_I$, сопоставив базисным векторам $F_{\{\bar y,\bar b\}}$ первого пространства базисные векторы $\varphi_{\{\bar y,\bar b\}}$ второго пространства. Тогда сравнение соотношений (5.5.γ) и (5.5.θ) показывает, что этот изоморфизм переводит оператор $\bar U\text{-}\bar L_{\omega_{\bar x}(x)}$ в оператор $U_{\{\bar x,\bar a\}}$. Поэтому (5.5.γ) и (5.5.θ) показывают, что он переводит кольцо **M** в кольцо $\mathbf{M}_I$. Таким образом, кольца **M** и $\mathbf{M}_I$ пространственно изоморфны.

Суммируем сказанное.

Лемма 5.5.1. *Пусть для данной счетной группы $\mathfrak{G}$ определены пространства S, $\mathfrak{S}$ так, как описано в п.* (I), *и группа $\mathfrak{G}_I = \{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\}$ — так, как описа-*

---

[66] Пусть $\bar y_b = [\delta_{a,b}\ a \in \mathfrak{G}] \in \mathfrak{S}$. Так как $\bar a \neq 1$, то равенство $\bar y_b\bar a \oplus \bar y_b = \bar y_c\ \bar a \oplus \bar y_c$ означает, что либо $b = c$, либо $\bar ab = c$, $\bar ac = b$. Другими словами, когда b пробегает всю группу $\mathfrak{G}$, то для данного $\bar a$ существует не более двух совпадающих векторов вида $\bar y_b\bar a \oplus \bar y_b$. Так как группа $\mathfrak{G}$ бесконечна, то существует бесконечное число различных векторов вида $\bar y_b a \oplus \bar y_b$.

но в соотношении (5.5.ζ) *п.* (IV). *Тогда к* $\mathfrak{G}$ *и* S *может быть применена конструкция части* IV *работы* [5, *с.* 192—209], *а к* $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\}$ — *конструкция* п. 5.3 (*группа* $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\}$ *заменяет группу* $\mathfrak{G}$ *в последней конструкции*).

Эти две конструкции приводят к пространственно изоморфным факторам **M**.

Отображения

$$x\{\bar{y}, \bar{b}\} = x\bar{b} + \bar{y} \tag{5.5.ϰ}$$

дают удобное представление группы $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\}$ (см. (5.5.ζ) в (V)). Если вектор $x \in S$ фиксирован, то (5.5.ϰ) сводится к перестановке в S. Поскольку при этом $\mathfrak{S}$ отображается на себя, то можно также считать, что $x \in \mathfrak{S}$, и рассматривать (5.5.ϰ) как перестановку в $\mathfrak{S}$.

Соотношение (5.5.ϰ) показывает, что группа $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\}$ является простейшим объектом, строящимся по $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}$, если не считать «прямого произведения групп».

Приведенный результат может быть также интерпретирован следующим образом. Мы начинаем с произвольной (счетной) группы $\mathfrak{G}$ и хотим применить к ней конструкцию п. 5.3. Так как группа $\mathfrak{G}$ может не удовлетворять условию (i) леммы 5.3.4, эта конструкция непосредственно не всегда применима. Поэтому мы расширяем $\mathfrak{G}$ до группы $\mathfrak{G}_l$, которая удовлетворяет необходимому условию. Соотношение (5.5.ζ) дает очень простой общий механизм построения группы $\mathfrak{G}_l$. Это имеет дальнейшие интересные следствия, состоящие в том, что в **M**, множестве групповых чисел для $\mathfrak{G}$, метрическое замыкание любой подалгебры совпадает с топологическим замыканием этой подалгебры относительно любой из кольцевых топологий. Действительно, мы можем расширить **M** до $\mathbf{M}_l$ так, как это описано выше, и теорема I (см. п. 1.6) показывает в этом случае, что наше утверждение справедливо для расширенного пространства $\mathfrak{H}_l$. Так как любая подалгебра в **M** редуцируется на исходное пространство $\mathfrak{H}$, то топологическое замыкание в $\mathfrak{H}$ индуцирует топологическое замыкание в $\mathfrak{H}_l$. Отметим, что рассуждения главы I могут быть проведены почти без изменений и в том случае, когда **M** есть групповая алгебра.

5.6. Для конструкции п. 5.3 справедлив также аналог леммы 5.2.2, и в данный момент нам даже проще доказать его.

Лемма 5.6.1. *Кольцо* **M** *п.*5.3 *аппроксимативно конечно, если группа* $\mathfrak{G}$ *обладает свойством* (i) *леммы* 5.2.2 (*помимо свойства* (i) *леммы* 5.3.4).

Доказательство. Рассмотрим группы $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ свойства (i) леммы 5.2.2. Теперь

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(U_a, \quad a \in \mathfrak{G}).$$

Поэтому

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\mathbf{N}_n, \quad n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{R}(U_a, \quad a \in \mathfrak{G}_n).$$

Таким, образом, $\mathbf{N}_1 \subseteq \mathbf{N}_2 \subseteq \ldots$ и $\mathbf{N}_n$ имеет конечный порядок, поскольку группа $\mathfrak{G}_n$ конечна. Поэтому кольцо **M** аппроксимативно конечно по определению 4.6 I[46].

Заметим, что если группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию (i) леммы 5.2.2, но, вообще говоря, не удовлетворяет условию (i) леммы 5.3.4, то группа $\mathfrak{G}_l = \{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\}$ леммы 5.5.1 удовлетворяет и этому условию тоже. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + , \ldots$

..., $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2 \subseteq \ldots$ и все группы $\mathfrak{G}_n$ конечны. Пусть $\mathfrak{S}_n$ есть множество тех векторов $x = [\alpha_a, a \in \mathfrak{G}]$, у которых $\alpha_a = 0$, если a не принадлежит $\mathfrak{G}_n$. Тогда $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \ldots$ и все $\mathfrak{S}_n$ конечны. Следовательно, $\{\mathfrak{S}, \mathfrak{G}\} = \{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{G}_1\} + \{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{G}_2\} + \ldots$, $\{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{G}_1\} \subseteq \{\mathfrak{S}_2, \mathfrak{G}_2\} \subseteq \ldots$ и все $\{\mathfrak{S}_n, \mathfrak{G}_n\}$ конечны.

Таким образом, легко строятся группы $\mathfrak{G}$, которые удовлетворяют и условию (i) леммы 5.2.2, и условию (i) леммы 5.3.4. Следующий пример является более прямым.

Лемма 5.6.2. *Группа* $\overline{\mathfrak{G}}$ *конечных перестановок множества* (1, 2, ...) (т. е. *таких, в которых переставляется лишь конечное число элементов*) *удовлетворяет и условию* (i) *леммы* 5.2.2, *и условию* (i) *леммы* 5.3.4.

Доказательство. Условие (i) леммы 5.3.4: для данного $a \in \overline{\mathfrak{G}}$, $a \neq 1$, выберем n так, что перестановка a не затрагивает других чисел, кроме 1, ..., n. Предположим, что a действительно переставляет число i (которое поэтому равно 1, ..., n). Пусть c_j есть транспозиция чисел i и j, где $j = n + 1, n + 2, \ldots$ Тогда единственное $k = n + 1, n + 2, \ldots$, изменяемое при перестановке $c_j^{-1} a c_j$, есть $k = j$. Таким образом, все перестановки $c_j^{-1} a c_j$, $j = n + 1, n + 2, \ldots$, попарно различны и, следовательно, множество $\mathfrak{L}_a$ бесконечно.

Условие (i) леммы 5.2.2: пусть $\overline{\mathfrak{G}}_n$ есть множество перестановок, не изменяющих других чисел, кроме $1, \ldots, n$. Тогда $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}}_1 + \overline{\mathfrak{G}}_2 + \ldots$, $\overline{\mathfrak{G}}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{G}}_2 \subseteq \ldots$ и каждое $\overline{\mathfrak{G}}_n$ есть конечное подмножество $\overline{\mathfrak{G}}$.

Анализ инвариантов (1), (2) п. 4.8 не дает новой информации. Что касается (1), то во всех примерах работы [5], так же как и в примерах п. 5.3, $\overline{\mathbf{M}}^c = \overline{\mathbf{M}}$. В самом деле, ни один из этих примеров не связан с какими-либо специальными невещественными (комплексными) числами. Поэтому $\mathfrak{H}_c, \mathbf{M}_c$ совпадают с $\mathfrak{H}$, $\mathbf{M}$, так что $\overline{\mathbf{M}}^c = \overline{\mathbf{M}}' = \overline{\mathbf{M}}$ (см. п. 2.3).

Таким образом, у нас нет ни одного примера фактора $\mathbf{M}$ типа (II_1), в котором $\overline{\mathbf{M}}^c \neq \overline{\mathbf{M}}$. Возможно, какое-нибудь обобщение конструкции п. 5.3, связанное с введением комплексных числовых множителей в определения (i), (ii) леммы 5.3.1 (и (5.3.β) вслед за леммой), и позволяет построить такой пример[67]. Однако до сих пор нам не удалось получить сколько-нибудь окончательный результат в этом направлении.

Что же касается инварианта (2), то о $\mathfrak{G}(\overline{\mathbf{M}})$ мы не знаем ничего, кроме результата теоремы XV.

Глава VI

НЕ АППРОКСИМАТИВНО КОНЕЧНЫЕ ФАКТОРЫ

6.1. Как отмечалось в конце п. 4.8 и затем еще раз в конце п. 5.6, нам не удалось до сих пор доказать не аппроксимативную конечность какого-нибудь фактора с помощью инвариантов (1), (2) п. 4.8. Сейчас мы докажем существование не

[67] Это соответствует технике использования «множителей» при построении антисимметричных полей над данным центром в абстрактной алгебре.

аппроксимативно конечных факторов, но для этого нам понадобится ввести один новый алгебраический инвариант.

На протяжении последующего изложения **M** есть опять фактор типа (II_1).

Определение 6.1.1. *Фактор **M** обладает свойством* Г, *если для произвольных операторов $A_1, \ldots, A_m \in$ **M** и произвольного $\varepsilon > 0$ существует унитарный оператор $U = U(A_1, \ldots, A_m, \varepsilon) \in$ **M**, такой, что*

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(U) = 0$$

и[68,69]

$$[[U^{-1}A_hU - A_h]] < \varepsilon, \qquad h = 1, \ldots, m.$$

Свойство Г имеет, очевидно, алгебраическую природу, т. е. оно связано лишь с алгебраическим типом фактора.

Отметим прежде всего следующий результат.

Лемма 6.1.1. *Пусть дана группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условию* (i) *леммы* 5.3.4 *и обладающая следующим свойством:*

(i) *Для произвольной системы элементов $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \in \mathfrak{G}$ существует элемент $c_0 \in \mathfrak{G}$, $c_0 \neq 1$, коммутирующий с $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$.*

Тогда фактор **M** п. 5.3 *обладает свойством* Г.

Доказательство. Пусть даны произвольные операторы $A_1, \ldots, A_m \in$ **M** и $\varepsilon > 0$ так, как требуется в определении 6.1.1. Следуя утверждению (ii) леммы 5.3.6, мы можем выбрать элементы $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \in \mathfrak{G}$ и числа $\zeta_{h,1}, \ldots, \zeta_{h,n}$ (это есть $\eta_{a^{(1)}}, \ldots, \eta_{a^{(n)}}$ леммы 5.3.6 для $A = A_h$, $h = 1, \ldots, m$), такие, что

$$[[A_h - \textstyle\sum_{i=1}^n \zeta_{h,i} U_{a^{(i)}}]] < \varepsilon/2 \qquad \text{для } h = 1, \ldots, m. \tag{6.1.α}$$

Применим теперь к элементам $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ предположение (i) и рассмотрим элемент $c_0 \in \mathfrak{G}$, $c_0 \neq 1$, коммутирующий с ними.

Тогда операторы U_{c_0} и $U_{a^{(i)}}$ коммутируют (см. примеч. 48) и, следовательно,

$$U_{c_0}^{-1}(A_h - \textstyle\sum_{i=1}^n \zeta_{h,i} U_{a^{(i)}}) U_{c_0} = U_{c_0}^{-1} A_h U_{c_0} - \textstyle\sum_{i=1}^n \zeta_{h,i} U_{a^{(i)}}.$$

---

[68] Требование Tr **M** (U) = 0 необходимо, поскольку в противном случае мы могли бы взять $U = 1$.

Указанные неравенства не могут быть заменены на условие коммутативности оператора U с операторами $A_1, \ldots, A_m$ по следующим причинам. Если **M** = **R** ($A_1, \ldots, A_m$), то такая коммутативность означает, что $U \in$ **M′**. Поэтому $U \in$ **M′·M**, $U = \alpha \cdot 1$. Так как $\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(U) = 0$, то это означает, что $U = 0$, последнее противоречит унитарности оператора U. Поэтому равенство **M** = **R** ($A_1, \ldots, A_m$) невозможно.

Можно показать, однако, что аппроксимативно конечный фактор **M** = **R** (A_1, A_2) при соответствующем выборе операторов A_1, A_2. Поэтому аппроксимативно конечный фактор **M** не может удовлетворять этому условию коммутативности. Для этого, впрочем, необходима еще лемма 6.1.2.

[69] Это свойство допускает дальнейшие уточнения, соответствующие допустимым значениям m и выражениям вида $\varepsilon/\max(|||A_1|||, \ldots, |||A_m|||)$. Мы могли бы также потребовать унитарность операторов $A_1, \ldots, A_m$ и т. д. Для нашей настоящей цели это, однако, не нужно.

Поэтому неравенство (6.1.α) дает

$$[[U_{c_0}^{-1}A_hU_{c_0} - \Sigma_{i=1}^{n}\zeta_{h,i}U_{a(i)}]] < \varepsilon/2. \qquad (6.1.\beta)$$

Учитывая (6.1.α) и (6.1.β) вместе, имеем

$$[[U_{c_0}^{-1}A_hU_{c_0} - A_h]] < \varepsilon. \qquad (6.1.\gamma)$$

Очевидно, $U_{c_0} \sim \{\eta_{ab^{-1}}\}$, где

$$\eta_c' = \begin{cases} 1 & \text{для } c = c_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $c_0 \neq 1$, то $\eta_1 = 0$, т. е.

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(U_{c_0}) = 0. \qquad (6.1.\delta)$$

Таким образом, соотношения (6.1.γ), (6.1.δ) показывают, что оператор $U=U_{c_0}$ удовлетворяет всем нашим требованиям.

Теперь мы можем доказать следующую лемму.

Лемма 6.1.2. *Аппроксимативная конечность влечет за собой свойство* Г.

Доказательство[70]. Достаточно построить группу $\mathfrak{G}$, удовлетворяющую условию (i) леммы 5.3.4 (так что кольцо **M**, определенное в п. 5.3, будет фактором типа (II$_1$)), условию (i) леммы 5.2.2 (так что фактор **M** будет аппроксимативно конечен) и условию (i) леммы 6.1.1 (так что **M** будет обладать свойством Г). Все остальное будет следовать из теоремы XIV и замечания, сделанного после определения 6.1.1.

Группа $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{G}}$ леммы 5.6.2 удовлетворяет первым двум условиям. Рассмотрим теперь условие (i) леммы 6.1 .1 Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ — произвольные элементы группы $\mathfrak{G}$. Выберем число p, такое, что ни одна из перестановок $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ не затрагивает чисел, отличных от $1, \dots, p$. Пусть c_0 есть транспозиция $p+1$ и $p+2$. Тогда перестановка $c_0 \neq 1$, и она коммутирует с $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$.

6.2. Теперь мы перейдем к обоснованию решающего негативного результата.

Лемма 6.2.1 *Пусть дана группа* $\mathfrak{G}$, *удовлетворяющая условию* (i) *леммы* 5.3.4 *и обладающая следующим свойством*[71]:

(i) *Существует подмножество* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, *такое что:*

(i$_1$) *Существует элемент* $c_1 \in \mathfrak{G}$, *такой, что* $\mathfrak{F} + c_1\mathfrak{F}c_1^{-1} = \mathfrak{G} - (1)$,

(i$_2$) *Существует элемент* $c_2 \in \mathfrak{G}$, *такой, что три множества* $c_2^l\mathfrak{F}c_2^{-l}$, $l = 0, \pm 1$, *не пересекаются.*

Тогда фактор **M** п. 5.3 *не обладает свойством* Г.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что **M** обладает свойством Г. Воспользуемся определением 6.1.1 с $n = 2$. Пусть $A_1 = U_{c_1}$, $A_2 = U_{c_2}$, а $\varepsilon > 0$ будет выбрано позже. Рассмотрим соответствующий унитарный оператор $U = U(A_1, A_2; \varepsilon)$.

Тогда

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{M}}(U) = 0, \qquad (6.2.\alpha)$$

[70] Существует также и довольно простое прямое доказательство, основанное на определении 4.1.1.

[71] Приводимое построение до некоторой степени напоминает известное 1/2—1/3 разбиение Хаусдорфа сферы. В этой связи необходимо обратить внимание на использование в лемме 6.2.2 свободной группы.

$$[[U^{-1}U_{c_h}U - U_{c_h}]] < \varepsilon \qquad \text{для } h = 1, 2. \tag{6.2.β}$$

Так как операторы U_{c_h}, U унитарны и

$$U_{c_h}^{-1}U(U^{-1}U_{c_h}U - U_{c_h}) = U - U_{c_h}^{-1}UU_{c_h},$$

то неравенство (6.2.β) эквивалентно неравенству

$$[[U - U_{c_h}^{-1}UU_{c_h}]] < \varepsilon \quad \text{для} \quad h = 1, 2. \tag{6.2.γ}$$

Вычислим теперь матричные элементы η_c операторов $U, U_{c_h}^{-1}UU_{c_h}$, $U - U_{c_h}^{-1}UU_{c_h}$ (см. лемму 5.3.2). Если матричные элементы первого оператора обозначить через θ_c, то, как легко проверить, матричные элементы второго оператора равны $\theta_{c_h c c_h^{-1}}$[50], и поэтому они равны $\theta_c - \theta_{c_h c c_h^{-1}}$ для третьего оператора Применим соотношения (i) леммы 5.3.6 к операторам U и $U - U_{c_h}^{-1}UU_{c_h}$; это дает

$$[[U]]^2 = \Sigma_{c \in \mathfrak{G}} |\theta_c|^2,$$

$$[[U - U_{c_h}^{-1}UU_{c_h}]]^2 = \Sigma_{c \in \mathfrak{G}} |\theta_c - \theta_{c_h c c_h^{-1}}|^2.$$

Так как оператор U унитарен, то $[[U]]^2 = 1$. Поэтому из приведенных равенств и (6.2.γ) следует, что

$$\Sigma_{c \in \mathfrak{G}} |\theta_c|^2 = 1, \tag{6.2.δ}$$

$$(\Sigma_{c \in \mathfrak{G}} |\theta_c - \theta_{c_h c c_h^{-1}}|^2)^{1/2} < \varepsilon, \qquad h = 1, 2. \tag{6.2.ε}$$

После всех этих приготовлений введем на группе $\mathfrak{G}$ меру $\nu(\mathfrak{A}) = \Sigma_{c \in \mathfrak{A}} |\theta_c|^2$ для $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G}$. Тогда (6.2.δ) записывается в виде

$$\nu(\mathfrak{G}) = 1. \tag{6.2.ζ}$$

Соотношение (6.2.α) означает, что $\theta_1 = 0$, т. е.

$$\nu((1)) = 0. \tag{6.2.η}$$

Неравенство треугольника в бесконечномерном случае дает, что

$$|(\Sigma_{c \in \mathfrak{A}} |\theta_c|^2)^{1/2} - (\Sigma_{c \in \mathfrak{A}} |\theta_{c_h c c_h^{-1}}|^2)^{1/2}| \leqslant (\Sigma_{c \in \mathfrak{A}} |\theta_c - \theta_{c_h c c_h^{-1}}|^2)^{1/2}.$$

Левая часть этого неравенства, очевидно, равна $|\nu(\mathfrak{A})^{1/2} - \nu(c_h \mathfrak{A} c_h^{-1})^{1/2}|$. Правая часть не превосходит $(\Sigma_{c \in \mathfrak{G}} |\theta_c - \theta_{c_h c c_h^{-1}}|^2)^{1/2}$, что меньше ε по (6.2.ε). Следовательно,

$$|\nu(\mathfrak{A})^{1/2} - \nu(c_h \mathfrak{A} c_h^{-1})^{1/2}| < \varepsilon. \tag{6.2.θ}$$

Теперь по (6.2.ζ) $\nu(\mathfrak{A})$ и $\nu(c_h \mathfrak{A} c_h^{-1}) \leqslant \nu(\mathfrak{G}) = 1$. Поэтому

$$|\nu(\mathfrak{A}) - \nu(c_h \mathfrak{A} c_h^{-1})| = |\nu(\mathfrak{A})^{1/2} - \nu(c_h \mathfrak{A} c_h^{-1})^{1/2}| (\nu(\mathfrak{A})^{1/2} + \nu(c_h \mathfrak{A} c_h^{-1})^{1/2}) \leqslant$$

$$\leqslant 2 |\nu(\mathfrak{A})^{1/2} - \nu(c_h \mathfrak{A} c_h^{-1})^{1/2}|.$$

Следовательно, (6.2.θ) принимает вид

$$|\nu(\mathfrak{A}) - \nu(c_h \mathfrak{A} c_h^{-1})| < 2\varepsilon. \tag{6.2.ι}$$

Применим это неравенство, когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$, $h = 1,2$; $\mathfrak{A} = c_2^{-1}\mathfrak{F}c_2$, $h = 2$. Тогда

$$|\nu(\mathfrak{F}) - \nu(c_1 \mathfrak{F} c_1^{-1})| < 2\varepsilon, \tag{6.2.ϰ}$$

$$|\nu(\mathfrak{F}) - \nu(c_2 \mathfrak{F} c_2^{-1})| < 2\varepsilon, \tag{6.2.λ}$$

$$|\nu(c_2^{-1}\mathfrak{F}c_2) - \nu(\mathfrak{F})| < 2\varepsilon. \tag{6.2μ}$$

Теперь из (i_1), (6.2.ζ), (6.2.η) и (6.2.ϰ) следует, что

$$\nu(\mathfrak{F}) + (\nu(\mathfrak{F}) + 2\varepsilon) > 1,$$

т. е.

$$\nu(\mathfrak{F}) > 1/2 - \varepsilon. \tag{6.2.ν}$$

С другой стороны, из (i_2), (6.2.ζ), (6.2.λ) и (6.2.μ) следует, что

$$\nu(\mathfrak{F}) + (\nu(\mathfrak{F}) - 2\varepsilon) + (\nu(\mathfrak{F}) - 2\varepsilon) < 1),$$

т. е.

$$\nu(\mathfrak{F}) < {}^1/_3 + {}^4/_3\varepsilon. \tag{6.2.ξ}$$

Сравнивая (6.2ν) и (6.2.ξ), получаем, что ${}^1/_2 - \varepsilon < {}^1/_3 + {}^4/_3\varepsilon$ или ${}^1/_{14} < \varepsilon$. Поэтому, для того чтобы получить противоречие, достаточно взять $\varepsilon = 1/14$.

Таким образом, мы показали, что **M** не может обладать свойством Г.

С л е д с т в и е 1. *При сделанных предположениях фактор* **M** *не аппроксимативно конечен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует из доказанной леммы и леммы 6.1.2.

С л е д с т в и е 2. *Мы можем заменить условие* (i_2) *на* $\mathfrak{G}$ *и* $\mathfrak{F}$ *условием*

(i_2) *Существуют два элемента* c_2 *и* c_3, *такие, что множества* $\mathfrak{F}$, $c_2\mathfrak{F}c_2^{-1}$, $c_3\mathfrak{F}c_3^{-1}$ *попарно не пересекаются.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в первом абзаце проведенного выше доказательства $A_3 = U_{c_3}$ и рассмотрим затем унитарный оператор $U = U(A_1, A_2, A_3, \varepsilon)$ вместо $U = U(A_1, A_2, \varepsilon)$. Тогда в соотношениях (6.2.β), (6.2.γ), (6.2.ε), (6.2.θ) и (6.2.ι) мы имеем $h = 1, 2, 3$ вместо $h = 1, 2$. Наконец, вместо неравенства (6.2.μ) мы получаем неравенство

$$|\nu(\mathfrak{F}) - \nu(c_3 \mathfrak{F} c_3^{-1})| < 2\varepsilon, \tag{6.2.μ'}$$

если применим (6.2.ι) к $\mathfrak{F}$, c_3, а не к $c_2^{-1}\mathfrak{F}c_2$, c_2. Далее для вывода (6.2.ξ) используется (6.2.μ′) вместо (6.2.μ) и оставшаяся часть доказательства остается без изменений.

В качестве заключительного этапа мы приведем пример фактора **M**, не обладающего свойством Г и поэтому не аппроксимативно конечного. Мы сделаем это, построив пример группы, удовлетворяющей требованиям леммы 6.2.1.

Л е м м а 6.2.2. *Пусть* $\mathfrak{G}$ *есть свободная группа с двумя образующими* c_1, c_2. *Тогда* $\mathfrak{G}$ *удовлетворяет всем условиям леммы* 6.2.1.

Доказательство. Условие (i) леммы 5.3.4. Выберем некоторый элемент $a \in \mathfrak{G}$, $a \neq 1$. Запишем a как произведение степеней c_1, c_2 минимальной длины. Тогда легко проверить, что элементы $c_1^{-n} a c_1^n$, $n = 1, 2, \ldots$, попарно различны, если только $a \neq c_1^m$. В последнем случае элементы $c_2^{-n} a c_2^n = c_2^{-n} c_1^m c_2^n$ попарно различны, если только $m \neq 0$, т. е. $a \neq 1$. Таким образом, при $a \neq 1$ множество $\mathfrak{L}_a$ бесконечно.

Условие (i) леммы 6.2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ есть множество тех $a \in \mathfrak{G}$, которые при записи их в виде произведения степеней c_1, c_2 минимальной длины оканчиваются на c_1^n, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Тогда условия (i_1) и (i_2) леммы 6.2.1, т.е. условие (i) этой леммы, проверяются непосредственно.

Комбинируя лемму 6.2.2 со следствием 1 леммы 6.2.1, мы получаем следующий результат.

Теорема XVI. *Существуют не аппроксимативно конечные факторы типа* (II_1).

Или, если учесть теорему XV, то можно утверждать и следующее.

Теорема XVI′. *Факторы типа* (II_1) *состоят из более чем одного алгебраического типа.*

6.3. В данном пункте мы хотим привести несколько примеров групп $\mathfrak{G}$, для которых соответствующие факторы **M** п. 5.3 не аппроксимативно конечны.

Лемма 6.3.1. *Пусть* $\mathfrak{G}$ *есть группа, содержащая две подгруппы* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$. *Допустим, что* $\mathfrak{G}$ *есть свободное произведение* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *и что* $\mathfrak{F}_1$ *содержит по меньшей мере два элемента, а* $\mathfrak{F}_2$ — *по меньшей мере три Тогда группа* $\mathfrak{G}$ *удовлетворяет условию* (i) *леммы* 5.3.4, *условию* (i_1) *леммы* 6.2.1 *и условию* (i_2') *следствия* 2 *этой леммы* (*с тем же самым* $\mathfrak{F}$).

Доказательство. Пусть $c_1 \neq 1$ есть некоторый элемент $\mathfrak{F}_1$, а c_2, $c_3 \neq 1$ — элементы $\mathfrak{F}_2$.

Докажем вначале, что выполнено условие (i) леммы 5.3.4, т. е. что для $a \in \mathfrak{G}$, $a \neq 1$, множество $\mathfrak{L}_a$ бесконечно.

Допустим, что дан некоторый элемент $a \in \mathfrak{G}$, $a \neq 1$. Поскольку $\mathfrak{G}$ есть свободное произведение групп $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, то каждый элемент a допускает единственную факторизацию $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$, в которой множители попеременно принадлежат $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ и ни один из множителей не равен 1.

Заметим на будущее, что если $c \in \mathfrak{F}_i$, то $c^{-1} \in \mathfrak{F}_i$. Пусть $i = 1$. Тогда c^{-1} имеет некоторую факторизацию $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_r$. Если $b_1 \in \mathfrak{F}_2$, то $1 = cc^{-1} = c \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_r \neq 1$. Таким образом, $b_1 \in \mathfrak{F}_1$. Но из равенства $1 = cc^{-1} = (cb_1) \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_r$ следует, что $r = 1$. Следовательно, $c^{-1} = b_1 \in \mathfrak{F}_1$.

Предположим вначале, что a_1 (первый множитель) и a_p (последний множитель) оба принадлежат $\mathfrak{F}_1$. Пусть $b_n = (c_2 c_1)^n$. Тогда элементы $b_n^{-1} a b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, все различны (факторизация в этом случае очевидна). Поэтому при сделанном предположении множество $\mathfrak{L}_a$ бесконечно.

Если a_1 и a_p оба из $\mathfrak{F}_2$, то положим $b_n = (c_1 c_2)^n$, и результат опять очевиден.

Если a_1 принадлежит $\mathfrak{F}_1$ и a_p — $\mathfrak{F}_2$, то рассмотрим элементы c_2 и c_3 и обозначим через c' тот из них, который не равен a_p^{-1}. Пусть $b_n = (c' c_1)^n$. Тогда для $n = 1, 2, \ldots$ факторизация элемента $b_n^{-1} a b_n$ получается простым выписыва-

нием выражений для этих элементов и умножением a_p на первый множитель c' в b_n, что дает элемент, принадлежащий $\mathfrak{F}_2$ и не равный 1, поскольку $c' \neq a_p^{-1}$. Эти факторизации для $n = 1, 2, \ldots$ показывают, что элементы $b_n^{-1}ab_n$ все различны и поэтому множество $\mathfrak{L}_a$ бесконечно.

Если a_1 принадлежит $\mathfrak{F}_2$ и $a_p \in \mathfrak{F}_1$, мы определим c' как тот из элементов c_2, c_3, который не равен a_1. Те же аргументы, что и выше, показывают, что и в этом случае множества $\mathfrak{L}_a$ бесконечны при $a \neq 1$.

Таким образом, условие (i) леммы 5.3.4 проверено.

Для того чтобы обосновать (i_1) леммы 6.2.1 и (i_2') следствия этой леммы для одного и того же множества $\mathfrak{F}$, мы определим $\mathfrak{F}$ как множество тех a, $a \neq 1$, в факторизации $a_1 \cdot \ldots \cdot a_p$ которых a_p принадлежит $\mathfrak{F}_1$.

Проверим вначале условие (i_1) леммы 6.2.1, т. е. что

$$\mathfrak{F} + c_1^{-1}\mathfrak{F}c_1 = \mathfrak{G} - (1).$$

Если $a \in \mathfrak{G}$, $a \neq 1$, то a имеет некоторую факторизацию $a_1 \cdot \ldots \cdot a_p$. Теперь если $a \notin \mathfrak{F}$, то $a_p \notin \mathfrak{F}_1$, т. е. $a_p \in \mathfrak{F}_2$. Рассмотрим в этом случае элемент $c_1ac_1^{-1} = c_1a_1 \cdot \ldots \cdot a_pc_1^{-1}$. Если p четно, т. е. $p = 2, 4, \ldots$, то $a_1 \in \mathfrak{F}_1$ (поскольку $a_p \in \mathfrak{F}_2$), и факторизация элемента $c_1ac_1^{-1}$ есть либо $(c_1a_1) \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p \cdot c_1^{-1}$, либо (если $c_1a_1 = 1$) $a_2 \cdot \ldots \cdot a_p \cdot c_1^{-1}$. Если p нечетно, т. е. $p = 1, 3, \ldots$, то $a_1 \in \mathfrak{F}_2$, и $c_1ac_1^{-1}$ имеет факторизацию $c_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_p \cdot c_1^{-1}$. Эти факторизации показывают, что $c_1ac_1^{-1} \in \mathfrak{F}$. Таким образом, если $a \neq 1$ и $a \notin \mathfrak{F}$, то $c_1ac_1^{-1} \in \mathfrak{F}$, т. е. $a \in c_1^{-1}\mathfrak{F}c_1$. Это эквивалентно тому, что $\mathfrak{G} - (1) \subseteq \mathfrak{F} + c_1^{-1}\mathfrak{F}c_1$. Однако это включение не может быть строгим. Поэтому мы заключаем, что

$$\mathfrak{F} + c_1^{-1}\mathfrak{F}c_1 = \mathfrak{G} - (1).$$

Свойство (i_2') следствия 2 леммы 6.2.1 устанавливается аналогичным (в действительности более простым) образом.

Итак, наша лемма доказана.

Эта лемма дает возможность строить много других примеров групп, аналогичных группе $\mathfrak{G}$ леммы 6.2.2. Действительно, мы можем многими способами построить группы $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ и затем по ним построить группу $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ присоединением к 1 «свободных» произведений $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$, где элементы $a_i \neq 1$ и попеременно принадлежат $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Например, мы можем взять в качестве $\mathfrak{F}_1$ группу порядка $p = 2, 3, \ldots, \infty$, порожденную единственной образующей a, а в качестве $\mathfrak{F}_2$ — группу порядка $q = 3, 4, \ldots$, порожденную единственной образующей b. Тогда в качестве примера мы получаем группу $\mathfrak{G}(a, b) = \mathfrak{G}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$. Конечно, в качестве $\mathfrak{F}_1$ может быть взята любая группа порядка $\geqslant 2$, а в качестве $\mathfrak{F}_2$ — любая группа порядка $\geqslant 3$.

Ограничение, что $\mathfrak{F}_2$ содержит минимум три элемента, исключает случай, когда и $\mathfrak{F}_1$, и $\mathfrak{F}_2$ — группы порядка 2, т. е. $\mathfrak{F}_1$ состоит из элементов $(1, a)$, а $\mathfrak{F}_2$ состоит из элементов $(1, b)$. Здесь, конечно, не выполнены условия (i_2) леммы 6.2.1 и (i_2') ее второго дополнения. Однако условие (i) леммы 5.3.4 также нарушается. Действительно, элемент ab сопряжен лишь с элементом ba и

с самим собой, т. е. $\mathfrak{L}_{ab} = (ab, ba)$. Таким образом, множество $\mathfrak{L}_{ab}$ конечно. Поэтому по лемме 5.3.4 **M** даже не фактор.

Другая лемма, которую мы будем использовать в приложении, может быть доказана теперь непосредственно.

Лемма 6.3.2. *Если группа $\mathfrak{G}$ такова, что для каждого элемента $a \in \mathfrak{G}$, $a \neq 1$, существует элемент $b \in \mathfrak{G}$ порядка $\geqslant 3$, такой, что $\mathfrak{G}$ содержит свободную группу $\mathfrak{G}(a, b)$, то группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию* (i) *леммы* 5.3.4 (*если только порядок a не равен* 2, *то достаточно, чтобы* $b \neq 1$).

Доказательство. Обозначим через $\overline{\mathfrak{L}}_a$ класс сопряженных элементов элемента a относительно подгруппы $\mathfrak{G}(a, b)$. Обсуждение, следующее за леммой 6.3.1, показывает, что группа $\mathfrak{G}(a, b)$ удовлетворяет предположениям леммы 6.3.1. Поэтому из этой леммы и леммы 5.3.4 следует, что множество $\overline{\mathfrak{L}}_a$ бесконечно. Так как $\overline{\mathfrak{L}}_a \subseteq \mathfrak{L}_a$, то $\mathfrak{L}_a$ само бесконечно и, таким образом, условие (i) леммы 5.3.4 выполнено.

ПРИЛОЖЕНИЕ[72]

В этом приложении мы дадим пример двух неизоморфных факторов типа (II_1), каждый из которых изоморфен части другого.

Эти факторы будут ассоциированы с некоторыми группами $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{H}_1$ в смысле определений п. 5.3. Группы $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{H}_1$ лучше всего представлять себе как подгруппы некоторой группы $\mathfrak{G}$, к определению которой мы и переходим.

Группа $\mathfrak{G}$ порождается образующими x_r по одному для каждого рационального числа $r = p/q$. Множество соотношений для этих образующих определяется следующим образом. Обозначим через A множество двоично-рациональных чисел r, записанных в несократимом виде, т. е. $r = q/2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и q — нечетное число, если только $n \neq 0$. Обозначим остальные рациональные числа через B.

Множество соотношений для образующих x_r имеет следующий вид:

(i) если $r \in A$, то x_r умножается свободно на любое произведение $x_{s_1} \cdot x_{s_2} \cdot \ldots \cdot x_{s_p}$, если все $s_1, s_2, \ldots, s_p < r$;

(ii) если $r \in B$, то x_r коммутирует с любым произведением $x_{s_1} \cdot x_{s_2} \cdot \ldots \cdot x_{s_p}$, если все $s_1, s_2, \ldots, s_p < r$;

(iii) все образующие x_r имеют порядок, равный ∞.

Можно показать, что множество всех конечных произведений $x_{r_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_{r_p}^{n_p}$, $n_i = \pm 1, \pm 2, \ldots$, образует счетную группу $\mathfrak{G}$[73]. Это справедливо также и для

[72] Этот пример был первоначально частью более позднего исследования второго из авторов, но с помощью наших настоящих методов он может быть гораздо проще изложен здесь.

[73] Это легко доказать, построив для каждого произведения $x_{r_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_{r_p}^{n_p}$ его «нормальную форму». Эта нормальная форма может быть получена следующим бразом. Пусть r_i — это наибольший из индексов, принадлежащих B. Сдвинем множитель $x_{r_i}^{n_i}$ налево насколько возможно. Пусть $r_{i'}$ — наибольший из оставшихся индексов, принадлежащих B. Сдвинем теперь множитель $x_{r_{i'}}^{n_{i'}}$ налево насколько возможно и т. д. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не переберем все $r_i \in B$. Получившееся произведение записывается тогда в виде,

множества произведений, в которых количество образующих уменьшено так, что r принадлежит некоторому непустому подмножеству S множества рациональных чисел.

Пусть $\mathfrak{H}_r$ есть подгруппа группы $\mathfrak{G}$, порожденная образующими $x_{r'}$ с $r' \leqslant r$, а $\mathfrak{G}_r$ — подгруппа, порожденная образующими $x_{r'}$ с $r' < r$. Докажем следующие утверждения.

Лемма А.1. (i) $\mathfrak{G}_r \subseteq \mathfrak{H}_r$.

(ii) *Если* $r' < r$, *то* $\mathfrak{H}_{r'} \subseteq \mathfrak{G}_r$.

(iii) *Если* $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, *то подгруппа* $\mathfrak{H}_{r+n}$ *изоморфна* $\mathfrak{H}_r$.

(iv) $\mathfrak{G}_r$ *обладает свойством* (i) *леммы* 5.3.4.

(v) $\mathfrak{G}_r$ *обладает свойством* (i) *леммы* 6.1.1.

(vi) *Предположим, что* $r \in A$. *Тогда подгруппа* $\mathfrak{H}_r$ *удовлетворяет условиям леммы* 6.3.1 *и, следовательно, условиям* (i_1) *и* (i_2') *леммы* 6.2.1 *и ее следствия* 2 *и условию* (i) *леммы* 5.3.4.

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) очевидны.

(iii). Соответствие $x_{r+n} \sim x_r$ между образующими подгрупп $\mathfrak{H}_{n+r}$ и $\mathfrak{H}_r$ взаимно однозначно и сохраняет свойства $r \in A$ и $r \in B$. Следовательно, оно порождает изоморфизм подгрупп $\mathfrak{H}_{n+r}$ и $\mathfrak{H}_r$.

(iv). Пусть $a \in \mathfrak{G}_r$. Тогда $a = x_{r_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_{r_p}^{n_p}$, где каждое $r_i < r$. Пусть r' есть $\max_{i=1,\ldots,p} r_i$. Тогда, конечно, $r' < r$ и существует $r'' \in A$, такое, что $r' < r'' < r$. По первому коммутационному соотношению (см. (i) выше) $x_{r''}$ умножается на a свободно. По определению подгруппы $\mathfrak{G}_r$, $\mathfrak{G}(a, x_{r''}) \subseteq \mathfrak{G}_r$. Образующие x_r имеют, по определению, бесконечный порядок. Из этих трех свойств следует, что условия леммы 6.3.2, а с ними и условие (i) леммы 5.3.4 выполнены.

(v). Мы должны доказать, что подгруппа $\mathfrak{G}_r$ обладает свойством (i) леммы 6.1.1. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — произвольные k элементов подгруппы $\mathfrak{G}_r$. Пусть $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots$ $\ldots, x_{r_l}$ — образующие, участвующие в построении элементов $a_1, \ldots, a_k$. Пусть $r' = \max_{i=1,\ldots,l} r_i$. Тогда по построению подгруппы $\mathfrak{G}_r$ $r' < r$. Поэтому существует $r'' \in B$, такое, что $r' < r'' < r$. Пусть $c = x_{r''}$. Тогда $c \neq 1$, $c \in \mathfrak{G}_r$ и c коммутирует со всеми $a_1, \ldots, a_k$ по второму коммутационному соотношению. Отсюда следует, что условие (i) леммы 6.1.1 выполнено.

(vi). Пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}_r$, $\mathfrak{F}_2 = (x_r^n)$. Образующая x_r имеет бесконечный порядок, и первое коммутационное соотношение показывает, что $\mathfrak{H}_r$ есть свободное произведение подгрупп $\mathfrak{G}_r$ и $\mathfrak{F}_2$. Это показывает, что условия леммы 6.3.1 выполнены Согласно этой лемме условия (i_1) и (i_2') леммы 6.2.1 и следствия 2 к ней и условие (i) леммы 5.3.4 также выполнены.

Теперь мы сформулируем одну общую лемму.

в котором множители $x_{r_j}^{n_j}$, $r_j \in A$, имеют тот же самый порядок, что и прежде, и за каждым таким множителем $x_{r_j}^{n_j}$, $r_j \in A$, следует произведение $x_{r_{i_1}}^{n_{i_1}} \cdot \ldots \cdot x_{r_{i_k}}^{n_{i_k}}$, где каждое $r_{i_t} \in B$ и $r_{i_1} < r_{i_2} < \ldots < r_{i_k} < r_j$.

Эту форму можно использовать для доказательства ассоциативности. Существование обратного элемента очевидно.

Лемма А.2. *Пусть* **M** *есть кольцо, содержащее* ($\alpha \cdot 1$), *и пусть элемент* $f \in \mathfrak{H}$ *таков, что если* $Af = 0$ *и* $A \in \mathbf{M}$, *то* $A = 0$. *Пусть* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}}$. *Тогда если оператор* A *замкнут, определен на плотном множестве и* $\eta\mathbf{M}$, *то* A *ограничен тогда и только тогда, когда он ограничен на* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Нам, очевидно, необходимо показать только, что если оператор A неограничен в $\mathfrak{H}$, то он неограничен и в $\mathfrak{M}$. Пусть $A = WB$, где оператор W частично изометричен, а B неотрицателен (см. [5, п. 4.4]). Поскольку $A\eta\mathbf{M}$, то и $B\eta\mathbf{M}$ и, кроме того, $|Ag| = |Bg|$ для всех g (эти величины могут быть, конечно, равны ∞). Поэтому мы можем заменить A на B, т. е. мы можем предполагать, что оператор A неотрицателен. Но если A неотрицателен, то существует семейство проекторов $\{E(\lambda)\} \subset \mathbf{M}$, таких, что $A = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda)$. Поскольку оператор A неограничен, то $1 - E(\lambda) \neq 0$ для $\lambda < \infty$. Пусть $g = (1 - E(\lambda)) f$. По нашему предположению $g \neq 0$, поскольку $1 - E(\lambda) \neq 0$. Из формулы для A следует теперь, что $|Ag| > \lambda |g|$. Кроме того, $g \in \mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}} = \mathfrak{M}$. Таким образом, если оператор A неограничен, то он неограничен и на $\mathfrak{M}$.

Дополнение. *Если* $A \in \mathbf{M}$, *то норма* A *на* $\mathfrak{M}$ *совпадает с нормой* A *на всем пространстве* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Ясно, что норма A на $\mathfrak{M}$ не превосходит $|||A|||$. Для доказательства того, что эта норма не может быть меньше $|||A|||$, можно использовать те же аргументы, что и при доказательстве леммы.

Мы воспользуемся леммой А. 2 в ситуации, когда **M** есть подкольцо кольца групповых чисел (см. п. 5.3). Положим для этого $f = \varphi_1$, где φ_1 определено в (5.3.α). Тогда если $A \in \mathbf{M}$, то $A \sim \{\eta_{a^{-1}b}\}$ по лемме 5.3.2 и $A\varphi_1 = \sum_{c \in \mathfrak{G}} \eta_c \varphi_c$ по ([49], γ). Таким образом, если $A\varphi_1 = 0$, то $\eta_c = 0$ для всех $c \in \mathfrak{G}$, и, следовательно, $A = 0$.

Полезно заметить также, что если последовательность $\{\eta_c\}$ такова, что ряд $\sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_c|^2$ сходится, то матрица $\{\eta_{a^{-1}b}\}$ отвечает замкнутому оператору A с плотной областью определения. Действительно, матрица $\{\overline{\eta_{b^{-1}a}}\}$ является сопряженной для матрицы $\{\eta_{a^{-1}b}\}$ и имеет плотную область определения, поэтому оператор A допускает замыкание. Мы рассмотрим его минимальное замыкание. На своей области определения A есть предел конечных линейных комбинаций операторов U_c и поэтому $\eta\mathbf{M}$ (см. леммы 5.3.1, 5.3.2 и 5.3.6).

Лемма А.3 *Пусть заданы группы* $\mathfrak{G}^0$ *и* $\mathfrak{G}^{00}$ *и* $\mathbf{M}^0$, $\mathbf{M}^{00}$ — *соответствующие кольца групповых чисел* (*см.* п.5.3). *Тогда если* $\mathfrak{G}^0 \subseteq \mathfrak{G}^{00}$, *то кольцо* $\mathbf{M}^0$ *алгебраически изоморфно некоторому подкольцу кольца* $\mathbf{M}^{00}$.

Доказательство. Для произвольного оператора $A \in \mathbf{M}^{00}$ мы имеем соответствующую последовательность $\{\eta_c,\ c \in \mathfrak{G}^{00}\}$ (см. лемму 5.3.2). Обозначим через $\mathbf{M}^{0+}$ множество тех операторов $A \in \mathbf{M}^{00}$, для которых $\eta_c = 0$, если $c \notin \mathfrak{G}^0$. Так как $\mathfrak{G}^0$ является группой, то множество таких операторов A замкнуто относительно операций αA, A^*, $A + B$, AB. Кроме того, это множество метрически замкнуто, и, как указывалось в конце п.5.5, отсюда следует кольцевая замкнутость. Таким образом, $\mathbf{M}^{0+}$ является кольцом и это кольцо действительно порождено операторами U_c, $c \in \mathfrak{G}^0$.

Пусть $\mathfrak{M}^0$ есть множество $\subseteq \mathfrak{H}^{00}$, порожденное векторами φ_a с $a \in \mathfrak{G}^0$ (см (5.3.α)). Ясно, что это множество может быть идентифицировано с пространством $\mathfrak{H}^0$, на котором действует кольцо $\mathbf{M}^0$. Далее, для каждого оператора $A \in \mathbf{M}^0$ мы имеем последовательность $\{\zeta_c, c \in \mathfrak{G}^0\}$ и соответствующую матрицу $\{\zeta_{a^{-1}b}\}$. Соответственно мы имеем последовательность $\{\eta_c, c \in \mathfrak{G}^{00}\}$ с $\eta_c = \zeta_c$ для $c \in \mathfrak{G}^0$ и $\eta_c = 0$ в противном случае. Как было указано выше, матрица $\{\eta_{a^{-1}b}\}$ определяет замкнутый оператор $\tilde{A}$ с плотной областью определения. Этот оператор, очевидно, $\eta \mathbf{M}^{0+}$, и поэтому в силу леммы А.2 он ограничен, если только он ограничен на $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}^{0+}}$. Из определения кольца $\mathbf{M}^{0+}$ следует, что $\mathfrak{M}_f^{\mathbf{M}^{0+}} = \mathfrak{M}^0$. Далее, $\tilde{A} = A$ на $\mathfrak{M}^0$ и поэтому $\tilde{A}$ ограничен на $\mathfrak{M}^0$. Отсюда по лемме А.2 оператор $\tilde{A}$ ограничен и $\in \mathbf{M}^{0+}$. Мы видим, таким образом, что каждому оператору $A \in \mathbf{M}^0$ соответствует некоторый оператор $\tilde{A} \in \mathbf{M}^{0+}$, такой, что $\tilde{A}$ согласован с A на $\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{M}^0$. С другой стороны, ясно, что каждому $\tilde{A} \in \mathbf{M}^{0+}$ соответствует при этом некоторый оператор $A \in \mathbf{M}^0$.

Непосредственно проверяется, что установленное соответствие является алгебраическим изоморфизмом.

Теперь мы готовы сделать последний шаг. Пусть $\mathbf{M}_1$ есть множество групповых чисел для $\mathfrak{G}_1$, а $\mathbf{M}_2$ — множество групповых чисел для $\mathfrak{H}_1$ (см. п. 5.3).

Лемма А.4 (i) *$\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ — факторы типа* (II_1).

(ii) *$\mathbf{M}_1$ алгебраически изоморфен подкольцу $\mathbf{M}_2$.*

(iii) *$\mathbf{M}_2$ алгебраически изоморфен подкольцу $\mathbf{M}_1$.*

(iv) *$\mathbf{M}_1$ обладает свойством Г определения* 6.1.1.

(v) *$\mathbf{M}_2$ не обладает свойством* Г.

Доказательство. (i). $\mathbf{M}_1$ есть фактор по леммам А.1, (iv) и 5.3.4, $\mathbf{M}_2$ есть фактор по леммам А.1, (vi) и 5.3.4. Факторы $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ имеют тип (II_1) по лемме 5.3.5, (i).

(ii). Это следует из лемм А.1, (i) и А.3.

(iii). Пусть $\mathbf{M}_0$ есть множество групповых чисел для $\mathfrak{H}_0$. Лемма А.1, (iii) с $n = -1$ показывает, что группы $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_1$ изоморфны и, следовательно, кольцо $\mathbf{M}_2$ алгебраически изоморфно кольцу $\mathbf{M}_0$. Из лемм А.1, (ii) и А.3 следует, что $\mathbf{M}_0$ изоморфно подкольцу кольца $\mathbf{M}_1$. Поэтому $\mathbf{M}_2$ алгебраически изоморфно подкольцу кольца $\mathbf{M}_1$.

(iv). Это следует из лемм А.1, (v) и 6.1.1.

(v). Это следует из леммы А.1, (vi) и следствия 2 леммы 6.2.1.

Поскольку свойство Г является алгебраическим инвариантом, то из соотношений (iv) и (v) следует, что кольца $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ алгебраически неизоморфны. Учитывая еще и соотношения (i), (ii) и (iii), мы получаем следующий результат

Теорема А. *Существуют два алгебраически неизоморфных кольца $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, каждое из которых является фактором типа* (II_1), *такие, что любое из этих двух колец изоморфно некоторому подкольцу другого.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. — Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 49—131.
2. *Neumann J. von.* Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren.— Math. Ann., 1929, Bd. 102, S. 370—427.
3. *Neumann J. von.* Über Funktionen von Funktionaloperatoren.— Ann. Math., 1931, vol. 32, p. 191—226.
4. *Neumann J. von.* On a certain topology for rings of operators.—Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 111—115.
5. *Murray F. J., Neumann J. von.* On rings of operators.— Ann. Math., 1936, vol. 37, p. 116—229. (Рус. пер. см. наст. кн.)
6. *Murray F. J., Neumann J. von.* On rings of operators II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1937, vol. 41, p. 208—248. (Рус. пер. см. наст. кн.)
7. *Neumann J. von.* On infinite direct products.— Compos. math., 1938, bd. 6, blz. 1—77. (Рус. пер. см. наст. изд., т. 1).
8. *Neumann J. von.* On rings of operators III.— Ann. Math., 1940, vol. 41, p. 94—161. (Рус. пер. см. наст. кн.)
9. *Neumann J. von.* On some algebraical properties of operator rings.—Ann. Math., 1943, vol. 44, p. 709—715.

КОММЕНТАРИИ*

За годы, прошедшие со времени написания ставших классическими работ фон Неймана совместно с Мюрреем по теории факторов и операторным алгебрам, в этой и смежных областях произошли замечательные изменения, о которых мы кратко расскажем.

Следует начать с того, что эти работы сильно опередили свое время и вряд ли могли сразу же быть оценены должным образом и использованы математиками тех лет. Обширный цикл работ по алгебрам операторов (тогда их называли «кольцами операторов») развивался, как бы следуя внутренней логике теории. Эти работы были закономерным продолжением спектральной теории коммутативных алгебр операторов. Свойственное фон Нейману умение точно отобрать естественную и продуктивную аксиоматику в сочетании с интуицией одного из наиболее глубоких специалистов по применению теории операторов в математике и физике привело авторов к фундаментальному понятию — W^*-алгебры (сейчас — алгебры фон Неймана), а последовательное развитие теории таких алгебр — к открытию факторов. Опыт построения аксиоматических теорий позволил ему в этом цикле работ далеко продвинуть теорию W^*-алгебр, найти многочисленные связи с теорией представлений теорией меры, динамическими системами и др. Однако подлинные приложения этой теории к математической физике и другим вопросам открылись значительно позже и лишь сейчас, возможно, мы можем по достоинству оценить пользу и глубину теории алгебр фон Неймана. Добавим еще, что обилие идей и задач, содержащихся в этих работах фон Неймана, еще далеко не исчерпано: многие, поставленные там вопросы получили свое решение лишь недавно (например, проблема о фундаментальных группах фактора или о существовании фактора, не изоморфного антиизоморфному), а некоторые остаются открытыми до сих пор

Первое время (40-е — начало 50-х годов) теория алгебр фон Неймана не привлекала широкого интереса; сам фон Нейман после войны уже не возвращался к этим проблемам (хотя работа, примыкающая сюда и не включенная в это издание «On rings of operators reduction theory», опубликована в 1949 г., написана она была в 1937—1938 гг.). Имелось несколько попыток переизложения и комментирования этого трудного цикла работ (в том числе и на русском языке) Начиная с середины 50-х годов положение постепенно меняется, и к середине 60-х годов список работ насчитывает уже сотни наименований. В настоящее время по теории алгебр (W^* и C^*) выходит несколько периодических библиографий (во Франции и Румынии). Следует сказать, что после работ И. М. Гельфанда (30—40-е годы) по нормированным (банаховым) кольцам и в особенности после введения понятия (Гельфанд—Неймарк) C^*-алгебры произошло объединение теорий слабо замкнутых (W^*-алгебр) и равномерно замкнутых (C^*-алгебры) алгебр операторов в общую теорию, в которой W^*-алгебры выступают как объекты теории представлений C^*-алгебр. В свою очередь, эта объединенная область поглотила многие разделы теории представлений групп и алгебр, теории квантования и др. Обзор всей этой обширной проблематики не входит в наши задачи, и мы коснемся совсем кратко нескольких направлений развития и применения этой теории, отсылая читателя к многочисленным современным руководствам (Диксмье [1, 2], Сакаи [3], Эмх [4], Браттели [5], Педерсен [6], Такесаки [7] и др) и к журнальной литературе.

---

* В комментариях обсуждается современное развитие идей фон Неймана в теории факторов, представлений групп и алгебр, а также в теории меры и в эргодической теории. Комментарии снабжены списком литературы, который призван помочь читателю найти работы последних лет по этим проблемам, но ни в коей мере не является исчерпывающим.

I. ТЕОРИЯ ФАКТОРОВ И ПРОБЛЕМА ИЗОМОРФИЗМА

Опишем положение в задаче о классификации факторов к настоящему (1982 г.) времени.

Первичная классификация факторов по типам I_n ($1 \leqslant n \leqslant \infty$), II ($II_1$, II_∞) и III, данная в статьях фон Неймана, определила на некоторое время очередность и характер исследований. Собственно, факторы типа I_n были полностью расклассифицированы: это алгебра всех операторов в гильбертовом пространстве размерности n, $n = 1, 2, \ldots, \infty$ (см. «Кольца II». Для краткости статьи по кольцам операторов, помещенные в этой книге, цитируются как «Кольца I», «Кольца II» и т. д.— *Примеч. ред.*), и их роль состояла в том, что алгебры и группы, представления которых порождали W^*-алгебры, разлагающиеся на факторы типа I, стали основным предметом в теории представлений групп (группы типа I) и алгебр (postliminaire, или «ручные») Факторы типа III, наоборот, долгое время (см. дальше) казались слишком сложным объектом; даже первый пример приведен лишь в статье «Кольца III». Поэтому основной интерес исследователей сосредоточился на факторах типа II и в первую очередь типа II_1. По чисто эстетическим соображениям пространства, где размерность принимает непрерывное множество значений ($[0, 1]$ или $[0, \infty]$) (ср. с непрерывной геометрией фон Неймана), выглядят привлекательно для математика, поскольку являются необычной, но, видимо, очень важной формой предельного перехода от конечномерных пространств

Первые примеры факторов типа II_1 даны в статьях «Кольца II—IV», они связаны с несколькими конструкциями: регулярными представлениями групп (см. ниже), конструкцией скрещенного произведения (динамические системы); прямыми аппроксимационными методами (бесконечные тензорные произведения). В статье «Кольца IV» доказывается важная теорема о том, что существует единственный с точностью до изоморфизма аппроксимативно конечный фактор типа II_1 (сейчас более распространен термин «гиперконечный»). Гиперконечные факторы, и в частности фактор типа II_1, представляют преимущественный интерес для анализа, приложений к математической физике и др. Это объясняется тем, что гиперконечные факторы получаются естественным предельным процессом из конечномерных алгебр. Их структура изучена еще недостаточно, мы обсудим более подробно ряд их свойств далее. В статьях «Кольца IV», «О бесконечных тензорных произведениях», «Аппроксимативные свойства матриц...» (см. т. 1 наст. изд.) содержится первоначальный запас сведений.

Некоторое время вопрос о существовании факторов типа II_1, не изоморфных гиперконечному, был открыт, и фон Нейман предпринял интересные и сами по себе попытки (см. статью «Аппроксимативные свойства матриц...» в т. 1) найти иные примеры. В статье «Кольца IV» были найдены такие примеры. Метод построения новых факторов типа II_1, предложенный фон Нейманом в этой работе, используется до сих пор, именно он позволил открыть в конце концов континуум попарно неизоморфных факторов. Этот метод состоит в следующем. Пусть G—дискретная счетная группа, у которой все (кроме единичного) классы сопряженности бесконечны Рассмотрим в гильбертовом пространстве $l^2(G)$ левое и правое регулярные представления группы: $(L_g f)(h) = f(gh)$, $(R_g f)(h) = f(hg^{-1})$; слабо замкнутая алгебра $U(G)$ ($\{U^*(G)\}$), порожденная операторами $\{L_g\}$ (соответственно $\{R_g\}$) есть фактор типа II_1; след в ней задается формулой $\lambda(A) = \langle A\delta_1, \delta_1 \rangle$, где δ_1— характеристическая функция единицы группы e. Построенные два фактора $U(G)$ и $U^*(G)$ являются взаимными коммутантами и изоморфны между собой. Если G — группа финитных подстановок натурального ряда или вообще локально-конечная группа с приведенным выше условием на классы сопряженности, то построенный фактор гиперконечен. Вообще же тип этого фактора (или W^*-алгебры в случае произвольной группы) есть, разумеется, весьма грубый инвариант группы

В гл. VI статьи «Кольца IV» строится пример не гиперконечного фактора: это фактор $U(G)$, где G — свободная группа с двумя образующими; различающее свойство (им обладает гиперконеч-

* W_2 — свободная группа с двумя образующими.

ный фактор) — свойство Г, которое фактически содержит плодотворную идею центральной последовательности, использованную позже многими авторами. В приложении к той же статье имеется замечательный пример двух не изоморфных между собой факторов типа II_1, каждый из которых изоморфен подфактору другого. Один из них — $U(W_2)$, другой также имеет структуру $U(G)$, но группа G более сложная, и отсутствие гиперконечности для него была доказано позже Дж. Шварцем. И эта группа, и свойство Г легли в основу построения примеров и классификации факторов в последующие годы. Влияние классификации факторов на теорию представлений мы обсудим позже, а сейчас укажем важнейшие работы по построению новых примеров факторов. В работе [8] Дж. Шварц, по его собственному выражению, добавил еще один фрагмент к цепочке отрывочных сведений о факторах типа II_1, введя свойство Р, эквивалентное для факторов вида $U(G)$ аменабельности группы G. Поскольку второй из упомянутых выше факторов (из приложения к статье «Кольца IV») строился по группе, содержащей W_2 в качестве подгруппы, то, доказав инвариантность свойства Р, Шварц показал, в частности, что второй фактор также не гиперконечен. Тем самым три попарно неизоморфных фактора типа II_1 были фактически построены фон Нейманом. Таким положение и оставалось до 1969 г., когда с небольшими перерывами была опубликована серия работ Диксмье [9, 9а], Диксмье и Ланса [10], Целлер-Мейера [11], Сакаи [12] и Макдуфф [13], в которых была развита идея центральных последовательностей, позволившая найти новые инварианты факторов типа II_1 и построить группы, регулярные представления которых порождали факторы, различаемые этими инвариантами. Сами по себе примеры групп (Диксмье, Ланс — конечное число, Сакаи — счетное множество, Макдуфф — континуум) носят весьма искусственный характер; кроме того, ясно, что их появление несколько случайно и они далеко не исчерпывают всех возможностей. Однако метод их построения, являющийся далеким развитием идей фон Неймана, представляет определенный интерес. Ограничимся указанием групп (по Макдуфф) и кратким обзором метода. Группы строятся видоизменением конструкции второго фактора из приложения к статье «Кольца IV»

Пусть G — произвольная счетная группа. Рассмотрим прямую сумму $\tilde{G} = \sum_{i=1}^{\infty} \oplus G_i$, $G_i \approx G$, и группу $L_0(G)$, порожденную G и образующими $\delta_1, \delta_2, \ldots$, которые удовлетворяют лишь следующему условию: δ_i коммутирует с элементами группы $\sum_{k=i}^{\infty} G_k \subset \tilde{G}$. Сами δ_i порождают свободную подгруппу со счетным числом образующих в $L_0(G)$. Построим теперь группу $L_1(G)$, которая порождена подгруппой $\mathfrak{S}_\infty \times \tilde{G}$ — полупрямым произведением группы $\tilde{G}$ и группы $\mathfrak{S}_\infty$ финитных подстановок натурального ряда, естественно действующей на $\tilde{G}$, и элементами δ_i, $i = 1, 2, \ldots$, где единственное соотношение между ними состоит в том, что δ_i коммутирует с $\sum_{k=i}^{\infty} G_k \subset \mathfrak{S}_\infty \times \tilde{G}$ Будем итерировать функторы L_0 и L_1.

Пусть $\alpha = \{\alpha_n\}_1^{\infty}$ — произвольная последовательность нулей и единиц. Тогда последовательность групп $\{L_{\alpha_n} L_{\alpha_{n-1}} \ldots L_{\alpha_1}(f)\}_1^{\infty}$ с естественными вложениями образует индуктивный предел — группу $M_\alpha(G)$. Если $G = W_2$ — свободная группа с двумя образующими, то факторы $U(M_\alpha(G))$ при разных α попарно неизоморфны. Различающие инварианты весьма громоздки — это центральные последовательности разных порядков; они обобщают свойство Г из «Кольца IV» (подробнее см. [13]).

Построенный континуум факторов вполне не связен и не дает возможности строить непрерывную деформацию факторов типа II_1.

В последнее время Конном [14] был построен новый континуум факторов типа II_1 на иной основе. Конн использовал важное понятие Каждана — свойство T. Группа обладает этим свойством, если ее единичное представление изолировано в пространстве неприводимых унитарных представлений с естественной топологией. Таковы, например, счетные группы SL $(n, \mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$. Оказалось, что фактор, порождаемый регулярным представлением этой группы, имеет счетную фундаментальную группу по фон Нейману (см. «Кольца IV»). Любопытно, что в статье «Кольца IV» прямо отмечено, что нет оснований думать, будто фундаментальная группа всегда совпадает с $\mathbb{R}_+$, хотя в то время не было никаких намеков на подобные примеры. Счетность фундаментальной группы Конн выводит из того, что фактор-группа всех автоморфизмов этого фактора по группе внутренних автоморфизмов счетна, что связано со свойством T. Из счетности фундаментальной группы фактора следует, что если $\alpha \in [0, 1]$, то среди факторов $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ (так обозначено множество элементов $\mathfrak{M}$, коммутирующих с данным проектором размерности α) найдется лишь счетное число изоморфных $\mathfrak{M}_{\alpha_0}$ с фиксированным $\alpha_0 \in (0, 1)$. Таким образом, имеется континуум попарно неизоморфных факторов типа II_1, построенных как подфакторы фактора $U(G)$, где G — дискретная группа со свойством T, например SL $(3, \mathbb{Z})$. Заметим попутно, что свойство T оказалось чрезвычайно полезным в различных вопросах теории представлений и алгебраических групп (см. коммент. к статье «К общей теории меры» в т. 1 наст. изд.).

Следует ожидать, что общая задача классификации факторов типа II_1 необозрима и новые примеры еще будут открыты.

Факторы типа II_∞ тесно примыкают к факторам типа II_1, поскольку тензорное произведение $I_\infty \otimes II_1$ дает фактор типа II_∞. Тем самым примеры, приведенные выше, могут быть использованы и для теории факторов типа II_∞. Однако вопрос о том, все ли факторы типа II_∞ можно классифицировать таким образом, оказался сложным. Например, лишь недавно (Конн [15]) доказана единственность гиперконечного фактора типа II_∞: всякий гиперконечный фактор типа II_∞ есть тензорное произведение гиперконечного фактора типа II_1 и фактора I_∞. Это следствие теории инъективных факторов (см. далее). Пример из предыдущего абзаца показывает, что существуют неизоморфные факторы $\mathfrak{M}_\alpha$ и $\mathfrak{M}_\beta$ типа II_1, для которых факторы типа II_∞ — $I_\infty \otimes \mathfrak{M}_\alpha$ и $I_\infty \otimes \mathfrak{M}_\beta$ — изоморфны. Глубокая связь факторов типа II_∞ и типа III выявлена теорией Томита— Такесаки и двойственностью Такесаки (см. далее).

Наиболее далеко по сравнению с работой фон Неймана продвинулась теория факторов типа III. Пукански [16] построил пример континуума негиперконечных факторов типа III, попарно неизоморфных между собой. Этот пример идейно примыкает к примерам факторов типа II_1 первого периода. Настоящим успехом была работа Пауэрса [17], который открыл удивительно простую серию гиперконечных факторов типа III, построенных следующим образом. Пусть $M_2\mathbb{C}$ — алгебра матриц второго порядка, а $\mathfrak{B}_2 = \bigotimes_1^\infty M_2\mathbb{C}$ — бесконечное (алгебраическое) тензорное произведение $M_2\mathbb{C}$. Если $\gamma \in (0, 1/2)$, то матрица $\rho_\gamma = \begin{Vmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1-\gamma \end{Vmatrix}$ определяет состояние (т. е. положительный нормированный линейный функционал) на $M_2\mathbb{C}$, а $\rho_\gamma^{\otimes\infty}$ — состояние на $\mathfrak{B}_2$.

Нетрудно выписать явный вид этого функционала. Оказалось, что эти состояния при $\gamma \in (0, 1/2)$ порождают представления $\mathfrak{B}_2$ в гильбертовом пространстве, слабое замыкание образа которого есть фактор типа III, и при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ эти факторы неизоморфны. При $\gamma = 0$ мы получаем фактор типа I_∞, а при $\gamma = 1/2$ — фактор типа II_1; таким образом, факторы Пауэрса образуют непрерывную деформацию, соединяющую по факторам типа III типы I и II_1. В дальнейшем выяснилось, что в этой кон-

струкции определяющим является число $\lambda = \gamma/(1-\gamma)$, а точнее, мультипликативная группа, им порожденная.

В работах Араки—Вудса [18], Конна [19], Кригера [20, 21], Вершика [22] определены различные инварианты факторов и связанных с ними объектов (траекторных разбиений, см. комментарии далее). Наиболее важный инвариант фактора $\mathfrak{A}$, изученный Конном, — $S(\mathfrak{A})$ — есть замкнутая подгруппа в мультипликативной группе R_+ с присоединенным элементом $\{0\}$. Удобно идентифицировать группу $\{\lambda^n\}$ с ее образующей $\lambda < 1$, группу R_+ с числом 1, а $S = \{0, 1\}$ с числом 0. Тогда на факторах типа III инвариант $S(\mathfrak{A})$ принимает значение из $[0, 1]$. Соответствующие факторы стали обозначать III_λ, $\lambda \in [0, 1]$. Пауэрс в [17] реализовал гиперфинитные факторы типа III_λ $0 < \lambda < 1$. Чтобы реализовать случай $S(\mathfrak{A}) = R_+$, т. е. фактор типа III_1 (это сделано впервые в [18]), можно взять алгебру $\bigotimes_1^\infty M_3\mathbb{C}$ и ее состояние $\rho^{\otimes\infty}$, где $\rho = \operatorname{diag}(a, b, c)$, $a+b+c=1$, $c > 0$, a/c, b/c порождают плотную подгруппу в R_+. Факторы типа III_0 появились впервые в работе Араки и Вудса, так же как бесконечные тензорные произведения, однако позже были построены и другие примеры. Их источником служат динамические системы (скрещенные произведения) Серия Пауэрса по существу построена по динамической системе, т. е. алгебра $\mathfrak{B}_2$ есть скрещенное произведение, порожденное действием $\sum_1^\infty \mathbb{Z}_2$ на $\prod_1^\infty \mathbb{Z}_2$, а соответствующие факторы порождены инвариантной мерой для этого действия (см. дальше). Кроме того, алгебру $\mathfrak{B}_2$ и ей подобные можно рассматривать как алгебру локальных наблюдаемых, как алгебру антикоммутационных соотношений и др. Тем самым факторы типа III_λ возникли в статистической физике, теории поля и т. д. C^*-пополнение алгебр $\mathfrak{B}_n$, $n \geqslant 2$, называют алгебрами квазилокальных наблюдаемых на решетке. Появление этих алгебр в проблемах, связанных с факторами, неслучайно. Пауэрс [17] показал, что классификация гиперконечных факторов с точностью до изоморфизма эквивалентна задаче о классификации состояний на алгебре $\mathfrak{B}_2$ (или $\mathfrak{B}_n$, $n \geqslant 2$) с точностью до алгебраической эквивалентности: два гиперконечных фактора, порожденных двумя представлениями, изоморфны тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\mathfrak{B}_2$, переводящий состояние, отвечающее одному представлению, в некоторое состояние, соответствующее второму. С другой стороны, еще из результатов «Кольца IV» можно заключить, что всякий гиперконечный фактор порожден некоторым представлением алгебры $\mathfrak{B}_2$.

Сформулируем результаты Конна [15], которые отчасти подводят итог в задаче о классификации гиперконечных факторов. Оказалось, что любые два гиперконечных фактора типа III_λ, $\lambda \in (0, 1)$, изоморфны и тем самым серия Пауэрса здесь исчерпывающая: всякий фактор типа III_0 изоморфен фактору, построенному по скрещенному произведению и состоянию типа меры (см. далее), чем их классификация сведена к задаче теории меры.

Единственный в этом круге проблем, остающийся пока без ответа вопрос: сколько существует неизоморфных гиперконечных факторов типа III_1? Возможно, что таких факторов много. Этот вопрос очень важен для приложений к классической и квантовой статистической физике.

Что касается негиперконечных факторов типа III, то примеры их можно строить аналогично примерам негиперконечных факторов типа II. Особых приложений они пока не нашли.

Упомянем еще результат Вудса [23] о невозможности эффективной классификации гиперконечных факторов типа III и Конна [24], построившего фактор, который не изоморфен своему антиизоморфному. Последний пример решает, в частности, проблему из «Кольца IV», а также показывает, что существуют алгебры фон Неймана, не являющиеся комплексификацией какой-либо вещественной C^*-алгебры. См. последующие разделы комментариев и литературу к ним.

II. ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП И АЛГЕБР. СКРЕЩЕННЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Тип I. Теория C^*- и W^*-алгебр в значительной степени унифицировала общую теорию бесконечномерных представлений групп и алгебр с инволюцией, а также алгебраические аспекты теории операторов и динамических систем. Ее роль, как мы увидим, сводится к первичной классификации представляемых объектов и выделению своих, специфических для каждого класса проблем. Все это не затрагивает специальных и более аналитических разделов теории представлений.

Мы уже упоминали (см. выше), что с помощью представлений дискретных групп были построены примеры факторов и W^*-алгебр типа II. Однако лишь к 60-м годам была полностью осознана обратная роль неймановской классификации W^*-алгебр и факторов для теории представлений групп и C^*-алгебр. Важный вклад здесь внесли работы Г. Макки, И. Сигала, Р. Маутнера, Д. Глимма, Ж. Дик мье и др. (см., например, [1]).

Основная идея состоит в том, что грубая классификация групп, топологических групп, алгебр и других объектов проводится по типу алгебр Неймана, порожденных образами тех или иных представлений групп алгебр и т. д. Объекты, у которых в любом представлении W^*-оболочки операторов представления есть W^*-алгебра типа I, называются объектами (группами, алгебрами) типа I (другие названия — «ручные», GCR, postliminaire и др.). Перечислим некоторые классы групп типа I. Разумеется, сюда относятся конечные и компактные группы, коммутативные, полупростые группы Ли над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и локальными полями (последнее доказано лишь в 1974 г. И. Бернштейном [25]), нильпотентные группы [26] и др. Возможно и дальнейшее подразделение на более специальные классы в зависимости от структуры получающихся W^*-алгебр [1]. Возникает задача описания в алгебраико-топологических терминах групп и алгебр типа I. Она легко решается для дискретных групп (см. коммент. I). Однако уже для общих групп Ли удовлетворительного ответа еще (1981 г.) нет. Например, среди разрешимых групп встречаются как группы типа I, так и не имеющие тип I. Для разрешимых групп Ли общий критерий в терминах орбит Кириллова—Костанта дан Ауслендером и Костантом [27]

В рамках общей теории вопрос о типе I получил ряд глубоких и важных переформулировок в работах Макки и Глимма. Для точной формулировки удобно использовать язык C^*-алгебр. Прежде всего группу следует заменить той или иной ее групповой алгеброй; в частности, от локально-компактных групп обычно переходят к L^1-групповым алгебрам по мере Хаара; замена группы на алгебру должна сохранять класс рассматриваемых комплексных представлений, поэтому в дальнейшем можно говорить лишь об алгебрах. По всякой алгебре с инволюцией строится ее C^*-оболочка как пополнение фактор-алгебры по радикалу по (полу)норме $|||a||| = \sup_\pi \pi(a)$, $a \in A$, где π пробегает все $*$-представления A в гильбертовом пространстве; $\|.\|$ —операторная норма в пространстве представления (радикал здесь — пересечение ядер всех $*$-представлений) Эта операция также сохраняет класс представлений, и тем самым вопрос о типе исходной группы или алгебры свелся к аналогичному вопросу для C^*-алгебр. Попутно отметим, что более общие теории представлений (неунитарные, J-унитарные, а для алгебр — не сохраняющие инволюцию, или $*$-представления в пространствах с индефинитной метрикой), равно как и более глубокий гармонический анализ на группах (например, вопрос о полной симметричности $L^1(G)$ и т. п.), не выражаются в этих терминах; столь общих и мощных методов, например, для J-представлений пока нет.

Для C^*-алгебр проблема описания алгебр типа I решается так.

Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Следующие предложения эквивалентны:

1. *A имеет тип* I.

2. *Множество $\hat{A}$ всех классов неприводимых представлений, снабженное слабой топологией, есть квазикомпактное пространство, в котором выполнена аксиома отделимости T_0 (для любых двух точек, хотя бы одна из них отделима открытой окрестностью от другой).*

3. *Множество $\hat{A}$ имеет стандартную борелевскую структуру (в той же топологии), т. е. как борелевское пространство изоморфно метрическому компакту.*

4. *Во всяком неприводимом представлении A найдется ненулевой компактный оператор.*

Свойства 2 и 3 описывают в принятой терминологии свойство пространства $\hat{A}$ иметь гладкую структуру по Макки. Использование в этих формулировках топологии пространства $\hat{A}$ является далеким обобщением двойственности локально-компактных абелевых групп. Более подробная классификация C^*-алгебр также может быть выражена в терминах топологии $\hat{A}$, например с помощью дальнейших аксиом отделимости и др. Однако тип C^*-алгебры с точностью до изоморфизма не определяется лишь топологией $\hat{A}$, нужно задать дополнительно класс расслоения над $\hat{A}$ поля C^*-алгебр. Другим адекватным языком является геометрия пространства состояний, при этом $\hat{A}$ есть его фактор-пространство [28, 29]. Определение того, будет ли конкретная алгебра (группа) иметь тип I, остается сложным вопросом: так как связано с детальным анализом представлений.

Для алгебр типа I проблемы теории представлений остаются теми же, что и для классической теории представлений, поскольку задача перечисления всех представлений (с точностью до неприводимости), т. е. гармонический анализ, и разложение на неприводимые произвольные представления остаются осмысленными и глубокими задачами. Хотя собственно гармонический анализ и синтез на группах и алгебрах, составляющие суть конкретной теории представлений, уже не затрагиваются теорией W^*-алгебр, однако и здесь некоторые постановки вопросов подсказаны этой теорией, например интенсивно развивающаяся сейчас операторная K-теория.

2. **Типы II и III.** Для групп и алгебр, не имеющих тип I — их называют «дикими» (NGCR, antiliminaire, типа II),—положение совсем иное. Известной неожиданностью оказались патологии, которые были обнаружены в 40-х годах. Они связаны со свойствами W^*-алгебр типов II и III, найденными в работах «Кольца II—IV» и позже в работе фон Неймана 1949 г. «On rings of operator. reduction theory» Несмотря на то что разложение в прямой интеграл представлений существует у любого представления сепарабельной C^*-алгебры и локально-компактной группы — это доказали независимо Колмогоров и Маутнер в середине 40-х годов (см. [30, 31]),— такое разложение может быть не единственным. Более того, для всякого фактор-представления типов II и III (т. е. представления, у которого W^*-оболочка образа операторов представления есть фактор типов II и III) существуют два разложения, у которых наборы неприводимых представлений дизъюнктны. Один из первых примеров группы типа II, иллюстрирующий эффект. был также предложен Колмогоровым — аффинная группа рациональной прямой $\left(\left\{\begin{matrix} a & b \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\},\ a \neq 0,\ b \text{ рациональны}\right)$ [30].

Из цитированной выше теоремы о типе I следует (это доказал Глимм), что если алгебра (группа) не имеет тип I, то у нее обязательно существует фактор- представление типа III (но не всегда существует фактор-представление типа II), поэтому неединственность разложения на неприводимые представления встречается у всякой алгебры и группы этого класса. Причина неединственности заключается в том, что в факторах типа II и III существуют максимальные коммутативные подалгебры, не изоморфные как подалгебры фактора, хотя и изоморфные сами по себе. Это контрастирует с привычными фактами, так как в факторах типа I изоморфные максимальные коммутативные подалгебры изоморфны как подалгебры. Наиболее интересный класс таких подалгебр — регуляр-

ные — это подалгебры, W^*-оболочка нормализатора которых есть весь фактор. Даже они пока не расклассифицированы и неизвестно, во всяком ли факторе типов II и III они существуют.

Главное обстоятельство, препятствующее построению для групп и алгебр типа II теории представлений, аналогичной классической, состоит в том, что множество $\hat{A}$ классов эквивалентных неприводимых представлений не имеет «хорошей» структуры — оно не имеет параметризации и в естественной (слабой) топологии неотделимо (в смысле T_0-аксиомы). В связи с этим сама постановка вопроса меняется: нет смысла описывать пространство неприводимых представлений—оно не параметризуется; невозможно ставить впрос о разложении приводимого представления на неприводимые, так как нет канонического разложения, и т. п. Задачи классификации, в которых множество классов эквивалентных объектов в том или ином смысле необозримо, принято называть «дикими». В рассматриваемой здесь теории эта «необозримость» имеет следующий характер: пространство классов эквивалентности содержит часть, которая есть фактор-пространство польского (т. е. сепарабельного метрического полного) пространства по такому отношению эквивалентности, у которого все классы всюду плотны; типичный пример — $\mathbb{R}/Q$. Поэтому такие группы и алгебры также называют «дикими».

Имелась точка зрения (Фелл, Макки) о том, что для таких алгебр следует описывать лишь фактор-представления (а не неприводимые), поскольку разложение на фактор-представление (так называемое центральное разложение, см. «Кольца») единственно, а классификацию проводить с точностью до квазиэквивалентности *. Однако теперь известно, что и эта задача является «дикой», так как, например, уже множество всех классов изоморфных гиперконечных факторов типа III не имеет гладкой структуры [23] (см. п. 1).

Более разумно ограничиться классификацией представлений со следом, т. е. представлениями типа II (II_1 или II_∞) и некоторыми из представлений типа I. Это есть обобщение классической задачи о нахождении характеров конечных групп или следов на алгебре. Аналогия здесь распространяется вплоть до формулы Планшереля, формул обращения и др. для групп типа I Например, в работах Гельфанда, Неймарка, Березина, Граева, Годемана, Хариш-Чандры, Пуканского и др. было постепенно выяснено, что представления полупростых групп имеют характеры быть может, как обобщенные функции на группе. Для групп типа II такая теория в ряде случаев тоже содержательна и начинает развиваться Правда, и в этом случае можно указать группы с необозримым множеством представлений со следом или, наоборот, имеющих слишком мало таковых, однако такая постановка отщепляет большой класс важных групп, для которых задача описания и классификации конечных и полуконечных характеров является «ручной» (см далее). Такова, например, группа всех финитных подстановок натурального ряда (см [32]), фигурирующая в статье «Кольца IV» (см. также п. 1) в связи с гиперконечным фактором типа II, и другие классические локально-конечные группы.

Остается добавить, что многие важные группы и алгебры являются «дикими». Таковы, например, основные бесконечномерные группы (группы токов, диффеоморфизмов и др.), локально-конечные группы; алгебры, порожденные эргодическими динамическими системами (см. далее), некоторые алгебры полугруппового происхождения. Можно предположить, что теория представлений всех этих объектов будет более избирательной и индивидуальной, чем для ручных групп и алгебр. Новый принцип отбора полезных представлений дает K-теория

3. **Гиперконечность**. Понятие гиперконечной W^*-алгебры позволяет выделить среди «диких» объектов важный подкласс. Назовем C^*-алгебру (соответственно группу) гиперконечной, если любое ее фактор-представление порождает гиперконечный фактор (W^*-гиперконечность в смысле

* Два представления квазиэквивалентны, если любые их два подпредставления имеют эквивалентные части (не дизъюнктны).

[33—35]. Поскольку фактор типа I гиперконечен, то алгебры (группы) типа I являются гиперконечными. Однако наше определение расслаивает и «дикие» алгебры (группы). Каков же запас гиперконечных групп и алгебр? Длительные усилия ряда авторов были завершены результатами Конна [15]; окончательные формулировки для групп таковы. Дискретная счетная группа гиперконечна тогда и только тогда, когда она аменабельна (об аменабельности см. коммент. к статье фон Неймана «К общей теории меры» в т. 1 наст. изд.). Далее, всякая связная сепарабельная локально-компактная группа гиперконечна. Иначе говоря, всякая локально-компактная сепарабельная группа, у которой фактор по связной компоненте единицы есть счетная аменабельная группа, гиперконечна. Гиперконечность скрещенных произведений рассмотрена в п. 4. Роль гиперконечных объектов — их можно было бы назвать «прирученными» — в том, что они допускают аппроксимацию «ручными». Хотя для группы или алгебры такого типа классификация представлений как для «диких» задач необозрима, здесь в отличие от общего случая все сводится к модельным ситуациям, изученным довольно хорошо. Например, типичной здесь является алгебра квазилокальных наблюдаемых, т. е. бесконечное тензорное произведение конечномерных матричных алгебр и локально-конечные группы (см. п. 5). Структура двойственного объекта для различных групп и алгебр этого класса по существу одинакова. С другой стороны, именно гиперконечные объекты чаще всего встречаются в приложениях и анализе.

Результаты исследований гиперконечных групп замечательным образом соединяют два направления, развивавшихся фон Нейманом совершенно независимо: гиперконечные факторы (см. «Кольца IV») и аменабельные группы («измеримые» в терминологии статьи «К общей теории меры»). Оказалось, что выдвинутая им идея аппроксимации сомкнулась с выведенной им же концепцией аменабельности.

Упомянем еще ряд близких или эквивалентных понятий, изучавшихся в связи с гиперконечностью в последние годы: ядерность, инъективность, полудискретность, равномерная гиперконечность [32, 15, 36, 37]. Каждое из них выделяет свой класс групп и алгебр; по-видимому, все они совпадают, хотя к настоящему моменту (1981 г.) работа еще не завершена.

4. **Скрещенные произведения и динамические системы.** Рассмотрим более подробно специальный класс алгебр, возникающий в теории динамических систем. Под топологической динамической системой понимается топологическое пространство и локально-компактная группа его гомоморфизмов (в эргодической теории — пространство с мерой и группа его несингулярных преобразований или в гладкой теории — гладкое многообразие и группа его диффеоморфизмов и т. д.). С алгебраической точки зрения динамическая система есть алгебра, являющаяся скрещенным произведением коммутативной алгебры функций на пространстве динамической системы (непрерывных, ограниченных измеримых, гладких и т. д.) на групповую алгебру группы, действующей на пространстве системы (действие группы индуцирует действие на алгебре функций обычным образом). Полученное скрещенное произведение можно рассматривать в смысле разных категорий (W^*-алгебр, C^*-алгебр, в чисто алгебраическом смысле и др.), при этом структура скрещенного произведения фиксируется (т. е. морфизмы алгебр в этой категории должны ее сохранять). Для пространств с мерой такая конструкция W^*-алгебр предложена фон Нейманом в статье «Кольца IV» и с тех пор была предметом внимания очень многих авторов. В категории C^*-алгебр ее рассматривали Гельфанд и Фомин [38], Зеллер-Мейер [39] и многие другие. Имеются различные обобщения, учитывающие когомологии, некоммутативную базу и т. п.

Эта конструкция сводит общую теорию топологических и гладких динамических систем к своеобразной теории представлений, где представлениям отвечают инвариантные и квазиинвариантные меры, а инвариантам динамической системы — инварианты представлений. Всякая квазиинвариантная мера порождает состояние (типа меры) на алгебре и тем самым представление скрещен-

ного произведения * Классическая спектральная теория отвечает простейшему — купмановскому — представлению, в котором изучаются лишь операторы группового действия; траекторная теория связана с неймановским представлением (см. далее). В последнее время конструкция скрещенного произведения стала специальным случаем построения C^*-(W^*)-алгебры по группоиду; исходная идея группоида (Макки и др.) состояла в том, что динамическая система может быть заменена ее траекторным разбиением (см. далее), поскольку для многих вопросов (например, для изучения соответствующей W^*-алгебры) лишь оно существенно. (Достаточно полное изложение этого подхода см. в [40—42].)

Можно провести первичную классификацию скрещенных произведений по образцу пунктов 2 и 3. Алгебры типа I отвечают тем топологическим динамическим системам, у которых любая квазиинвариантная эргодическая мера сосредоточена на одной орбите группы. Поэтому с точки зрения теории динамических систем это малоинтересный класс. Во всех нетривиальных случаях возникают скрещенные произведения, не имеющие тип I. Всякая инвариантная конечная не дискретная эргодическая мера порождает для динамической системы с дискретной группой фактор-представление типа II_1 — это представление называется неймановским (см «Кольца II»); если мера σ конечна, то представление имеет тип II_∞, наконец, если мера квазиинвариантна, по-прежнему эргодична и не дискретна и не имеет эквивалентной (конечной или бесконечной) инвариантной меры, то представление имеет тип III. Эти факты использованы в статьях «Кольца II и IV» для построения примеров факторов Более подробно см. [43].

Для каких же динамических систем в представлениях возникают лишь гиперконечные факторы? Этот вопрос после целого ряда промежуточных результатов был разрешен недавно. Именно в [44] сформулирована следующая

Теорема. *Пусть G — дискретная группа, эргодически свободно действующая с инвариантной конечной мерой μ на пространстве Лебега (X, μ). Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *G аменабельна*;

2) *разбиение на траектории пространства (X, μ) относительно действия G изоморфно разбиению на траектории одного автоморфизма*;

3) *разбиение на траектории есть предел убывающей последовательности измеримых разбиений (так называемое «ручное» разбиение)*;

4) *фактор-представление скрещенного произведения, отвечающее мере μ, есть гиперконечный фактор типа* II_1

Заметим, что для некоторых квазиинвариантных мер действие неаменабельной группы может удовлетворять условиям 2 и 3. Например, таково действие $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ на $P_1\mathbb{R}$ (см. [45, 46]). Здесь уместно упомянуть также случай действия полугрупп, например, одного эндоморфизма. Уже определение соответствующей алгебры не тривиально. Теорема о гиперконечности вытекает из того, что разбиение на траектории эндоморфизма — «ручное», это доказано в [47].

Следствием общей теоремы является такое утверждение.

Если дискретная группа G действует на метризуемом компакте X, то скрещенное произведение, построенное по этой динамической системе. есть гиперконечная алгебра (см. п. 4) *тогда и только тогда, когда G аменабельна*

Эти результаты дают также почти полное решение задачи, изучением которой начал заниматься фон Нейман, а именно тем, что называют теперь траекторной теорией динамических систем

* Можно было бы рассмотреть еще 1-коцикл динамической системы со значениями в группе унитарных операторов, и тогда соответствие (класс эквивалентных $*$-представлений скрещенного произведения) $\Leftrightarrow$ (классы эквивалентных мер и эквивалентных 1-коциклов) станет взаимно однозначным.

(фон Нейман, Дай, Рохлин, Макки, Вершик, Кригер; см. [48—52]). Дело в том, что для локально-конечных групп утверждение 4 весьма просто было доказано в статье «Кольца IV»; там же оно анонсировано для любой абелевой дискретной группы. По этому поводу в статье сказано: «Доказательство... довольно сложно. Оно использует глубокие результаты о разложении измеримых множеств...». Доказательство так и не появилось, и сейчас трудно определить, какой ход рассуждения имелся в виду. В начале 60-х годов Дай [48] доказал утверждение 4 для широкого класса групп, включая абелевы и группы полиномиального роста. Позже (хотя и независимо) Вершик [49] доказал, что утверждение 4 следует из двух фактов эргодической теории: первый из них для группы $\mathbb{Z}$ установила Белинская [50]: разбиение на траектории эргодического автоморфизма можно представить как пересечение убывающей диадической последовательности измеримых разбиений. Этот факт следует также из небольшого уточнения леммы Рохлина о периодической аппроксимации. Второе утверждение, доказанное Вершиком [49] и названное теоремой о лакунарном изоморфизме, состоит в том, что любые две эргодические диадические последовательности лакунарно изоморфны (метрически) и потому их теоретико-множественные пересечения (неизмеримые) также метрически изоморфны [53, 40]. Тем самым проблема сводится к выяснению того, когда разбиение на траектории эргодического действия группы G обладает свойством 3. Предположение о том, что класс таких (свободных) действий должен совпадать с классом аменабельных групп, высказывалось ранее [53]; имелся ряд предварительных результатов, в частности необходимость аменабельности легко выводится из условия Фельнера. Таким образом, аменабельность еще раз выступила в качестве естественного понятия, сохраняющего наиболее грубые свойства действий коммутативных групп. Обобщение на недискретные группы незначительно отличается от приведенной теоремы.

В последнее время Циммер в серии работ рассмотрел противоположный случай: действия неаменабельных и «жестких» групп. Его результаты тесно связаны с результатами Маргулиса об арифметических подгруппах. В частности, Циммер [54] доказал, что для групп $SL(n, \mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$, два траекторно эквивалентных действия алгебраически изоморфны; это означает, что в соответствующей W^*-алгебре (скрещенном произведении алгебр) имеется единственная с точностью изоморфизма структура скрещенного произведения.

5. Теория AF-алгебр. Алгебра с инволюцией над $\mathbb{C}$ называется локально-полупростой, если она представляется в виде объединения возрастающего семейства полупростых конечномерных алгебр (т. е прямых сумм полных матричных алгебр над $\mathbb{C}$). Примеры: алгебры локальных наблюдаемых на решетке, групповая алгебра локально-конечных групп, алгебра антикоммутационных соотношений и др. C^*-оболочка локально-полупростой алгебры называется AF-алгеброй (approximately finite) [54—57]. Эти алгебры естественно возникают при индуктивном построении теории представлений классических групп. Сравнительно простое утверждение состоит в том, что они изоморфны скрещенным произведениям коммутативной C^*-алгебры (алгебры Гельфанда—Цетлина) на некоторую группу ее автоморфизмов; такой изоморфизм каноничен, если фиксировать определенным образом аппроксимацию алгебры AF возрастающей цепочкой конечномерных подалгебр. Теория этих алгебр обобщает и дополняет теорию гиперконечных факторов; она по ряду причин стала предметом внимания специалистов. Здесь мы обратим внимание лишь на ее связь с обобщенным понятием размерности. По аналогии с размерностью в непрерывных факторах (см. «Кольца I—IV») можно в любой C^*-алгебре A определить эквивалентность самосопряженных проекторов следующим образом: $p \sim q$, если существует элемент $v \in A$, $v^*v = p$, $vv^* = q$; удобно считать алгебру A унитарной. На классах эквивалентности проекторов имеется операция прямой суммы ортогональных проекторов, позволяющая образовать абелеву полугруппу, которая обычным образом погружается в абелеву группу $\mathrm{Dim}\, A$. Эта группа называется группой размерности C^*-алгебры A и имеет структуру порядка, которая определяется полугруппой, порожденной классами проекторов, кроме то-

го, в группе Dim A выделена порядковая единица, отвечающая классу единицы алгебры A. Легко узнать в этой конструкции первые этапы построения следа в факторах.

Доказан ряд замечательных свойств группы размерности AF-алгебр [58—60]. Прежде всего, имеется абстрактное описание упорядоченных групп, возникающих как группы размерности для AF-алгебр, так называемые упорядоченные группы Риса. Их аксиоматика проста: это счетные абелевы группы G, в которых порядок определяется порождающей полугруппой p, не содержащей ненулевых подгрупп и обладающей свойством «$na \in p$ влечет $a \in p$» и свойством Риса («почти структура»): если $a_i < ; < b_j$, $j,i = 1, 2$, то существует такое $c \in G$, что $a_i < c < b_j$, $i, j = 1,2$.

Другое важное свойство состоит в том, что группа Dim A как упорядоченная абелева группа канонически изоморфна группе Гротендика $K_0(A)$ (т. е. группе классов виртуальных проективных конечно-порожденных A-модулей с полугруппой истинных модулей в качестве порядковой полугруппы). Это обстоятельство проясняет связи теории C^*-алгебр и K-теории, в частности различных обобщений теории индекса (см. п. 4); оно становится понятным, если вспомнить, что теория $K_0(A)$-функтора, так же как и неймановская теория размерности, возникла из обобщения понятия обычной размерности (проектора или модуля).

Наконец, наиболее замечательное обстоятельство, выделяющее класс AF-алгебр, состоит в том, что группа размерности AF-алгебры — Dim A — как упорядоченная группа с порядковой единицей есть полный инвариант $*$-изоморфизма, а без фиксации единицы (т. е. $K_0(A)$) есть полный инвариант стабильного $*$-изоморфизма. Эти факты позволили ответить на ряд проблем теории C^*-алгебр, построить новые примеры алгебр и т. д. Отметим, что многие полезные алгебры либо являются AF-алгебрами, либо могут быть погружены в AF-алгебру. Например, C^*-алгебра, порожденная двумя унитарными операторами U и V с коммутационным соотношением $UVU^{-1}V^{-1} = e^{2\pi i\alpha} I$, где α—иррациональное число, может быть погружена в AF-алгебру [61, 62]; это означает, что операторы U и V в операторной норме могут быть сколь угодно точно аппроксимированы операторами $U^{(\varepsilon)}$, $V^{(\varepsilon)}$, образующими конечномерную алгебру. Упомянем, что в книге фон Неймана о квантовой механике содержится рассуждение о слабой аппроксимации этих операторов. Более общий результат [62] показывает, что C^*-алгебра, являющаяся скрещенным произведением коммутативной C^*-алгебры на циклическую группу ее автоморфизмов, также может быть погружена в AF-алгебру. Предыдущий пример есть фактически скрещенное произведение, порожденное поворотом окружности.

По терминологии п. 2 AF-алгебра относится, как правило, к «типу II», поскольку во всех интересных случаях у них имеются фактор-представления типа II_1. Однако по самому определению AF-алгебры и их подалгебры гиперконечны в смысле п. 3. Поскольку, как было отмечено, AF-алгебры изоморфны скрещенным произведениям, то к ним относится сказанное в п. 4, в частности упомянутая там общая форма описания представлений. Именно для AF-алгебр понимание теории представлений как теории характеров (следов) оказалось очень продуктивным. Относительно изученные нетривиальные примеры — групповые алгебры групп $\mathfrak{S}_\infty$, т. е. финитных подстановок, и $U(\infty)$, т. е. бесконечной унитарной [63—66]. Описание характеров сводится фактически к нахождению инвариантных мер и проводится аналогичными методами. Оно обнаруживает многочисленные связи с задачами статистической физики, асимптотической комбинаторики и т. п. С другой стороны, характеры AF-алгебр являются аддитивными вещественными характерами, заданными на K_0-функторе; при этом значение характера на классе проекторов есть в точности его размерность, по фон Нейману, относительно следа в соответствующем конечном или полуконечном факторе.

III. ТЕОРИЯ ТОМИТА—ТАКЕСАКИ—КОННА

Ниже дается краткое изложение одной из распространенных в современной теории W^*-алгебр концепции, называемой теорией Томита—Такесаки. Прежде всего приведем удобное для дальнейшего определение W^*-алгебры.

Определение. *W^*-алгеброй называется такая C^*-алгебра $\mathfrak{M}$, которая как банахово пространство изоморфна сопряженному к некоторому банахову пространству $\mathfrak{M}_*$, называемому преддвойственным пространством $\mathfrak{M}$.*

Иными словами, $\mathfrak{M}$ — это банахово пространство, в котором имеется структура инволютивной алгебры над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, причем:

1) *алгебраические операции и инволюция * непрерывны в топологии нормы;*
2) $\|A^*\| = \|A\|$ *для всех* $A \in \mathfrak{M}$;
3) $\|A\|^2 = \|A^*A\|$ *для всех* $A \in \mathfrak{M}$ *(аксиома C^*-алгебр);*
4) $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_*)^*$.

Примеры. 1. Коммутативная W^*-алгебра $L^\infty(K, \mu)$, где (K, μ) — пространство с мерой. В этом случае $\mathfrak{M}_* = L^1(K, \mu)$.

2. Алгебра $B(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве с обычной нормой и переходом к сопряженному оператору в качестве инволюции. Здесь $\mathfrak{M}_* = J_1(\mathfrak{H})$ — пространство всех ядерных операторов в $\mathfrak{H}$.

3. Если $\mathfrak{M}$ — фактор, то в качестве $\mathfrak{M}_*$ можно взять пространство линейных непрерывных в слабой операторной топологии функционалов на $\mathfrak{M}$

С помощью $\mathfrak{M}_*$ в $\mathfrak{M}$ можно задать абстрактный аналог слабой операторной топологии — *-слабую, или $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_*)$-топологию с базисом окрестностей нуля

$$U(f, \varepsilon) = \{A \in \mathfrak{M} : |f(A)| < \varepsilon\}$$

для фиксированных $f \in \mathfrak{M}_*$ и $\varepsilon > 0$.

Обратно, задание этой топологии на W^*-алгебре позволяет однозначно с точностью до изоморфизма восстановить $\mathfrak{M}_*$, полагая в качестве $\mathfrak{M}_*$ множество всех функционалов из $\mathfrak{M}^*$, непрерывных в упомянутой топологии. Функционалы из $\mathfrak{M}_*$ называют нормальными.

Для факторов типа II_∞ и III приходится рассматривать обобщенные функционалы — веса, являющиеся, по сути дела, неограниченным линейным функционалом (см. «Кольца III»).

Пусть $\mathfrak{M}_+ = \{A \in \mathfrak{M} : \exists B \in \mathfrak{M},\ A = B^*B\}$ — положительная часть $\mathfrak{M}$.

Определение. *Весом на W^*-алгебре $\mathfrak{M}$ называется однородная аддитивная функция $\omega : \mathfrak{M}_+ \to [0, \infty]$.*

Вес ω называется точным, если для любого $A \in \mathfrak{M}_+$ из $\omega(A) = 0$ следует $A = 0$.

Вес ω называется нормальным, если существует семейство положительных нормальных функционалов $\omega_\alpha \in \mathfrak{M}_*$, для которого при всех $A \in \mathfrak{M}_+$

$$\omega(A) = \sup_\alpha \omega_\alpha(A)$$

Вес ω называется конечным, если $\omega(A) < \infty$ для всех $A \in \mathfrak{M}_+$. В этом случае $\omega \in \mathfrak{M}_*$. Вес ω полуконечен, если для любого $A \in \mathfrak{M}_+$ найдется $B \in \mathfrak{M}_+$, для которого $\omega(B) < \infty$ и $B \leqslant A$, т. е. $A - B \in \mathfrak{M}_+$.

Вес ω называется следом, если $\omega(AB) = \omega(BA)$ для $A, B \in \mathfrak{M}_+$.

Продолжение веса ω до линейного (неограниченного) функционала на $\mathfrak{M}$ будем обозначать также через ω.

Обобщая конструкцию фон Неймана (см. «Кольца III») на общий случай, мы получим так называемую конструкцию Гельфанда—Наймарка—Сигала (ГНС-конструкцию).

Пусть ω — точный нормальный полуконечный вес (такой вес существует на любой W^*-алгебре) на $\mathfrak{M}$. Положим $L_\omega = \{A \in \mathfrak{M} : \omega(A^*A) < \infty\}$ — это левый идеал в $\mathfrak{M}$. Введем в L_ω скалярное произведение, полагая для $A, B \in L_\omega$

$$\langle A, B \rangle = \omega(A^*B),$$

и пополним L_ω в полученной норме. Вложение L_ω в полученное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ обозначим через η. Левым регулярным представлением $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$ называется представление π, заданное на $\eta(L_\omega)$ формулой (для $A \in \mathfrak{M}$, $B \in L_\omega$)

$$\pi(A)\eta(B) = \eta(AB).$$

Теорема. *Представление π есть точный нормальный изоморфизм $\mathfrak{M}$ на $\pi(\mathfrak{M})$.*

В дальнейшем будем отождествлять $\mathfrak{M}$ и $\pi(\mathfrak{M})$. В коммутанте $\mathfrak{M}' = (\pi(\mathfrak{M}))'$ можно выделить левый идеал L'_ω и построить линейное отображение $\eta : L'_\omega \to \mathfrak{H}$ с плотным в $\mathfrak{H}$ образом, для которого $A'\eta(B') = \eta(A'B')$ при всех $A' \in \mathfrak{M}'$, $B' \in L'_\omega$. При этом для $A \in L_\omega$, $A' \in L'_\omega$

$$A\eta(A') = A'\eta(A).$$

Изложим кратко основные факты теории Томита — Такесаки. Сначала определим в $\mathfrak{H}$ два $\mathbb{R}$-линейных ($\mathbb{C}$-антилинейных) оператора S_0 и F_0: для $A \in L_\omega$, $A' \in L'_\omega$ положим

$$S_0(\eta(A)) = \eta(A^*), \qquad F_0(\eta(A')) = \eta((A')^*).$$

Теорема *Антилинейные операторы S_0 и F_0 допускают замыкание в $\eta(L_\omega)$ и $\eta(L'_\omega)$. Обозначим их через $S = \overline{S}_0$ и $F = \overline{F}_0$.*

Если ω — след, то оператор S оказывается антиунитарным

$$\| S(h) \|_{\mathfrak{H}} = \| h \|_{\mathfrak{H}}$$

для всех $h \in \mathfrak{H}$. При этом внутренний автоморфизм алгебры $B(\mathfrak{H})$, порожденный $S : A \to SAS$ ($S^2 = 1$), переводит $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$. Действительно, для $A, B \in \mathfrak{M}$, $C \in L_\omega$ имеем $SASB\eta(C) = SAS\eta(BC) = SA\eta(C^*B^*) = S\eta(AC^*B^*) = \eta(BCA^*) = B\eta(CA^*) = BS\eta(AC^*) = BSA\eta(C^*) = BSAS\eta(C)$, т. е. $S\mathfrak{M}S \subset \mathfrak{M}'$. Можно доказать, что в этом случае $S\mathfrak{M}S = \mathfrak{M}'$. В общем случае S не сохраняет норму в $\mathfrak{H}$ и отличается от антиунитарного оператора на некоторый самосопряженный множитель, обозначаемый $\Delta^{1/2}$.

$$S = J\Delta^{1/2},$$

где J — антиунитарный оператор, а Δ — положительно определенный самосопряженный ($\mathbb{C}$-линейный) оператор. Оператор J называется модулярным сопряжением, а Δ — модулярным оператором.

Теория Томита—Такесаки устанавливает связь между S, F, J, Δ и структурой $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$.

Теорема. *Имеют место такие соотношения между S, F, J и Δ: $S^* = F$, $F^* = S$, $SF = \Delta^{-1}$, $FS = \Delta$, $J^2 = 1$, $\Delta^{-1/2} = J\Delta^{-1/2}J$, $F = \Delta^{1/2}J$, $S = J\Delta^{1/2}$. Если ω — след, то $\Delta = 1$, $S = J$.*

Если к тому же представление π допускает бициклический (т. е. циклический для $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$) вектор Ω, то можно считать, что $\eta(A) = A\Omega$, $\eta(A') = A'\Omega$, при этом

$$\eta(L_\omega) = \pi(L_\omega)\Omega = \eta(L'_\omega) = \mathfrak{M}\Omega = \mathfrak{M}'\Omega.$$

В общем случае это соотношение должно включать резольвенту оператора Δ. для любого $A' \in \mathfrak{M}'$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ существует единственный оператор $A_\lambda \in \mathfrak{M}$, для которого

$$A_\lambda\Omega = (\Delta + \lambda)^{-1}A'\Omega$$

Следующая теорема является основным утверждением.

Теорема. *Для любого точного нормального полуконечного веса имеют место соотношения (во введенных обозначениях)*

$$J\mathfrak{M}J = \mathfrak{M}', \qquad \Delta^{it}\mathfrak{M}\Delta^{-it} = \mathfrak{M}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом, $\mathfrak{M}$ антиизоморфно $\mathfrak{M}'$, а Δ порождает группу автоморфизмов в $\mathfrak{M}$.

Определение. *В условиях и обозначениях предыдущей теоремы обозначим через* $\sigma_t^\omega \in \in \operatorname{Aut} \mathfrak{M}$ *группу автоморфизмов* $\mathfrak{M}$, *определенную равенством*

$$\pi(\sigma_t^\omega A) = \Delta^{it}\pi(A)\,\Delta^{-it}.$$

Эта однопараметрическая группа называется группой модулярных автоморфизмов $\mathfrak{M}$, *ассоциированной с весом* ω.

Первоначальное доказательство этих фактов (см. [67]) основано на теории гильбертовых алгебр Позже оно было упрощено. Важность этой группы обусловливается, в частности, ее связью с известными условиями Кубо—Мартина—Швингера (КМШ, см. [3, 5]).

Определение. *Точное нормальное состояние* φ *на алгебре фон Неймана* $\mathfrak{M}$ *удовлетворяет условию КМШ относительно однопараметрической группы* $\sigma_t : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, *если существует аналитическая в полосе* $\operatorname{Im} z \in]0, 1[$ *и непрерывная в ее замыкании аналитическая функция* f, *для которой*

$$f(t) = \varphi(\sigma_t(A)\,B), \qquad f(t+i) = \varphi(B\sigma_t(A)).$$

В исходном определении группа σ_t предполагалась непрерывной в нормированной топологии нормы. Если, однако, несколько ослабить это требование, считая, что σ_t сильно непрерывна, то оказывается, что σ_t совпадает с группой модулярных автоморфизмов.

Именно, если φ — точное нормальное состояние на алгебре Неймана $\mathfrak{M}$, то ГНС-конструкция приводит к представлению π в пространстве $\overline{\eta(L_\varphi)} = \mathfrak{H}$, допускающему бициклический вектор $\Omega = \eta(1)$. Тогда, полагая $\sigma_t = \sigma_t^\varphi$, мы получим однопараметрическую группу $*$-автоморфизмов $\mathfrak{M}$, относительно которой для φ выполнены КМШ-условия с $f(z) = \varphi(\sigma_t(A)\,B) = \langle\Delta^{it}\pi(A) \times \times \Delta^{-it}\pi(B)\,\Omega, \Omega\rangle$.

Группа автоморфизмов, по отношению к которой данное состояние удовлетворяет КМШ-условиям, единственна.

Теорема. *Если на алгебре Неймана* $\mathfrak{M}$ *задана однопараметрическая группа* $*$*-автоморфизмов* σ_t *и точное нормальное состояние* φ *удовлетворяет условиям КМШ относительно* σ_t, *то* $\sigma_t = = \sigma_t^\varphi$.

Это обстоятельство делает модулярный оператор важным для квантовой статистики и теории поля, где динамика, определяющая автоморфизмы алгебры наблюдаемых $\mathfrak{M}$, и равновесное состояние на $\mathfrak{M}$ связаны условиями КМШ

Другое важное приложение теория Томита—Такесаки получила в последнее время в связи с проблемой классификации факторов, в частности наиболее трудной (и интересной) ее части — классификации факторов типа III

Оказывается с помощью группы модулярных автоморфизмов можно придать точный смысл интуитивному представлению о том, что фактор типа III —это фактор типа II_∞, «испорченный» оператором, не сохраняющим размерность.

Для описания этого соответствия введем следующее

Определение. *Пусть* $\mathfrak{M}$*—алгебра Неймана,* G *— локально-компактная топологическая группа,* α*— слабо непрерывное представление* G *в группе* $*$*-автоморфизмов* $\mathfrak{M}$. *Фиксируем точное представление* $\mathfrak{M}$ *в пространстве* $\mathfrak{H}$ *Тогда скрещенным произведением* $\mathfrak{M} \otimes_\alpha G$ *называется* W^**-алгебра, порожденная в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H} \otimes L^2(G, dg)$ *(где* dg *— мера Хаара на* G*)*

операторами вида $\pi_0(A)$ *и* $\lambda(g)$, $A \in \mathfrak{M}$, $g \in G$, *где для* $f \in \mathfrak{H} \otimes L^2(G, dg) \approx L^2(G, \mathfrak{H})$

$$(\pi_0(A) f)(h) = (\alpha(h^{-1})(A)) f(h),$$

$$(\lambda(g) f)(h) = f(g^{-1}h), \qquad (h \in G).$$

При этом π_0 — представление $\mathfrak{M}$ в $L^2(G, \mathfrak{H})$, λ — унитарное представление G в $L^2(G, \mathfrak{H})$ и они связаны между собой тождеством

$$\lambda(g)\,\pi_0(A)\,\lambda(g^{-1}) = \pi_0(\alpha(g)(A))$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — гиперконечный фактор типа III. Выберем на $\mathfrak{M}$ точный полуконечный нормальный вес ω и построим по нему группу модулярных автоморфизмов σ^{ω}. Используя конструкцию скрещенного произведения, построим W^*-алгебру $\hat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \otimes_{\sigma^{\omega}} \mathbb{R}$

Присоединив таким образом группу модулярных автоморфизмов к алгебре $\mathfrak{M}$, мы превратим ее в группу вещественных автоморфизмов. Но известно, что если группа модулярных автоморфизмов в алгебре действует как внутреннее сопряжение, то алгебра полуконечна (т. е. на ней существует точный нормальный полуконечный след). Иначе говоря, $\hat{\mathfrak{M}}$ изоморфна прямому интегралу факторов типа II. Кроме того, $\hat{\mathfrak{M}}$ (с точностью до изоморфизма) не зависит от выбора ω.

Замечательный факт заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а (двойственность Конна—Такесаки). *Определим на* $\hat{\mathfrak{M}}$ *действие двойственной группы* $\hat{\sigma}_t$ *по правилу* $\hat{\sigma}_t = \mathrm{Ad}\, U_t$, *где* U_t — *унитарные операторы в* $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{M})$, *заданные на функциях* $f(x)$ *формулой*

$$(U_t f)(x) = e^{itx} f(x).$$

(*Иначе говоря,* $\hat{\sigma}_t M = e^{itx} M e^{-itx}$ *для* $M \in \hat{\mathfrak{M}}$.) *Тогда*

$$\hat{\mathfrak{M}} \otimes_{\hat{\sigma}_t} \mathbb{R} = \hat{\hat{\mathfrak{M}}} \approx \mathfrak{M}.$$

Последняя эквивалентность объясняется тем, что $\hat{\hat{\mathfrak{M}}} = \mathfrak{M} \otimes B(\mathfrak{H})$, ибо $\mathfrak{M}$ — фактор типа III, и $\mathfrak{M} \otimes I_\infty \approx \mathfrak{M}$.

Таким образом, классификация факторов типа III сводится к классифкации полуконечных алгебр и их автоморфизмов. Классификация Конна использует действие $\hat{\sigma}_t$ на $\hat{\mathfrak{M}}$, точнее говоря, ограничение его на центр $\hat{\mathfrak{M}}$ — коммутативную алгебру $Z(\hat{\mathfrak{M}})$. Здесь выделяются три случая:

1) действие $\hat{\sigma}_t$ на $Z(\hat{\mathfrak{M}})$ тривиально, в этом случае $\mathfrak{M}$ принадлежит типу III_1;

2) действие $\hat{\sigma}_t$ на $Z(\mathfrak{M})$ имеет период T, в этом случае $\mathfrak{M}$ принадлежит типу III_λ с $\lambda = e^T$;

3) действие $\hat{\sigma}_t$ на $Z(\hat{\mathfrak{M}})$ непериодично, в этом случае $\mathfrak{M}$ принадлежит типу III_0.

При этом гиперконечные факторы типа III изоморфны тогда и только тогда, когда действия $\hat{\sigma}_t$ на $Z(\hat{\mathfrak{M}})$ в определенном смысле эквивалентны

Эти же три типа факторов можно описать непосредственно в терминах модулярной группы σ_t^{ω}.

Определение. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— фактор; положим* $S(\mathfrak{M}) = \bigcap_{\omega} \operatorname{Spec} \Delta_\omega$, *где* ω *— пробегает множество всех нормальных полуконечных весов на* $\mathfrak{M}$, *a* $\operatorname{Spec} \Delta_\omega$ *— спектр самосопряженного модулярного оператора* Δ_ω, *соответствующего весу* ω.

Теорема. $S(\mathfrak{M})\setminus\{0\}$ *образует мультипликативную группу в* $\mathbb{R}_+$. *Отсюда следует, что, так как* $S(\mathfrak{M})$ *замкнуто в* $\mathbb{R}_+$, *оно может равняться одному из четырех множеств, соответствующих четырем типам факторов:*

1) $\{1, 0\} \Leftrightarrow \mathfrak{M}$ *типа* III_0;
2) $[0, \infty[\Leftrightarrow \mathfrak{M}$ *типа* III_1;
3) $\{0\} \cup \{\lambda^n\}, \lambda \in]0, 1[, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathfrak{M}$ *типа* III_λ;
4) $\{1\} \Leftrightarrow \mathfrak{M}$ *типа* II.

Дальнейшие исследования показали, что (с точностью до изоморфизма) существует бесконечно много разных факторов типа III_0, ровно один фактор типа III_λ для любого $\lambda \in]0,1[$ и по крайней мере один фактор типа III_1 (см. п. 1 приложения).

IV. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФАКТОРОВ

Теории факторов и алгебр Неймана являются естественным и удобным языком для описания различных математических и физических объектов, возникающих в результате предельных переходов типа термодинамического предельного перехода. В квантовой статистической физике такими объ ктами являются алгебра квазилокальных наблюдаемых, предельные состояния на ней и алгебры операторов, появляющиеся в представлении Гельфанда—Наймарка—Сигала относительно этих предельных состояний. В теории индекса эллиптических операторов роль таких объектов играют операторы с почти периодическими коэффициентами, которые удобно строить, используя периодические аппроксимации и устремляя затем длину периода к ∞; в результате такой процедуры реализуется предельный переход, напоминающий термодинамический предельный переход в статистической физике.

Рассмотрим вначале модели квантовой статистической физики. Их удобно разделить на два класса 1) решетчатые, или спиновые; 2) непрерывные. Основными объектами для моделей обоих классов являются C^*-алгебра $\mathfrak{U}$ квазилокальных наблюдаемых, состояние $\omega = \omega(A)$ на этой алгебре и группа $*$- автоморфизмов $\varphi_t: A \to A_t$ алгебры $\mathfrak{U}$, описывающая временную динамику системы и сохраняющая состояние ω:

$$\omega(A_t) = \omega(A). \tag{1}$$

Эти объекты строятся с помощью термодинамического предельного перехода $V \to \infty$ по C^*-алгебре $\mathfrak{U}_V$ локальных наблюдаемых в конечном объеме V, состоянию $\omega_V(A) = \operatorname{Tr}(A \exp(-\beta H_V)) / \operatorname{Tr}(\exp(-\beta H_V))$ и группе автоморфизмов $\varphi_{t,V}: A \to \exp(itH_V) A \exp(-itH_V)$. Здесь H_V есть самосопряженный, вообще говоря неограниченный, оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_V$ состояний системы в объеме V; $\mathfrak{U}_V$ — алгебра ограниченных операторов в $\mathcal{H}_V$; β — физический параметр (обратная температура), $\beta = (kT)^{-1}$, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Различие моделей указанных выше двух классов проявляется при построении пространства состояний $\mathcal{H}_V$. Для решетчатых квантовых моделей задается некоторая решетка Γ в $\mathbb{R}^\nu$, например $\Gamma = \mathbb{Z}^\nu$, множество $V \subset \Gamma$ есть конечное подмножество Γ и $\mathcal{H}_V = \bigotimes_{i \in V} \mathcal{H}_{0,i}$, где $\mathcal{H}_{0,i} \cong \mathcal{H}_0$ есть гильбертово (как правило, евклидово) пространство состояний одной частицы (спина). В случае непрерывных моделей $V \subset \mathbb{R}^\nu$ есть ограниченное множество в $\mathbb{R}^\nu$ и $\mathcal{H}_V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{n,V}$, где $\mathcal{H}_{n,V}$ — симметризованное тензорное произведение $\mathcal{H}_{n,V} = S \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}_V^0$.

состояний $\mathscr{H}_V^0$ одной частицы для моделей, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, и антисимметризованное тензорное произведение $\mathscr{H}_{n,V} = A \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_V^0$ для моделей, подчиняющихся статистике Ферми—Дирака. Для редко встречающихся в приложениях моделей, подчиняющихся статистике Максвелла — Больцмана, $\mathscr{H}_{n,V} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{H}_V^0$ есть обычное тензорное произведение (подробное описание пространств состояний решетчатых и непрерывных квантовых систем см., например, в [68]).

Предельное состояние ω, соответствующее обратной температуре $\beta \gg 0$, выделяется из множества всех состояний на $\mathfrak{A}$ условием Кубо—Мартина—Швингера (КМШ)

$$\omega(A_t B)\,|_{t=t_0-i\beta} = \omega(BA_t)\,|_{t=t_0} \tag{2}$$

для любых $A, B \in \mathfrak{A}$ и $t_0 \in \mathbb{R}$. Здесь предполагается, что функция $\omega(A_t B)$ (соответственно $\omega(BA_t)$) может быть аналитически продолжена по t в полосу $0 \gg \operatorname{Im} t \gg -\beta$ (соответственно $\beta \gg \operatorname{Im} t \gg 0$) до функции, аналитической внутри полосы и ограниченной и непрерывной в ее замыкании. При этом справедливо граничное условие (2).

Кроме условий (1), (2) (заметим, что (1) следует из (2)), обычно предполагают, что

$$\omega(A^* A) = 0 \Rightarrow A = 0. \tag{3}$$

Последнее соотношение всегда выполнено для КМШ-состояний на простых C^*-алгебрах, т. е. таких, которые не содержат нетривиальных двусторонних $*$-идеалов. В работе [69] показано, что C^*-алгебра канонических коммутационных соотношений проста.

Кроме того, простыми являются также C^*-алгебра квазилокальных наблюдаемых для квантовых спиновых систем и C^*-алгебра канонических антикоммутационных соотношений; оба этих факта легко следуют из простоты полных матричных алгебр.

Для решетчатых квантовых спиновых моделей с быстро убывающим потенциалом существование предельной динамики $\varphi_t = \lim\limits_{V\to\infty} \varphi_{t,V}$ было доказано в работе Робинсона [70]. Существование КМШ-состояний для таких моделей следует из общих соображений компактности (см. [68]).

Рассмотрим циклическое представление R алгебры $\mathfrak{A}$ квазилокальных наблюдаемых, которое строится по состоянию ω с помощью конструкции Гельфанда—Наймарка—Сигала (ГНС) (см., например, [5]). Обозначим через $\mathscr{H}$ пространство представления, через Ω — циклический вектор представления, задающий состояние ω:

$$\omega(A) = (\Omega, R(A)\,\Omega),$$

и через M алгебру Неймана, порожденную $R(\mathfrak{A})$, $M = R(\mathfrak{A})''$.

Алгебра M обладает очень важным свойством, связанным с конструкцией ГНС. А именно, ее коммутант M' может быть явно описан через саму алгебру M. Более точно, как показано в [71], из условий (1)—(3) следует, что существуют антиунитарный оператор J, $J^2 = 1$, и группа унитарных операторов $\{U_t\}$, такие, что:

1) $JMJ = M'$, $J\Omega = \Omega$;

2) $\varphi_t A = U_t A U_t^{-1}$, $U_t \Omega = \Omega$;

3) $[U_t, J] = 0$.

Этих свойств оказывается достаточно для описания типа алгебры M. Рассмотрим вначале случай, когда КМШ-состояние единственно. В этом случае вектор Ω является единственным инвари-

антным вектором группы операторов U_t [72, 73] и алгебра M есть фактор (см., например, [74]). Этот фактор, как было доказано Гугенгольцем [75], имеет тип III, за исключением случая $\beta = 0$, когда само состояние ω определяет след на алгебре M и M является фактором типа II_1. Отметим, что этот результат включает в себя ряд конкретных примеров, рассматривавшихся ранее. Укажем среди них на модель свободного бозе-газа, изучавшуюся в работах [76, 77; и др.], и на модель свободной квантовой спиновой системы во внешнем поле (см. [17]). Последнюю модель можно трактовать так же, как свободную решетчатую квантовую спиновую систему с двумя состояниями в каждой точке, причем первое состояние занято с вероятностью p и второе — с вероятностью $q = 1 - p$. Ввиду симметрии p и q можно предполагать, что $0 \leqslant p \leqslant 1/2$. Возникающий в такой системе фактор M имеет тип I_∞ при $p = 0$, тип III при $0 < p < 1/2$ и тип II_1 при $p = 1/2$. В работе Пауэрса (см. [17]) показано, что все факторы (типа III) с $0 < p < 1/2$ неизоморфны. Инвариант, различающий эти факторы,— спектр Араки—Конна. Для факторов типа III спектр Араки—Конна $S(M)$ может быть множеством одного из следующих трех видов:

1) $S(M) = [0, \infty)$;
2) $S(M) = \{0\} \cup \{\lambda^n \colon n \in \mathbb{Z}\}$, $0 < \lambda < 1$;
3) $S(M) = \{0, 1\}$

(см. [19]). В соответствии с этими случаями фактор типа III классифицируется как фактор типа III_1, III_λ, $0 < \lambda < 1$, или III_0.

Отмеченные выше факторы Пауэрса, соответствующие свободным квантовым спиновым системам, имеют тип $\mathrm{III}_{p/q}$, где p — вероятностный параметр таких систем, $q = 1 - p$. Здесь уместно заметить, что все факторы, строящиеся с помощью ГНС-конструкции для квантовых спиновых систем, гиперфинитны. В работе Конна [78] доказано, что для каждого λ, $0 < \lambda < 1$, существует единственный (с точностью до алгебраического изоморфизма) гиперфинитный фактор типа III_λ, т. е. факторы Пауэрса дают все такие факторы.

По-видимому (в настоящее время это не доказано), пример Пауэрса является нетипичным для квантовых спиновых систем со взаимодействием. А именно, для таких систем (с нетривиальным взаимодействием) всегда следует ожидать появления факторов типа III_1. Дело в том, что в свободной квантовой спиновой системе спектр одночастичных состояний является дискретным, что и приводит к появлению дискретных факторов типа III_λ, $0 < \lambda < 1$. Для квантовых систем с нетривиальным взаимодействием спектр одночастичных состояний должен быть согласно общим физическим представлениям непрерывным, что и соответствует факторам непрерывного типа III_1.

Пример гиперфинитного фактора типа III_1 был впервые построен в работе Араки, Вудса (см. [18]). В настоящее время предполагается (см. [5]), что этот фактор является единственным гиперфинитным фактором типа III_1. Если это действительно так, то в соответствии со сказанным выше следует ожидать, что все факторы ГНС-конструкции для квантовых спиновых систем с нетривиальным взаимодействием изоморфны между собой.

В работе Такесаки [79] доказано, что КМШ-состояния ω_1, ω_2, отвечающие одному и тому же (нетривиальному) взаимодействию, но разным значениям температуры, дизъюнктны. Последнее означает, что если R_1 и R_2 — ГНС-представления алгебры квазилокальных наблюдаемых, строящиеся по состояниям ω_1, ω_2, то соответствие $R_1(A) \leftrightarrow R_2(A)$ не может быть продолжено до изоморфизма алгебр $R_1(\mathfrak{U})''$, $R_2(\mathfrak{U})''$. Отметим, что свойство дизъюнктности состояний есть некоммутативный аналог понятия взаимной сингулярности мер и результат Такесаки можно поэтому интерпретировать как доказательство взаимной сингулярности предельных гиббсовских мер для разных значений температуры.

Мы уже отмечали, что свойство алгебры $M = R(\mathfrak{U})''$ быть или не быть фактором связано с единственностью или неединственностью КМШ-состояний. Для одномерных решетчатых квантовых спиновых систем с финитным взаимодействием теорема единственности была доказана в работе Ара-

ки [80] (см. также [81]) во всем интервале температур $0 < T < \infty$. Позже этот результат был обобщен Араки на нефинитные быстроубывающие потенциалы [82]. Для многомерных квантовых спиновых систем с финитным взаимодействием единственность КМШ-состояния доказана в высокотемпературной области ($T \gg 1$).

В случае неединственности КМШ-состояния каждое такое состояние ω может быть (единственным образом) разложено по крайним состояниям:

$$\omega(A) = \int d\mu(\Phi)\, \Phi(A),$$

где $d\mu(\Phi)$ — центральная положительная мера Радона. Крайние состояния $\Psi(A)$ также являются КМШ-состояниями, они эргодичны относительно группы пространственных сдвигов, и строящиеся по ним алгебры Неймана являются факторами (см., например, [68, 5, 71 и др.]).

С физической точки зрения неединственность КМШ-состояния означает сосуществование нескольких чистых фаз. Чистые фазы реализуются на крайних состояниях. Изучение областей неединственности является существенно более трудной, хотя, видимо, и физически более интересной задачей. Из имеющихся здесь результатов следует отметить несколько точно решаемых моделей: конденсация в свободном бозе-газе, модель сверхпроводимости Бардина—Купера—Шриффера (БКШ) и некоторые другие (см. [68, 76 и др.])

Далее, в работах Жинибра, Малышева, Пирогова и др. [83, 84] неединственность (в низкотемпературной области) была доказана для целого класса сильно анизотропных квантовых систем, являющихся малым возмущением классических спиновых систем.

Отметим еще статью Дайсона [85], где доказывается результат, из которого можно вывести неединственность КМШ-состояния в низкотемпературной области для так называемых квантовых иерархических моделей. Особенностью иерархических моделей является тот факт, что они инварианты относительно некоторой весьма богатой группы перестановок, но не трансляционно-инвариантны

В целом ряде работ (см., например, [86—88] и ссылки в этих работах) структура алгебр Неймана для квантовых статистических систем изучалась в рамках аксиоматической квантовой теории поля. Приведем типичный результат (см. [88]).

Пусть каждой ограниченной области Ω в четырехмерном пространстве Минковского $\mathcal{M}$ сопоставлена C^*-алгебра $A(\Omega)$ операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве H, причем $A(\Omega) \subset A(\Omega')$, если $\Omega \subset \Omega'$. Пусть $R(\Omega) = A(\Omega)''$ — слабое замыкание алгебры $A(\Omega)$. Будем предполагать, что $1 \in R(\Omega)$. Пусть, кроме того, задано сильно непрерывное унитарное представление $a \to U(a)$ группы трансляций четырехмерного пространства, причем:

1) спектр $U(a)$ содержится в замкнутом световом конусе $\overline{V}^+$ будущего;

2) $A(\Omega + a) = U(a)\, A(\Omega)\, U(a)^{-1}$, $a \in \mathbb{R}^4$;

3) если (ограниченные) области Ω, Ω' пространственно подобны, то $A(\Omega) \subset (A(\Omega'))'$;

4) если $\{\Omega_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ есть покрытие неограниченной области $\Omega \subset \mathcal{M}$ ограниченными областями $\Omega_n \subset \Omega$, то слабое замыкание алгебры $\bigcup_{n=1}^{\infty} A(\Omega_n)$ не зависит от последовательности $\{\Omega_n\}$ (и обозначается $R(\Omega)$);

5) существует единственный циклический вакуумный вектор $x \in H$, $\overline{\{R(\mathcal{M})\, x\}} = H$, такой, что $U(a)\, x = x$, $a \in \mathcal{M}$.

Тогда, если $\Omega \subset \mathcal{M}$ есть неограниченная область, такая, что существует пространственно подобный вектор $a \neq 0$, такой, что:

(i) $\Omega = \Omega + \lambda a$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) $\exists$ открытое множество $\Omega' \neq \Omega$, пространственно подобное Ω, то $R(\Omega)$ есть фактор типа III.

Одним из ярких приложений теории факторов является теория индекса и спектральный анализ почти периодических псевдодифференциальных операторов, развитые в работах Кобурна, Зингера, Дугласа, Мойера, Шриффера, Шубина, Атьи. Здесь существенным оказывается некоторый II_∞-фактор $\mathscr{A}_B$, впервые введенный в работе [89] (см. также [90—92]). Опишем его. Обозначим через CAP ($\mathbb{R}^n$) банахову алгебру всех равномерно почти периодических функций на $\mathbb{R}^n$. Компактом Бора $\mathbb{R}^n_B$ называется пространство максимальных идеалов этой алгебры. По теореме Гельфанда банахова алгебра CAP ($\mathbb{R}^n$) изоморфна алгебре $C(\mathbb{R}^n_B)$ непрерывных функций на $\mathbb{R}^n_B$. Этот изоморфизм реализуется с помощью канонического непрерывного вложения $i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_B$, при котором образ $\mathbb{R}^n$ всюду плотен в $\mathbb{R}^n_B$. Вложение i индуцирует (после процесса замыкания) структуру компактной абелевой группы в $\mathbb{R}^n_B$. Пусть $d\mu$ — нормированная мера Хаара на $\mathbb{R}^n_B$. Можно показать, что для любой функции $f(x) \in$ CAP ($\mathbb{R}^n$)

$$\int f d\mu = \lim_{T\to\infty} T^{-n} \int_{\tau+K_T} f(x)\, dx,$$

где $K_T = \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_n),\ 0 \leqslant x_i \leqslant T\}$, $\tau \in \mathbb{R}^n$, причем предел равномерен по τ.

Скалярное произведение

$$(u, v)_B = \int u\bar{v}\, d\mu$$

превращает CAP ($\mathbb{R}^n$) в предгильбертово пространство. Гильбертов опространство, являющееся пополнением CAP ($\mathbb{R}^n$) по норме $\|u\|_B = \sqrt{(u, u)_B}$, называется пространством Безиковича $B^2(\mathbb{R}^n)$. Пространство $B^2(\mathbb{R}^n)$ представляет собой несепарабельное гильбертово пространство, в котором экспоненты $\{\exp(ix\xi)\}_{\xi\in\mathbb{R}^n}$ образуют ортонормированный базис. Таким образом, при преобразовании Фурье пространство Безиковича переходит в пространство

$$l^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ g(\xi) \mid \sum_{\xi\in\mathbb{R}^n} |g(\xi)|^2 < \infty \right\}.$$

Пусть $\mathscr{H} = B^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$ и

$$e_\lambda : f(x) \to e^{ix\lambda} f(x),$$
$$T_\lambda : f(x) \to f(x - \lambda),$$

$\lambda \in \mathbb{R}^n$. Фактор $\mathscr{A}_B$ определяется как алгебра операторов в $\mathscr{H}$, порожденная двумя семействами операторов:

$$\{e_\lambda \otimes e_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}^n\} \text{ и } \{1 \otimes T_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}^n\}.$$

При преобразовании Фурье пространство $\mathscr{H}$ переходит в $\tilde{\mathscr{H}} = l^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n)$ и e_λ, T_λ переходят в T_λ, e_λ. Алгебра $\mathscr{A}_B$ переходит при этом в алгебру $\tilde{\mathscr{A}}_B$, порожденную семействами операторов

$$\{T_\lambda \otimes T_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}^n\} \text{ и } \{1 \otimes e_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}^n\}.$$

Из последнего легко видеть, что $\tilde{\mathscr{A}}_B$ есть не что иное, как алгебра, возникающая в конструкции Мюррея — Неймана в ситуации, когда (абелева несчетная) группа $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^n_{\mathrm{discr}}$ действует сдвигами на пространство $S = \mathbb{R}^n$, наделенное лебеговой мерой $d\xi$. Это действие эргодично. Поэтому

по теореме Мюррея — Неймана $\tilde{\mathscr{A}}_B$, а, следовательно, и пространственно изоморфная ей алгебра $\mathscr{A}_B$ являются факторами типа II. Поскольку мера $S = \mathbb{R}^n$ бесконечна, то $\mathscr{A}_B$ есть фактор типа II_∞.

Алгебру матриц $q \times q$ с элементами из $\mathscr{A}_B$ обозначим $M_q(A_B)$. Ясно, что $M_q(A_B)$ также является фактором типа II_∞. Пусть $A = a(x, D)$ есть эллиптический $q \times q$-матричный псевдодифференциальный оператор нулевого порядка с почти периодическими коэффициентами (подробные определения см. в [90]). Для того чтобы связать оператор A с фактором $M_q(\mathscr{A}_B)$, рассмотрим в пространстве $\mathscr{H}$ оператор $A^0 = a(x+y, D_y)$; $u(x, y) \to \int e^{iy\xi} a(x+y, \xi)\tilde{u}(x, \xi)\, d\xi$, $\tilde{u}(x, \xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{-i\xi t} u(x, t)\, dt$, являющийся прямым интегралом операторов $a(x+y, D_y)$ по $x \in \mathbb{R}^n_B$.

Оператор $A^0 \in M_q(\mathscr{A}_B)$, и, как показано в [90], из эллиптичности A^0 следует существование «почти обратного» оператора $B^0 \in M_q(\mathscr{A}_B)$ в том смысле, что

$$\mathrm{Tr}_B(1 - A^0B^0), \qquad \mathrm{Tr}_B(1 - Б^0A^0) < \infty. \tag{4}$$

Оператор B^0 строится по некоторому эллиптическому псевдодифференциальному оператору нулевого порядка $b(x, D)$, $B^0 = b(x+y, D_y)$ аналогично тому, как A^0 строился по A. Соотношение (4) позволяет использовать общую фредгольмову теорию для II_∞ факторов, построенную в работах Бройера [93]. А именно, назовем оператор A^0 относительно фредгольмовым в $M_q(\mathscr{A}_B)$, если для него существует почти обратный оператор в смысле (4). Множество фредгольмовых операторов обозначим через $\mathscr{F}$. Тогда для каждого оператора $A^0 \in \mathscr{F}$ можно определить аналитический индекс

$$\mathrm{ind}_{an} A^0 = \mathrm{Tr}_B(N_{A^0}) - \mathrm{Tr}_B(N_{A^{0*}}),$$

где N_{A^0} — проектор на ядро оператора A^0. Основные свойства аналитического индекса состоят в следующем:

1) ind_{an} локально постоянен в топологии равномерной сходимости;
2) $\mathrm{ind}_{an}(A^0 + K) = \mathrm{ind}_{an}(A^0)$, если $\mathrm{Tr}_B K < \infty$;
3) $\mathrm{ind}_{an}(A^0B^0) = \mathrm{ind}_{an}(A^0)\,\mathrm{ind}_{an}(B^0)$;
4) $\mathrm{ind}_{an}(A^{0*}) = -\mathrm{ind}_{an}(A^0)$;
5) $\mathrm{ind}_{an}(A^0) = 0$, если оператор A^0 обратим. Кроме того, для ind_{an} справедлива формула Атьи—Ботта

$$\mathrm{ind}_{an}(A^0) = \mathrm{Tr}_B(1 - A^0B^0) - \mathrm{Tr}_B(1 - B^0A^0),$$

где B^0 — произвольный почти обратный оператор. Эта формула не совсем удобна для вычислений, поскольку использует неизвестный оператор B^0.

В работе [90] приводится явная формула, позволяющая вычислять аналитический индекс эллиптического псевдодифференциального оператора нулевого порядка непосредственно через его (главный) символ $a(x, \xi) = \sigma(A)$:

$$\mathrm{ind}_{an}(A^0) = \frac{(-1)^{q+n-1}}{(n-1)!} \int\limits_{\mathbb{R}^n_B} \int\limits_{S^{n-1}} \sigma(A)^* h_n,$$

где h_n есть некоторая дифференциальная форма порядка $(2n - 1)$. Прототипом работы [90] была более ранняя работа [89], где построена теория индекса для почти периодических теплицевых операторов.

В работах Шубина (см. [91], обзор [92] и ссылки в нем) теория индекса была обобщена на почти периодические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы положительного порядка. В этих работах при естественных предположениях на символ псевдодифференциального оператора доказано, что

$$\operatorname{ind}_{an} A^0 = \operatorname{Tr}_B (1 + A^{0*}A^0)^z - \operatorname{Tr}_B (1 + A^0A^{0*})^z$$

при всех z, при которых определена правая часть, и в частности при $\operatorname{Re} z < -n$. Кроме того, в [92] приведена красивая теорема, показывающая наглядный смысл индекса почти периодических операторов как «термодинамического предела» значений обычного индекса. А именно, пусть $A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ — эллиптический дифференциальный оператор с почти периодическими коэффициентами и $A_k(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_{\alpha,k}(x) D^\alpha$ — его периодические аппроксимации с T_k-периодическими функциями $a_{\alpha,k}$. Тогда

$$\operatorname{ind}_{an} A^0 = \lim_{k\to\infty} T_k^{-n} \operatorname{ind} A_k, \tag{5}$$

где $\operatorname{ind} A_k$ — обычный индекс оператора A_k с периодическими граничными условиями. Отметим, что формула (5) позволяет переносить на операторы с почти периодическими коэффициентами все известные интегральные формулы для индекса. На этом пути, например, в [92] доказывается аналог известной интегральной формулы Дынина—Федосова

$$\operatorname{ind}_{an}(A^0) = -(2\pi i)^{-n} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \int_{\mathbb{R}_B^n} \int_{S^{n-1}} \operatorname{Sp}(\sigma(A)\, d\sigma(A))^{2n-1}.$$

В работах Шубина [91, 92] с помощью II_∞-фактора $\mathcal{A}_B$ изучались также спектральные свойства почти периодических псевдодифференциальных операторов, строилось аналитическое продолжение степеней A^z таких операторов и т. д. Несколько иные II_∞-факторы использовались в работах Атьи и Зингера при построении «нестандартных» теорий индекса. Пусть $D : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ есть эллиптический псевдодифференциальный оператор, где E и F — векторные пучки над гладким компактным многообразием размерности n. Классическая теорема Атьи—Зингера об индексе утверждает, что

$$\operatorname{ind} D = \dim\ker D - \dim\operatorname{coker} D = (-1)^n \int_{T(M)} \operatorname{ch} \sigma_D \tau_M, \tag{6}$$

где σ_D есть символ D, рассматриваемый как элемент K-функтора $K(T(M))$, и ch: $K(T, M) \to H^*(T(M), Q)$ есть характер Черна; τ_M — класс Тодда $T(T(M))$ над $T(M)$. В работе Зингера (см. [94]; результат, совместный с Атьей) формула (6) доказана для эллиптических псевдодифференциальных операторов, действующих в векторных пучках со слоем, бесконечномерным в обычном смысле, но конечномерным в смысле теории Мюррея—Неймана. При этом фредгольмовость и индекс оператора D понимаются в смысле теории Бройера (см. [93]) и ind может принимать любые вещественные значения. Близкие результаты и обобщения указанной формулы были получены в работах [95, 96].

V. ТЕОРИЯ МЕРЫ И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Фон Нейману принадлежит заслуга окончательного оформления понятий эргодической теории в современном виде — как теории групп преобразований с инвариантной мерой; он же сформулировал главные проблемы и доказал ряд основополагающих фактов этой теории.

Основные проблемы этой теории, как и вообще значительной части теории динамических систем, восходят к работам Л. Больцмана, Дж. Гиббса, А. Пуанкаре, где были поставлены задачи обоснования эргодической гипотезы, изучения качественного поведения динамических систем с интегральным инвариантом и др. В самом начале 30-х годов Дж. Биркгоф доказал индивидуальную эргодическую систему, а фон Нейман — статистическую эргодическую теорему. Работа фон Неймана 1932 г. [97] (см. т. 1. наст. изд.) содержит широкую программу исследований по эргодической теории в том смысле, как мы ее понимаем сейчас. Стало ясно, что исследование трудных вопросов, поставленных классической механикой и статистической физикой, требует развитого аппарата и привлечения разнообразных математических средств. Фон Нейман широко использовал предыдущий опыт занятий теорией меры, спектральной теорией операторов, теорией групп и др.

В работе [97] поставлена проблема метрического изоморфизма, ставшая центральным вопросом абстрактной эргодической теории. Хотя, как стало ясно позднее, она неразрешима в том смысле, в каком она решается, например, теоремой фон Неймана для преобразований с дискретным спектром, эта проблема стимулировала дальнейшие исследования. После замечания Б. Купмана о том, что оператор, соответствующий обратимому преобразованию с инвариантной мерой в пространстве квадратично-интегрируемых функций, унитарен, фон Нейман начал систематические исследования спектра этого оператора как метрического инварианта динамической системы (см. об этом далее). Наконец, он привел самые разнообразные примеры конкретных преобразований с инвариантной мерой. Эта традиция широкого привлечения примеров из алгебры, комбинаторики, анализа, механики, позднее из теории вероятностей и теорий чисел стала основой широкого использования идей эргодической теории в математике. Особо следует отметить роль А.Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина, после работ которых теория стационарных случайных процессов и эргодическая теория стали развиваться в тесной связи, взаимно обогащая одна другую. Не вдаваясь в детали, отметим, что большой вклад в эргодическую теорию на первых этапах ее развития внесли Э. Хопф, С. Какутани, П. Халмош, В. А. Рохлин и др.

К началу 30-х годов в нескольких математических областях стало необходимым точное описание, как мы бы теперь сказали, категории используемых пространств с мерой, сюда относится классический анализ и функциональный анализ (абстрактная теория интегрирования), теория вероятностей (вероятностные пространства) и эргодическая теория. Аксиоматика теории вероятностей Колмогорова [98], различные концепции интегрирования (Даниель, Бохнер и др.) помогли уяснить роль общей теории меры, а предшествующий опыт дескриптивной теории измеримых множеств показал, насколько сложными и даже патологичными могут оказаться некоторые объекты этой теории.

Многие важные теоремы (теорема Фубини, эргодическая теорема и закон больших чисел, теоремы о предельных переходах под знаком интеграла) верны в очень общей обстановке. В теории вероятностей, где используется понятие условных мер, требования к пространствам с мерой более жесткие. В связи с этим Колмогоров ввел понятие совершенной меры (см. [99]). Пространства с совершенными мерами не обязательно удовлетворяют аксиомам сепарабельности; например, в теории случайных процессов возникает необходимость рассматривать меры в континуальном произведении прямых. Имеется ряд приемов «сепарабелизации» таких пространств с мерой. Эргодическая теория предъявляет к пространствам с мерой наиболее жесткие требования. Они впервые были сформулированы фон Нейманом (см. [100]).

Читатель может ознакомиться с аксиоматикой и используемыми в ней понятиями (различные виды сепарабельности, нормальности и др.) непосредственно по статье фон Неймана и Халмоша [100].

Запас пространств с нормированной мерой, который выделяет фон Нейман, совпадает с пространствами, которые изоморфны в смысле теории меры объединению отрезка $[0, \alpha]$ с мерой Лебега, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и не более чем счетным числом точек с мерами $\{x_i\}$, где $\sum_i x_i = 1 - \alpha$. Такие пространства названы в работе Рохлина [101] пространствами Лебега, это понятие и термин широко используются в современных работах.

Рохлин дал эквивалентную, но более удобную аксиоматику этих пространств, принятую ныне (см. [101]). Удобство аксиоматики Рохлина в том, что все понятия, входящие в нее, с самого начала инвариантны относительно изоморфизма mod 0, т. е. поточечного изоморфизма пространств полной меры, а основное понятие базиса (или базиса mod 0) есть абстрактная модель базиса цилиндрических множеств. Пространства Лебега охватывают практически все нужные в приложениях пространства с мерой; в частности, всякое польское (т. е. полное сепарабельное метризуемое) пространство с борелевской нормированной мерой есть пространство Лебега. В категории пространств Лебега имеются прямые (счетные) произведения, фактор-объекты, обратные (счетные) пределы; их теория не нуждается в анализе патологических ситуаций, известных из общей дескриптивной теории множеств или несепарабельных объектов. Следует заметить, что под самим предметом теории меры понимаются разные группы проблем в зависимости от того, имеется ли в виду анализ «общих пространств с мерой» с их патологиями, мощностными и теоретико-множественными затруднениями или геометрия пространств Лебега.

Важный вклад в геометрию пространств Лебега внесен Рохлиным, развившим в [101] теорию измеримых разбиений, канонических систем (условных) мер и расклассифицировавшим измеримые разбиения. Измеримое разбиение легче всего определить как разбиение на прообразы точек при гомоморфизме пространства Лебега в другое такое пространство (например, в отрезок вещественной прямой). Оказывается, почти всякий элемент измеримого разбиения и фактор-пространство по разбиению можно естественным образом превратить в пространство Лебега так, что будет иметь место обобщенная теорема Фубини, т. е. теорема о сведении интеграла по пространству к повторному интегралу. Система мер на элементах разбиения определяется единственным образом с точностью до изменения на множестве меры 0 и является тем, что в теории вероятностей называют системой условных мер. Стоит отметить, что для произвольных вероятностных пространств это понятие, вообще говоря, нельзя корректно определить *. Теория измеримых разбиений может быть изложена и на языке σ-алгебр измеримых множеств или на языке подколец кольца измеримых функций. Геометрический язык особенно полезен в эргодической теории и сыграл важную роль в «энтропийный» период ее развития. Функциональный язык полезен для спектральной теории; σ-алгебры обычно используются в теории случайных процессов.

Рохлин [103] доказал теоремы об образующих разбиениях (существование счетной образующей у любого апериодического автоморфизма), позже обобщенные Кригером. А. М. Вершик [104] развил теорию бесконечных убывающих последовательностей разбиений, которые возникают в связи с траекторной теорией автоморфизмов инвариантами эндоморфизмов; в последующих работах ряда авторов (Вершик, Степин, Винокуров, Рубштейн) убывающие последовательности разбиений нашли разнообразные применения. Геометрия пространств Лебега позволяет экономно согласовывать структуру пространств с мерой с другими структурами (линейной топологической и др.). Фон Ней-

* В работе [102] содержится другой пример того, как возникает необходимость в пространствах Лебега в задаче, не относящейся прямо к теории меры: речь идет о справедливости спектральной теоремы для двух коммутирующих семейств проекторов.

ману принадлежат также работы по инвариантным мерам на группах, изложенные в неопубликованных лекциях (Принстон, 1940 г.), в которых дано подробное изложение теории меры Хаара на локально-компактных группах.

Как уже отмечалось, одной из основных проблем эргодической теории является проблема изоморфизма динамических систем, т. е. задача классификации сохраняющих меру преобразований пространства с мерой. Доказанная в [97] теорема о разложении произвольной динамической системы на эргодические компоненты сводит проблему изоморфизма к классификации эргодических систем.

Свойства динамических систем, сохраняющиеся при метрическом изоморфизме, называются метрическими инвариантами. К таким инвариантам относятся спектр, эргодичность, перемешивание, слабое перемешивание. Проблема изоморфизма сводится к отысканию полной системы инвариантов. В [97] доказано, что для динамических систем с дискретным спектром спектр является полным метрическим инвариантом. Этот результат естественно приводит к гипотезе о том, что спектр является полным метрическим инвариантом произвольной динамической системы. В [97] была сформулирована более слабая гипотеза о том, что метрически изоморфны все динамические системы с непрерывным спектром.

Первая гипотеза была опровергнута Халмошем, построившим пример метрически неизоморфных эргодических автоморфизмов с одинаковым смешанным (т. е. содержащим как непрерывную, так и дискретную компоненту) спектром [105]. Ни доказать, ни опровергнуть вторую гипотезу долго не удавалось. Это было сделано лишь в 1958 г. Колмогоровым в работе [106], положившей начало новому направлению в эргодической теории, которое принято называть «энтропийным» в связи с появившимся в [106] новым метрическим инвариантом динамических систем — энтропией. Понятие энтропии в эргодической теории навеяно шенноновской теорией информации и теорией стационарных случайных процессов. (По поводу определения энтропии динамической системы см. также [107—109].)

Важные результаты, касающиеся спектральных свойств типичных динамических систем, были получены Халмошем [110] и Рохлиным [111]. Пусть X — некоторое пространство динамических систем, снабженное хаусдорфовой топологией. Напомним, что некоторое свойство динамических систем называется типичным в X, если совокупность динамических систем в X, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное в X подмножество типа G_δ. Основной результат работ [110, 111] состоит в том, что типичный автоморфизм имеет непрерывный спектр, что доказывает в ослабленном виде гипотезу фон Неймана [97].

Существует класс преобразований, так называемые сдвиги Бернулли (или автоморфизмы Бернулли), который с некоторой общей точки зрения играет центральную роль в эргодической теории. В силу важности этого класса динамических систем мы приведем его определение.

Пусть A — конечное множество, содержащее k элементов. Приписав элементам A вероятности $p_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, получим вероятностную меру на σ-алгебре всех подмножеств A. Рассмотрим бесконечное произведение $\prod_{n=-\infty}^{\infty} A_n$, где каждый сомножитель совпадает с A. Пусть пространство Ω состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей $\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots)$ элементов множества A. Совокупность множеств вида $\{\omega\colon (\omega_n, \ldots, \omega_{n+m-1}) \in B\}$ (цилиндров), где B — подмножество прямого произведения $\underbrace{A \ldots A}_{m \text{ раз}}$, порождает σ-алгебру подмножеств Ω. Мера P в Ω определяется своими значениями на цилиндрах. Пусть x_n— функция, ставящая в соответ-

ствие точке $\omega \in \Omega$ значение ω_n ее n-й координаты. Положим

$$P\{\omega : x_r(\omega) = i_r,\ n \leqslant r \leqslant m+n-1\} = \prod_{i=n}^{n+m-1} p_{i_r}. \tag{1}$$

Преобразование $T : \Omega \to \Omega$, задающееся формулой $(T\omega)_n = \omega_{n+1}$, и называется сдвигом Бернулли. Из (1) вытекает, что $\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ является последовательностью независимых случайных величин со значениями из A.

Все сдвиги Бернулли имеют счетнократный лебеговый спектр и тем самым спектрально-изоморфны. Колмогоров в [106] установил, что энтропия сдвига Бернулли равна $-\sum_{i=1}^{k} p_i \lg p_i$, т. е. существует континуум неизоморфных динамических систем с одним и тем же непрерывным спектром. Поэтому естественно поставить проблему изоморфизма для одних только сдвигов Бернулли. Л. Д. Мешалкин [112] доказал, что если пространства состояний сдвигов Бернулли T и S конечны, а вероятности этих состояний являются степенями одного и того же числа, то из равенства энтропий вытекает их изоморфность.

Я. Г. Синай [113] ввел понятие слабого изоморфизма преобразований с инвариантной мерой. Два автоморфизма $T : M \to M$ и $T' : M' \to M'$ называются слабоизоморфными, если каждый из них является фактором другого, т. е. существуют такие сохраняющие меру (но, вообще говоря, необратимые) отображения $S : M \to M'$ и $S' : M' \to M$, что $ST = T'S$ и $S'T' = TS'$. В этих работах было доказано, что если T — сдвиг Бернулли с конечной энтропией, не превосходящей энтропии эргодического автоморфизма T', то T есть фактор T'. Отсюда вытекает, что два сдвига Бернулли с одной и той же конечной энтропией слабоизоморфны.

В начале 70-х годов произошел значительный прогресс в проблеме изоморфизма, связанный в первую очередь с работами Д. Орнстейна. В [114, 115] было дано полное положительное решение проблемы изоморфизма для сдвигов Бернулли с равной энтропией. Орнстейн ввел [116] новое условие регулярности для стационарных в узком смысле случайных процессов с дискретным временем, названное им свойством конечной определенности и занимающее промежуточное положение между обычной регулярностью и полной регулярностью (по И. А. Ибрагимову [117]). Свойство конечной определенности в отличие от большинства вероятностных условий перемешивания является метрическим инвариантом динамической системы

Фридман и Орнстейн [118] доказали, что перемешивающий сдвиг Маркова (т. е. сдвиг в пространстве реализаций эргодической марковской цепи) изоморфен сдвигу Бернулли. В [119] Орнстейн показал, что два бернуллиевских потока с одинаковой энтропией изоморфны. Фельдман и Смородинский [120] распространили этот результат на бернуллиевские потоки с бесконечной энтропией. Отсюда вытекает, что с точностью до тривиальной замены времени существует всего два бернуллиевских потока: с конечной и бесконечной энтропией.

Другим важнейшим понятием эргодической теории, также введенным в [106], является понятие квазирегулярной динамической системы Колмогорова, или просто K-системы. K-Системы являются аналогом регулярных (т. е. удовлетворяющих закону нуля и единицы) стационарных случайных процессов. Динамическая система называется K-системой, если существует измеримое разбиение ζ ее фазового пространства, для которого имеют место следующие три свойства: $T\zeta \geqslant \zeta$, $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n\zeta = \varepsilon$, $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\zeta = \nu$.

Рохлиным и Синаем [103] была далеко продвинута теория инвариантных (относительно некоторого автоморфизма) разбиений, позволившая доказать теоремы о связи энтропии (точнее, ее полной

положительности) и K-свойства. (Напомним, что сохраняющее меру преобразование T имеет вполне положительную энтропию, если всякий его фактор имеет положительную энтропию.) K-системы имеют положительную энтропию и счетнократный лебеговый спектр [109, 121].

Все системы с дискретным, сингулярным или конечнократным спектром имеют поэтому нулевую энтропию [103]. В связи с этим возникла гипотеза о том, что любой K-автоморфизм изоморфен сдвигу Бернулли с той же энтропией. Другая гипотеза, выдвинутая М. С. Пинскером [122], состоит в том, что любой автоморфизм с положительной энтропией изоморфен прямому произведению K-автоморфизма и автоморфизма с нулевой энтропией. Обе эти гипотезы были опровергнуты Орнстейном. В [123] он построил пример K-автоморфизма, не являющегося сдвигом Бернулли, а в [124] при помощи модификации конструкции предыдущей работы построил контрпример к гипотезе Пинскера. В работе [125] Орнстейн и Шилдс построили континуум попарно неизоморфных K-автоморфизмов с одинаковой энтропией, каждый из которых не изоморфен своему обратному.

В связи с тем что перемешивающие марковские сдвиги оказались изоморфными сдвигам Бернулли, возникает вопрос, являются ли бернуллиевскими сдвиги, хорошо аппроксимируемые марковскими сдвигами с конечной памятью? Такие сдвиги встречаются в ряде приложений эргодической теории. В [126] Дж. Галлавотти установил бернуллиевость одномерных гиббсовских полей, порождаемых парными потенциалами с конечным первым моментом. (Д. Рюэль и Р. Л Добрушин показали, что это условие обеспечивает отсутствие фазовых переходов в системе.) В работе [127] при некоторых условиях бернуллиевость доказана для эргодических марковских случайных полей, отвечающих моделям типа модели Изинга с притяжением. Л. А. Бунимович [128] доказал, что специальный поток, построенный по автоморфизму сдвига в пространстве реализаций стационарного случайного процесса, хорошо аппроксимирующегося марковскими цепями, и функции, которая слабо зависит от далеких координат, является бернуллиевским. К таким потокам, в частности, относятся транзитивные потоки Аносова с гиббсовскими мерами. Бернуллиевость геодезического потока на компактном многообразии отрицательной кривизны была установлена Орнстейном и Вейсом [129].

Остановимся теперь на развитии спектральной теории динамических систем, также восходящей к работе [97] фон Неймана. Результаты и конструкции, изложенные в [97, 100], в значительной степени определили весь ход дальнейшего развития этой теории. В частности, конструкция из [97], с помощью которой были построены первые примеры динамических систем с непрерывным спектром, предвосхитила применение возникшего значительно позднее аппроксимационного подхода к задачам эргодической теории [130].

Существенным этапом в развитии спектральной теории стал спектральный анализ стационарных случайных процессов и в первую очередь гауссовских процессов. Инициатива развития этих исследований принадлежала Колмогорову, увидевшему здесь большие возможности для построения примеров систем с необычными спектрами. Эти исследования были связаны с его работами 30—40-х годов по спектральной теории случайных процессов [131]. Более подробно эти вопросы рассмотрены С. В. Фоминым [132], И. В. Гирсановым [133], построившим первый пример системы с непрерывным простым спектром, Вершиком [134, 135], рассмотревшим общую теорию разложений Винера—Ито в связи с гауссовскими автоморфизмами, в частности мультипликативную структуру пространства Фока, Синаем [136], давшим абстрактное описание спектров автоморфизмов вероятностного характера.

Позже оказалось, что встречаются спектры и другого типа. Методом аппроксимаций удалось показать [137, 138], что типичными для общих автоморфизмов являются простые непрерывные, а не кратные спектры.

В общих чертах метод аппроксимаций состоит в том, что действие некомпактной группы пре-

образований представляется в каком-то смысле как предел действий компактных групп. Применение аппроксимационных методов в эргодической теории весьма широко [130, 130a]. С их помощью В. И. Оселедец [139] построил пример эргодического преобразования с конечнократным, но не простым спектром. Пример Оселедца представляет собой преобразование перекладывания 24 отрезков. С. А. Малкин построил пример автоморфизма с простым смешанным спектром, не изоморфного своему обратному [140]. Аналогичный пример с простым непрерывным спектром построил также Оселедец [141]. Для автоморфизма с не чисто точечным спектром аналогом группового свойства спектра является свойство подчинения свертки максимального спектрального типа ему самому. Это свойство имеет место в примерах теоретико-вероятностного происхождения, например для гауссовских сдвигов и для лебегого спектра. А. М. Степин построил пример автоморфизма со смешанным спектром, для которого данное свойство не выполняется [138]. Такой же пример с непрерывным спектром построил Оселедец [142]. Степин [143] доказал, что максимальный спектральный тип не подчиняет свою свертку для типичного автоморфизма.

Ряд вопросов спектральной теории в настоящее время остаются открытыми. Так, неизвестно, существуют ли эргодические автоморфизмы со спектром постоянной, но не равной единице кратности; может ли автоморфизм иметь конечнократный абсолютно непрерывный спектр; существуют ли автоморфизмы с простым лебеговым спектром?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диксмье Ж.* C^*-Алгебры и их представления. М.: Наука, 1974. 399 с.
2. *Dixmier J.* Les algébres d'operateürs dans l'espace hilbertien. P.: Gauthier-Villars, 1969. 367 p.
3. *Sakai S.* C^*-Algebras and W^*-algebras. B. etc.: Spring.-Verl., 1971. 256 p.
4. *Эмх Ж.* Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976. 423 с.
5. *Браттели У., Робинсон Д. У.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика: C^*- и W^*-алгебры, группы симметрий, разложение состояний. М.: Мир, 1982. 511 с.
6. *Pedersen G.* C^*-Algebras and their automorphism groups. L. etc.: Acad. press, 1979. 416 p.
7. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. N. Y.: Spring.-Verl., 1979. Vol. 1.
8. *Schwartz J.* Two finite, non-hyperfinite, non-isomorphic factors.— Communs Pure and Appl. Math., 1963, vol. 16, p. 19—26.
9. *Dixmier J.* Quelques propertiétés des suites centrales dans les facteurs de type II_3.— Invent. math., 1969, Bd. 7, S. 215—225.

9a. *Dixmier J.* Von Neumann algebras. Amsterdam etc.: North-Holland publ. 1981. Vol. 36. 437 p.

10. *Dixmier J., Lance E.* Deux nouveaux facteurs de type II_1.— Invent. math., 1969, Bd. 7, S. 226—234.
11. *Zeller-Meier G.* Deux autres facteurs de type II_2.— Invent. math., 1969, Bd. 7, S. 235—242.
12. *Sakai S.* An uncountable number of II_1 and II_∞ factors.— J. Funct. Anal., 1970, vol. 5, p. 236—246.
13. *Макдуфф Д.* К структуре $П_1$-факторов.— Успехи мат. наук, 1976, т. 25, № 6, с. 29—51.
14. *Connes A.* The fundamental group of II_1-factors.—J. Oper. Theory, 1980. vol. 4, N 4, p. 151—153.
15. *Connes A.* Classification of injective factors.— Ann. Math., 1976, vol. 104, p. 73—116.
16. *Pukánszky L.* Some expamples of factors.— Publ. math. Debrecen, 1956, k. 4, old. 135—156.
17. *Powers R.* Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann algebras.— Ann. Math., 1967, vol. 86, p. 138—171.
18. *Araki H., Woods E.* A classification of factors.—Publs Res. Inst. Math. Sci., 1968, vol. 3, p. 51—130.
19. *Connes A.* Une classification des facteurs de type III.— Ann. sci. Ecole norm.supér., 1973, vol. 6, p. 133—252.
20. *Krieger W.* On the Araki—Woods asymptotic ratio set and nonsingular transformations of a measure space.— Lect. Notes Math., 1970, N 160, p. 158—177.
21. *Krieger W.* On ergodic flows and isomorphism of factors.— Math. Ann., 1976, Bd. 223, S. 19—70.
22. *Вершик А. М.* Устройство ручных разбиений.—Успехи мат. наук, 1972, т. 27, № 3, с. 195—196.

23. *Woods E.* The classification of factors is not smooth.— Canad. J. Math., 1973, vol. 25, p. 96—102.
24. *Connes A.* A factor not antiisomorphic to itself.— Ann. Math., 1975, vol. 101, p. 536—554.
25. *Бернштейн И. Н.* Все редуктивные алгебраические группы — ручные.— Функцион. анализ и его приложения, 1974, т. 8, № 2, с. 3—6.
26. *Кириллов А. А.* Унитарные представления нильпотентных групп.— Успехи мат. наук, 1962, т. 17, № 4, с. 57—101.
27. *Auslender L., Kostant B.* Polarization and unitary representations of the solvable Lie groups.— Invent. math., 1971, Bd. 14, S. 255.
28. *Alfsen E., Schultz F.* Non-commutative spectral theory for affine function space on convex sets.— Mem. Amer. Math. Soc., 1976, N 172, p. 1—78.
29. *Вершик А. М.* Геометрическая теория состояний. Границы Неймана и двойственность C^*-алгебр.— В кн.: Проблемы теории вероятностных распределений. Л. : ЛОМИ, 1972, с. 147—154. (Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР; Т. 29).
30. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968. 664 с.
31. *Люмис Л.* Введение в абстрактный гармонический анализ. М. : Изд-во иностр. лит., 1956. 251 с.
32. *Вершик А. М., Керов С. В.* Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы.— Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 5, с. 1037—1040.
33. *Вершик А. М.* Счетные группы, близкие к конечным.— В кн.: Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М.: Мир, 1973, с. 112—135.
34. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах. М. : Мир, 1973. 136 с.
35. *Vershik A.* Amenability and approximation of infinite groups.— Sel. Math. Sov., 1982, vol. 2, N 4, p. 311—330.
36. *Choi M., Effros E.* Nuclear C^*-algebras and the approximation property.— Amer. J. Math., 1978, vol. 100, N 1, p. 61—79.
37. *Lance E.* On nuclear C^*-algebras.— J. Funct. Anal., 1973, vol. 12, p. 157—176.
38. *Фомин С. В.* О мерах, инвариантных относительно некоторой группы преобразований.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 3, с. 261—274.
39. *Zeller-Meier G.* Produits croisis d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes.—J. math pures et appl., 1968, vol. 47, p. 101—239.
40. *Feldman J., Moore C.* Ergodic equivalence relations cohomology and von Neumann algebras. II.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, vol. 234, p. 289—361.
41. *Renault J.* A groupoid approach to C^*-algebras.— Lect. Notes Math., 1980, N 793, S. 1—160.
42. *Вершик А. М.* Неизмеримые разбиения, траекторная теория алгебры операторов.— Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 5, с. 1004—1007.
43. *Moore C. C.* Invariant measures on product spaces.— In: Proc. Vth Berkeley Symp. Math. Statist Probab. Berkeley: Univ. press, 1967, vol. 2, pt. 2, p. 447—459.
44. *Ornstein D., Weiss B.* Ergodic theory of amenable group actions.— Bull. Amer. Math. Soc., 1980, vol. 2, N 1, p. 161—164.
45. *Вершик А. М.* Действие PSL (2, R) на P_1R аппроксимируемо.— Успехи мат. наук, 1978, т. 33, № 1, с. 209—210.
46. *Bowen R.* Anosov foliations are hyperfinite.— Ann. Math., 1977, vol. 106, p. 549—565.
47. *Арзуманян В. А., Вершик А. М.* Фактор-представления скрещенного произведения абелевой C^*-алгебры и полугруппы ее эндоморфизмов.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, с. 513—516.
48. *Dye H. A.* On group of measure preserving transformations. I, II.— Amer. J. Math., 1959, vol. 81, p. 119—159; 1963, vol. 85, p. 551—576.
49. *Вершик А. М.* Теорема о лакунарном изоморфизме монотонных последовательностей разбиений.— Функцион. анализ и его приложения, 1968, т. 2, № 3, с. 17—21.
50. *Белинская Р.М.* Разбиения пространства Лебега на траектории, определяемые эргодическими автоморфизмами.— Функцион. анализ и его приложения, 1968, т. 2, № 3, с. 4—16.
51. *Голодец В. Я.* Скрещенные произведения алгебр фон Неймана.— Успехи мат. наук, 1971, т. 26, № 5, с. 3—50.
52. *Ramsay A.* Virtual groups and group actions.— Adv. Math., 1971, vol. 6, p. 253—322.
53. *Вершик А. М., Юзвинский С. А.* Динамические системы с инвариантной мерой.— В кн.:. Математический анализ, 1967. М. : ВИНИТИ, 1969, с. 133—187. (Итоги науки и техники).
54. *Zimmer R.* Orbit equivalence and rigidity of ergodic actions of Lie groups.— Ergod. Theory and Dynam. Syst., 1981, vol. 1, N 2, p. 237—253.

55. *Bratteli O.* Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras.— Trans. Amer. Math. Soc., 1972, vol. 171, p. 195—234.
56. *Elliott G. A.* The Mackey—Borel structure on the spectrum of an approximately finite-dimensional separable C^*-algebra.— Trans. Amer. Math. Soc., 1977, vol. 233, p. 59—68.
57. *Stratile S., Voiculescu D.* Representations of AF-algebras and of the group V (∞).— Lect. Notes Math., 1975, N 468, p. 1—169.
58. *Effros E., Handelman D., Shen C.* Dimension groups and their affine representations.— Amer. J. Math., 1980, vol. 102, p. 385—402.
59. *Elliott G.* On the classification of inductive limits of sequence of semisimple finite-dimensional algebras.— J. Algebra, 1976, vol. 38, p. 29—44.
60. *Effros E.* Dimensions and C^*-algebras.— CBMS Reg. Conf. Ser., 1981, N 46, p. 1—78.
61. *Pimsner M., Voiculescu D.* Imbedding the irrational rotation C^*-algebra into an *AF-algebra.*— J. Operat. Theory, 1980, vol. 4, p. 201—210.
62. *Вершик А. М.* Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 3, с. 526—529.
63. *Вершик А. М., Керов С. В.* Асимптотическая теория характеров симметрической группы.— Функцион. анализ и его приложения, 1981, т. 15, № 4, с. 15—27.
64. *Thoma E.* Die unzerlagbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe.— Math. Ztscher., 1964, Bd. 85, S. 40—61.
65. *Voiculescu D.* Representations factorielles de type II_1 de V (∞).— J. math. pures et appl., 1976, vol. 55, p. 1—20.
66. *Вершик А. М., Керов С. В.* Характеры и фактор-представления бесконечной унитарной группы.— Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 2, с. 273—276.
67. *Такесаки М.* Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения.— Математика: Период. сб. пер. иностр. статей, 1974, т. 18, № 3, с. 83—122.
68. *Рюэль Д.* Статистическая механика: Строгие результаты. М. : Мир, 1971. 367 с.
69. *Segal I. E.* Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. — Mat.-Fys. skr. Kgl. dan. vid. selsk., 1959, bd. 31, s. 12.
70. *Robinson D. W.* Statistical mechanics of quantum spin systems. I, II.— Communs Math. Phys., 1967, vol. 6, p. 151—160; 1968, vol. 7, p. 337—348.
71. *Haag R., Hugenholtz N. M., Winnink M.* On the equilibrium states on quantum statistical mechanics.— Communs Math. Phys., 1967, vol. 5, p. 215—236.
72. *Doplicher S., Kastler D., Robinson D. W.* Covariance algebras in field theory and statistical mechanics.— Communs Math. Phys., 1966, vol. 3, p. 1—28.
73. *Ruelle D.* States of physical systems.— Communs Math. Phys., 1966, vol. 3, p. 133—150.
74. *Winnink M.* Algebraic aspects of the Kubo—Martin—Schwinger condition.— In: Cargese lectures in physics / Ed. D. Kastler. N. Y. etc.: Gordon-Breach, 1970, p. 4—21.
75. *Hugenholtz N.M.* On the factor tupe of equilibrium states in quantum statistical mechanics.— Communs Math. Phys., 1967, vol. 6, p. 189 — 193.
76. *Araki H., Woods E. J.* Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free bose gas.— J. Math. Phys., 1963, vol. 4, p. 637—662.
77. *Araki H.* Type of von Neumann algebras associated to the free scalar field.— Progr. Theor. Phys., 1964, vol. 32, p. 956—961.
78. *Connes A.* Outer conjugacy classes of automorphisms of factors.— Ann. sci. Ecole norm. supér. 1975, vol. 8, p. 383—420.
79. *Takesaki M.* Disjointness of the KMS-states of different temperatures.— Communs Math. Phys. 1970, vol. 17, p. 33—41.
80. *Araki H.* Gibbs states of a one dimensional quantum lattice.— Communs Math. Phys., 1969, vol. 14, p. 120—157.
81. *Аншелевич В. В.* Единственность состояний, удовлетворяющих граничным условиям Кубо—Мартина—Швингера, в случае одномерных спиновых систем с финитным потенциалом.— Теорет. и мат. физика, 1972, т. 13, с. 120—130.
82. *Araki H.* On uniqueness of KMS-states of one-dimensional quantum lattice systems.— Communs Math. Phys., 1975, vol. 44, p. 1—7.
83. *Ginibre J.* Reduced density matrices of the anisotropic Heisenberg model.— Communs Math. Phys., 1968, vol. 10, p. 140—154.
84. *Пирогов С. А.* Фазовые диаграммы квантовых решетчатых систем.— Докл. АН СССР, 1978, т. 242, № 2, с. 284—286.

85. *Dyson F. J.* Existence of a phase transition in a one-dimensional ising ferromagnet.— Cummuns Math. Phys., 1969, vol. 12, p. 91—107.
86. *Araki H.* On the algebra of local observables.— Progr. Theor. Phys., 1964, vol. 32, p. 844—854.
87. *Stormer E.* Types of von Neumann algebras associated with extremal invariant states.— Communs. Math. Phys., 1967, vol. 6, p. 194—204.
88. *Dell-Antonio G. F.* Structure of the algebras of some free systems.— Communs Math. Phys. 1968, vol. 9, p. 81—117.
89. *Coburn L. A., Douglas R. G., Schaeffer D. G., Singer I. M.* C^*-algebras of operators on a half-space. II. Index Theory. Bure-sur-Ivette: Inst. Hautes Etud Sci., 1971, N 40, p. 69—79.
90. *Coburn L. A., Moyer R. D., Singer I. M.* C^*-algebras of almost periodic pseudodifferential operators.— Acta math., 1973, bd 130, N 3/4, s. 279—307.
91. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные почти-периодические операторы и алгебры фон Неймана.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1976, т. 35, с. 103—163.
92. *Шубин М. А.* Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти периодическими коэффициентами.— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, № 2, с. 95—135.
93. *Breuer M.* Fredholum theories in von Neumann algebras. I, II.— Math. Ann., 1968, Bd. 178, N 3, S. 243—254; 1969, Bd. 180, S. 313—325.
94. *Singer I. M.* Some remarks on operator theory and index theory.— Lect. Notes Math., 1975, N 575, p. 128—138.
95. *Мищенко А. С.* Теория эллиптических операторов над C^*-алгебрами.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 6, с. 1289—1291.
96. *Каспаров Г. Г.* Операторный K-функтор и расширение C^*-алгебр.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, т. 44, № 3, с. 571—636.
97. *Neumann J. von.* Zur Operatorenmethode in der klassishen Mechanik.— Ann. Math., 1932, vol. 33, N 3, p. 587—642. (Рус. пер. см. наст. изд., т. 1).
98. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М. : ОНТИ, 1936. 80 с.
99. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: Гостехиздат, 1949. 264 с.
100. *Halmos P. R., Neumann J. von.* Operator methods in classical mechanics. II.— Ann Math., 1942, vol. 43, N 2, p. 332—350. (Рус. пер. см. наст. изд., т. 1).
101. *Рохлин В. А.* Об основных понятиях теории меры.— Мат. сб., 1949, т. 25, № 1, с. 107—150.
102. *Бирман М. Ш., Вершик А. М., Соломяк М. З.* Произведение перестановочных спектральных мер может не быть счетно-аддитивным.— Функцион. анализ и его приложения, 1979, т. 13, № 1, с. 61—62.
103. *Рохлин В. А.* Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.— Успехи мат. наук, 1967. т. 22, № 5, с. 4—56.
104. *Вершик А. М.* Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения.— Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 4, с. 748—751.
105. *Халмош П.* Лекции по эргодической теории. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 145 с.
106. *Колмогоров А. Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега.— Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 5, с. 861—864.
107. *Колмогоров А. Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов.— Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 4, с. 754—755.
108. *Синай Я. Г.* О понятии энтропии динамической системы.— Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 4, с. 768—771.
109. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М. : Наука, 1980. 383 с.
110. *Halmos P. R.* In general a measure — preserving transformation is mixing.— Ann. Math., 1944, vol. 5, N 4, p. 784—792.
111. *Рохлин В. А.* Общее преобразование с инвариантной мерой не есть перемешивание.— Докл. АН СССР, 1948, т. 60, № 3, с. 349—351.
112. *Мешалкин Л. Д.* Один случай изоморфизма схем Бернулли.— Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 1, с. 41—44.
113. *Синай Я. Г.* О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой.— Мат. сб., 1963, т. 63, № 1, с. 23—42.
114. *Ornstein D. S.* Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic.— Adv. Math., 1970, vol. 4, N 3, p. 337—352.
115. *Ornstein D. S.* Two Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic.— Adv. Math., 1970, vol. 5, N 3, p. 339—348.

116. *Ornstein D. S.* Factors of Bernoulli shifts are Bernoulli shifts.— Adv. Math., 1970, vol. 5, N 3, p. 349—364.
117. *Ибрагимов И. А.* Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов.— Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4, с. 711—714.
118. *Friedman N. A., Ornstein D. S.* On isomorphism of weak Bernoulli transformations.—Adv. Math., 1970, vol. 5, N 3, p. 365—394.
119. *Ornstein D. S.* Imbedding Bernoulli shifts in flows.— Lect. Notes Math., 1970, 160, p. 178—218.
120. *Feldman J., Smorodinsky M.* Bernoulli flows with infinite entropy.— Ann. Math. Statist., 1971, vol. 42, N 1, p. 351—352.
121. *Синай Я. Г.* Динамические системы со счетно-кратным лебеговским спектром. I.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 6, с. 899—924.
122. *Пинскер М. С.* Динамические системы с вполне положительной и нулевой энтропией.— Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 5, с. 1025—1026.
123. *Ornstein D. S.* An example of a Kolmogorov automorphism that is not a Bernoulli shift.— Adv. Math., 1973, vol. 10, N 1, p. 49—62.
124. *Ornstein D. S.* A mixing transformation for which Pinsker's conjecture fails.— Adv. Math., 1973, vol. 10, N 1, p. 103—123.
125. *Ornstein D. S., Shields P. C.* An uncountable family of *K*-automorphisms.— Adv. Math., 1973, vol. 10, N 1, p. 63—88.
126. *Gallavotti G.* Ising model and Bernoulli schemes in one dimension.— Communs Math. Phys., 1973, vol. 32, N 2, p. 183—190.
127. *Liberto F., Gallavotti G., Russo L.* Markov processes, Bernoulli schemes and Ising model.—Communs Math. Phys., 1973, vol. 33, N 4, p. 259—282.
128. *Бунимович Л. А.* Об одном классе специальных потоков.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, т. 38, № 1, с. 213—227.
129. *Ornstein D. S., Weiss B.* Geodesic flows are Bernoullian.— Isr. J. Math., 1973, vol. 14, N 2, p. 184—198.
130. *Каток А. Б., Степин А. М.* Аппроксимации в эргодической теории.— Успехи мат. наук, 1967, т. 22, № 5, с. 81—106.
130а. *Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М.* Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой. — В кн.: Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1976, с. 129—262. (Итоги науки и техники; Т. 13).
131. *Колмогоров А. Н.* Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве.— Бюл. МГУ, 1941, т. 2, № 6, с. 1—40.
132. *Фомин С. В.* Нормальные динамические системы.— Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 2, с. 25—47.
133. *Гирсанов И. В.* О спектрах динамических систем, порождаемых стационарными гауссовскими процессами.— Докл. АН СССР, 1958, т. 119, № 5, с. 851—853.
134. *Вершик А. М.* К теории нормальных динамических систем.— Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 1, с. 9—12.
135. *Вершик А. М.* О спектральном и метрическом изоморфизме некоторых нормальных динамических систем.— Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 2, с. 255—257.
136. *Синай Я. Г.* Несколько замечаний о спектральных свойствах эргодических динамических систем.— Успехи мат. наук, 1963, т. 18, № 5, с. 41—45.
137. *Юзвинский С. А.* О метрических автоморфизмах с простым спектром.— Докл. АН СССР, 1967, т. 172, № 5, с. 1036—1038.
138. *Степин А. М.* Спектр и аппроксимация метрических автоморфизмов периодическими преобразованиями.— Функцион. анализ и его приложения, 1967, т. 1, № 2, с. 77—80.
139. *Оселедец В. И.* О спектре эргодических автоморфизмов.— Докл. АН СССР, 1966, т. 168, № 5, с. 1009—1011.
140. *Малкин С. А.* Пример двух метрически неизоморфных эргодических автоморфизмов с одинаковым простым спектром.— Изв. вузов. Математика, 1968, № 6, с. 69—74.
141. *Оселедец В. И.* Две неизоморфные динамические системы с одинаковым простым непрерывным спектром.— Функцион. анализ и его приложения, 1971, т. 5, № 3, с. 75—79.
142. *Оселедец В. И.* Автоморфизм с простым и непрерывным спектром без группового свойства.— Мат. заметки, 1969, т. 5, № 3, с. 323—326.
143. *Степин А. М.* Спектры динамических систем.— В кн.: Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. М.: Наука, 1972, с. 307—312.

СОДЕРЖАНИЕ

О кольцах операторов 7
Совместно с Ф. Дж. Мюрреем (пер. *А. В. Марченко*)

О кольцах операторов II. 129
Совместно с Ф. Дж. Мюрреем (пер. *А. В. Марченко*)

О кольцах операторов III. 167
(пер. *А. В. Марченко*)

О кольцах операторов IV. 235
Совместно с Ф. Дж. Мюрреем (пер. *П. М. Блехер*)

Комментарии 337

I. Теория факторов и проблема изоморфизма 338
(*А. М. Вершик*)

II. Теория представлений групп и алгебр. Скрещенные произведения . . . 342
(*А. М. Вершик*)

III. Теория Томита—Такесаки—Конна 349
(*А. В. Марченко*)

IV. Некоторые применения факторов 353
(*П. М. Блехер*)

V. Теория меры и эргодическая теория 360
(*Л. А. Бунимович, А. М. Вершик*)